

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 2

2.300 ΔΡΧ. / € 6,75

Οι ανισότητες στα μαθηματικά



- Φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών
- Η τέχνη της σύνθεσης πρωτότυπων προβλημάτων
- Το άθροισμα των ελαχίστων και το ελάχιστο των αθροισμάτων
- Η τριγωνομετρία του Πτολεμαίου
- Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή και ενέργεια μαγνητικού πεδίου
- Ξεμπλέκοντας συρμάτινος δακτυλίους πάνω στο επίπεδο
- Ψάχνοντας για μαργαριτάρια στο βυθό του Αιγαίου



Λάδι σε λινό, 50 × 66 εκ., Συλλογή της οικογένειας Hay Whitney, © 2000 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ονάσινγκτον.

Rhumoult à Sassetot (1906), του Maurice de Vlaminck

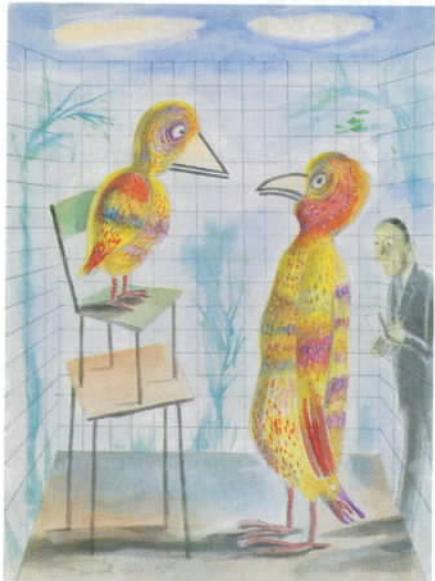
ΤΑ «ΘΗΡΙΑ» ΤΟΥ ΦΟΒΙΣΜΟΥ, ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΠΟΡΙΑΚΟΥ ΚΑΛ-
ΛΙΤΕΧΝΙΚΟΥ κινήματος των αρχών του 20ού αιώνα, α-
ποτύπωναν το παράξενο παιχνίδι ανάμεσα στο φως και
τη σκιά με τις τραχιές πνευλιές τους. Είτε πρόκειται για
τα απόνερα του ρυμουλκού είτε για το κύμα που σήκωσε
ένας ξαφνικός άνεμος, οι φοβιστές μπορούσαν να πειθαρ-
χήσουν τη συνασθηματική δυναμική των συνθετικών
στοιχείων και να αποθανατίσουν στον καρβά την ενιαία

και ουσιαστική ιδέα. Αφοσιωμένοι παρατηρητές του φυ-
σικού κόσμου, δεν αποκλείεται να είχαν απορήσει για έ-
να παράξενο φαινόμενο στη διάρκεια των σπουδών τους
—την εμφάνιση των φαινομενικά τυχαίων περιοχών η-
ρεμίας πάνω στην κυματώδη επιφάνεια του νερού. Για
να ανακαλύψετε την αιτία γι' αυτές τις «νησίδες γαλή-
νης» εν μέσω της τρικυμιώδους θάλασσας», ανατρέξτε στο
άρθρο «Τι συμβαίνει στο σύνορο», στη σελίδα 61.

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

Γνωρίζετε την ανισότητα του Cauchy —τον τύπο που απέδειξε το 1821 ο μεγάλος γάλλος μαθηματικός Augustin Louis Cauchy; Παρότι μπορεί «να πάνετε πουλιά στον αέρα» —οπότε πιθανόν να ξέρετε τον ζητούμενο τύπο—, πόσες αποδείξεις του γνωρίζετε; (Προσέξτε, γιατί «το έξυπνο πουλί από τη μύτη πιάνεται».) Στο παρόν τεύχος λοιπόν σάς παρουσιάζουμε τρία άρθρα με κοινό θέμα τις ανισότητες: «Το άθροισμα των ελαχίστων και το ελάχιστο των αθροισμάτων», «Ο Cauchy και η τέλεια επαγωγή» και «Απειροστικός λογισμός και ανισότητες». Διαβάστε τα προσεκτικά μη φοβηθείτε ότι θα καταλήξετε να «βλέπετε πουλάκια».

ΑΡΘΡΑ

- 6 Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή
Ροή και μονιμότητα**
V. Novikov
- 12 Φτιάξτε το μόνος σου
Πώς γεννιέται ένα πρόβλημα**
I. Sharygin
- 22 Ακραίες συνθήκες
Η φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών**
A. Buzdin και V. Tugushev
- 42 Γόρδιος δεσμός
Συνεστραμμένοι δάκτυλοι**
S. Matveyev

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Τρεις όψεις της εξέλιξης
- 5 Σπαζοκεφαλίες**
- 31 Με λίγη φαντασία**
Μαθαίνοντας να σκεφτόμαστε
- 36 Καλειδοσκόπιο**
Διηλεκτρικός υλισμός
- 38 Απόψεις**
Τις αγορεύειν βούλεται;
- 41 Πώς λύνεται;**
- 48 Στο μαυροπίνακα I**
Το άθροισμα των ελαχίστων και το ελάχιστο των αθροισμάτων
- 52 Στο μαυροπίνακα II**
O Cauchy και η τέλεια επαγωγή
- 53 Στο μαυροπίνακα III**
Απειροστικός λογισμός και ανισότητες
- 56 Στα πεδία της φυσικής**
Μια καλή θεωρία
- 61 Στο εργαστήριο**
Τι συμβαίνει στο σύνορο
- 64 Αναδρομές**
Η τριγωνομετρία του Πτολεμαίου
- 67 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**

Τρεις όψεις της εξέλιξης

Τι δεν είναι η εξέλιξη

Από όλες τις θεμελιώδεις έννοιες των επιστημών της ζωής, η εξέλιξη είναι η σημαντικότερη αλλά και η περισσότερο παρεξηγημένη. Εφόσον κατανοούμε πολύ καλύτερα ένα πεδίο προσδιορίζοντας τι δεν είναι και τι δεν μας προσφέρει, θα μπορούσαμε κι εμείς να ξεκινήσουμε με κάποιες αρνήσεις, δεχόμενοι για την επιστήμη (αυτή που στηρίζεται στο πείραμα και την παρατήρηση) ό,τι ο G.K. Chesterton θεωρούσε εξόχως σημαντικό στις ανθρωπιστικές σπουδές: «Η τέχνη συνιστά περιορισμό· η ουσία κάθε ζωγραφικού πίνακα βρίσκεται στην κορνίζα.»

Κατά πρώτον, ούτε η εξέλιξη ούτε καμία άλλη επιστήμη μπορεί να προσεγγίσει το θέμα της απώτατης προέλευσης ή των ηθικών νοημάτων. (Η επιστήμη, ως εγχείρημα, προσπαθεί να ανακαλύψει και να εξηγήσει τα φαινόμενα και τις κανονικότητες του εμπειρικού κόσμου, υπό την προϋπόθεση πως οι φυσικοί νόμοι διατηρούνται «ομοιόμορφοι» στο χώρο και το χρόνο. Αυτός ο περιορισμός εντάσσει στον «πίνακα» έναν απέραντο γοητευτικό κόσμο· τα περισσότερα θέματα που κατ' αυτό τον τρόπο εκτοπίζονται στην «κορνίζα» παραμένουν σε κάθε περίπτωση αναπάντητα.) Έτσι, η εξέλιξη δεν είναι η μελέτη της απώτατης προέλευσης της ζωής στο σύμπαν ούτε η αναζήτηση της εσώτερης σημασίας της ζωής μεταξύ των άλλων αντικει-

«Εφθάσαμε έτσι λίγο λίγο στη γυμνότητα,
ένα ένα αποδυθήκαμε τα
περίφημα προβλήματα,
τα πολύχρωμα, τα βύσσινα,
τα πορφυρά των γοητειών,
και μόνον τώρα, μολονότι
κάποιος φόβος κι από πριν,
κάποιο προμήνυμα, μας
έλεγαν τι μας προσμένει,
όμως, μονάχα τώρα,
οι γυμνωμένοι
είδαμεν, ότι χους εσμέν.
Άθλιας επίγνωση σοφίας.
Ενδεια σημερινή.
Βραδύνοια του χθες.
Δουλειά μας τώρα να την
αναγάγομε σε θρίαμβο.»

—Τάκης Παπατσώνης

μένων της φύσης: αυτά τα ερωτήματα παραμένουν φιλοσοφικά (ή θεολογικά) και δεν ανήκουν στην επικράτεια της επιστήμης. Το ζήτημα είναι σημαντικό, διότι αυτοί που υποστηρίζουν με ζήλο το φονταρενταλισμό, οι οποίοι υποκριτικά αυτοαποκαλούνται «επιστημονικοί δημιουργηστές», ισχυρίζονται πως η δημιουργία πρέπει να εξισωθεί με την εξέλιξη και να της δοθεί «ίσος χρόνος διδασκαλίας» στα σχολεία, επειδή και οι δύο είναι εξίσου «θρησκευτικές» όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν το απόλυτο άγνωστο. Στην πραγματικότητα, η εξέλιξη δεν ασχολείται καν με τέτοια θέματα, και επομένως είναι φανερό

ότι παραμένει άκρως επιστημονική.

Κατά δεύτερον, η εξέλιξη επιβαρύνεται με ένα σύνολο ιδεών και νοημάτων το οποίο αντιπροσωπεύει τις από μακρού υφιστάμενες κοινωνικές προκαταλήψεις και ψυχολογικές χιμαρίες της Δύστης, αντί να λαμβάνεται υπόψη η πραγματικότητα της φύσης. Ένα τέτοιο βάρος μοιάζει αναπόφευκτο για οποιοδήποτε πεδίο συνδέεται στενά με τις ανθρώπινες υποθέσεις (βλ. το τρίτο μέρος αυτής της ανάλυσης), ωστόσο τούτη η ισχυρή κοινωνική επίστρωση δεν μας επέτρεψε να ολοκληρώσουμε την επανάσταση του Δαρβίνου.

Πιο περιοριστική και επιζήμια μεταξύ των εν λόγω προκαταλήψεων είναι η έννοια της προόδου, η ιδέα ότι η εξέλιξη κατέχει μια κινητήρια δύναμη ή ότι εκδηλώνει μια κυρίαρχη τάση προς την αυξανόμενη πολυπλοκότητα, τον καλύτερο βιο-μηχανικό σχεδιασμό, τους πολ ανεπτυγμένους εγκεφάλους ή και μερικούς άλλους παρωχημένους ορισμούς της προόδου που εστιάζονται στην πρωτιάνια ανθρώπινη επιθυμία να τοποθετήσουμε τον εαυτό μας στην κορυφή των δημιουργημάτων της φύσης —και με αυτό τον τρόπο να στρέφουμε το «φυσικό» μας δικαίωμα να κυβερνάμε και να εκμεταλλεύμαστε τον πλανήτη μας.

Εξέλιξη, σύμφωνα με τη διατύπωση του Δαρβίνου, σημαίνει προσαρμογή στα μεταβαλλόμενα τοπικά περιβάλλοντα και όχι οικουμενική «πρόοδο». Μια γενεαλογική γραμμή

ελεφάντων οι οποίοι εξέλιξαν πυκνότερο τρίχωμα για να καταλήξουν σε δασύμαλλα μαμούθ καθώς αύξανε το δριμύ ψύχος και πλήθαιναν τα στρώματα πάγου, δεν οδήγησε στη δημιουργία ενός ανώτερου —με τη γενική έννοια— ελέφαντα, αλλά σε αυτή ενός ζώου καλύτερα προσαρμοσμένου στις τοπικές κλιματολογικές συνθήκες του αυξανόμενου ψύχους.

Για κάθε είδος που γίνεται ολοένα και πιο πολύπλοκο ώστε να προσαρμοστεί στο δικό του περιβάλλον, πρέπει να λάβουμε υπόψη τα παράσιτα (συχνά πολλά ειδη τους) τα οποία ζουν μέσα στο σώμα των ατόμων που το συνιστούν. Και αυτό επειδή τα παράσιτα, ενώ είναι ανατομικώς απλούστερα απ' ό,τι οι πρόγονοί τους που ζούσαν ελεύθεροι, είναι πολύ καλά προσαρμοσμένα στο εσωτερικό περιβάλλον του ξενιστή τους καθώς αυτός εξελίσσεται ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες που προκύπτουν από το εξωτερικό περιβάλλον.

Τι είναι η εξέλιξη

Στη λιτή και ξεκάθαρη διατύπωσή της, η εξέλιξη αποτελεί μια απλή ιδέα με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Για να διατυπώσουμε έναν σαφή και ακριβή ορισμό της, θα πρέπει να αναφερθούμε σε δύο συνδεόμενους τομείς που αποτελούν και τους δύο κύριους κλάδους της φυσικής ιστορίας: την ταξινομία (δηλαδή, τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ των διάφορων οργανισμών) και την παλαιοντολογία (δηλαδή, την ιστορία των οργανισμών που ζήσαν σε παλαιότερες περιόδους). Εξέλιξη, λοιπόν, σημαίνει (1) ότι όλοι οι οργανισμοί συνδέονται μεταξύ τους με γενεαλογικούς δεσμούς ή κατάγονται από κοινό πρόγονο διαμέσου των κλάδων του δέντρου της ζωής, και (2) ότι αυτές οι γενεαλογικές γραμμές μεταβάλλουν τη μορφή και την ποικιλομορφία τους με το πέρασμα του χρόνου, μέσω μιας φυσικής διαδικασίας αλλαγής —σύμφωνα με τον Δαρβίνο, την «καταγωγή μέσω τροποποίησης». Αυτή η απλή αλλά ουσιαστική αντίληψη απαντά άμεσα στο επί αιώνες καίριο βιολογικό ερώτημα: Ποια είναι η βάση του «φυ-

σικού συστήματος» των σχέσεων μεταξύ των οργανισμών (οι γάτες σχετίζονται περισσότερο με τους σκύλους απ' ό,τι με τις σαύρες· όλα τα σπονδυλόζωα σχετίζονται περισσότερο αναμεταξύ τους απ' ό,τι με ένα έντομο —γεγονός που προκαλούσε εντύπωση και θεωρούνταν ως κάτι το υπέροχο και το μυστηριώδες, πολύ πριν αιτιολογηθεί από τη θεωρία της εξέλιξης).

Οι προηγούμενες εξηγήσεις υπήρξαν ανεπαρκείς, διότι είτε ήταν αδύνατο να ελεγχθούν (το κάθε είδος πλάστηκε με εντολή του Θεού ώστε οι ταξινομικές σχέσεις να εκφράζουν την ευταξία της θείας σκέψης) είτε θεωρούνταν απόκρυφες και περίπλοκες (τα ειδη ως φυσικές θέσεις —όπως τα χημικά στοιχεία στον περιοδικό πίνακα— που συμβάλλουν στη διευθέτηση της οργανικής ύλης). Η εξήγηση για το φυσικό σύστημα που δίνει η εξέλιξη είναι εξαιρετικά απλή: σχέση ίσον γενεαλογία: οι άνθρωποι μοιάζουν με τους ανθρωποειδείς πιθήκους γιατί έχουν έναν πρόσφατο κοινό πρόγονο. Η τάξη της ταξινομίας αποτελεί το αρχείο της ιστορίας.

Αλλά ο βασικός παράγοντας της γενεαλογίας και της αλλαγής —η καταγωγή μέσω τροποποίησης— δεν επαρκεί για να χαρακτηρίσει την εξέλιξη ως επιστήμη. Διότι η επιστήμη αποσκοπεί (1) στο να καταγράψει και να ανακαλύψει την πραγματική κατάσταση του εμπειρικού κόσμου, και (2) στο να επινοήσει και να ελέγχει τις εξηγήσεις σχετικά με τον τρόπο που λειτουργεί ο κόσμος. Η γενεαλογία και η αλλαγή αντιπροσωπεύουν απλώς τη λύση για τον πρώτο στόχο —μια περιγραφή του γεγονότος της εξέλιξης. Πρέπει επίσης να γνωρίζουμε και τους μηχανισμούς μέσω των οποίων λαμβάνει χώρα η εξελικτική αλλαγή —ο δεύτερος στόχος για την εξήγηση των αιτιών της καταγωγής μέσω τροποποίησης. Ο Δαρβίνος πρότεινε τον πιο γνωστό και καλύτερα τεκμηριωμένο μηχανισμό αλλαγής, μια αρχή την οποία ονόμασε «φυσική επλογή».

Το γεγονός της εξέλιξης είναι τόσο καλά τεκμηριωμένο όσο οποια-

δήποτε άλλη επιστημονική γνώση —τόσο σίγουρο όσο η πεποίθησή μας ότι η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο και όχι το αντίθετο. Ο μηχανισμός της εξέλιξης παραμένει ένα ζήτημα έντονων διενέξεων —και η επιστήμη είναι πιο ζωντανή και πιο γόνιμη όταν εμπλέκεται σε θεμελιακού επιπέδου δημόσιες διαμάχες γύρω από τα αίτια καλά τεκμηριωμένων γεγονότων. Η άποψη του Δαρβίνου για τη φυσική επλογή επιβεβαιώθηκε από άφθονες και κομψές μελέτες ως ένας πανίσχυρος μηχανισμός, ιδιαίτερα όσον αφορά την εξέλιξη των προσαρμογών των οργανισμών στα τοπικά τους περιβάλλοντα —ό,τι ο Δαρβίνος ονόμασε «τελειότητα της δομής και της συμπροσαρμογής που δικαιολογημένα προκαλούν το θαυμασμό μας».

Γιατί πρέπει να μας ενδιαφέρει;

Η ειλικρινέστερη απάντηση σ' αυτό το ερώτημα βρίσκεται στην ανθρώπινη ψυχή, για λόγους στους οποίους δεν μπορώ να εμβαθύνω. Οι φυσικοί δεσμοί καταγωγής μας μας συναρπάζουν: νιώθουμε πως θα κατανοήσουμε καλύτερα τον εαυτό μας, θα μάθουμε ποιοι ουσιαστικά είμαστε αν ανακαλύψουμε τα ίχνη της καταγωγής μας. Ψάχνουμε σε γενεαλογικούς καταλόγους και σε ενοριακά αρχεία: μελετάμε προσεκτικά τα οικογενειακά κειμήλια και αναζητάμε γηραιότερους συγγενείς: και όλα αυτά για να συμπληρώσουμε τα κενά στο γενεαλογικό μας δέντρο.

Η εξέλιξη είναι το ίδιο φαινόμενο αλλά σε ευρύτερη κλίμακα. Αφορά το γενεαλογικό δέντρο των φυλών, των ειδών και των γενεαλογικών γραμμών —όχι μόνο το τοπικό, πρωσιπικό μας επώνυμο. Η εξέλιξη απαντά, όσο αυτό είναι δυνατόν από μια επιστήμη, στα επίμαχα και συναρπαστικά ερωτήματα: «Ποιοι είμαστε;», «Με ποιους άλλους ζωντανούς οργανισμούς συσχετίζομαστε, και πώς?», «Ποια η ιστορία της αλληλεξάρτησης μας με τον φυσικό κόσμο;» και «Γιατί βρισκόμαστε εδώ?».

Πέραν όλων αυτών, πιστεύω πως η σπουδαιότητα της εξέλιξης για την

ανθρώπινη σκέψη αποδίδεται καλύτερα από τη περίφημη δήλωση του Σίγκμουντ Φρόντ, ο οποίος παρατήρησε, με καυστικότητα και ειρωνεία, πώς όλες οι σημαντικές επιστημονικές επαναστάσεις έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: την εκδίωξη της ανθρώπινης υπεροφίας από τα βάθηρα που δημιούργησαν οι προγενέστερες πεποιθήσεις μας σχετικά με τον κυρίαρχο ρόλο μας στο σύμπαν. Ο Φρόντ, λοιπόν, επισήμανε τρεις τέτοιες επαναστάσεις: Αυτή του Κοπέρνικου, σύμφωνα με την οποία ο πλανήτης μας δεν αποτελεί το κέντρο ενός μικρού σύμπαντος αλλά ένα μικροσκοπικό, ελάσσονος σημασίας βραχώδες κομμάτι γης μέσα σ' ένα ασύλληπτο αχανές. Εκείνη του Δαρβίνου, η οποία μας υποβιβάζει στο επίπεδο να καταγόμαστε από το ζωικό βασίλειο. Κι εκείνη του ίδιου του Φρόντ (μια από τις λιγότερο μετριόφρονες απόψεις στην ιστορία των ιδεών μας), για την ανακάλυψη του υποσυνειδήτου και για την ανορθολογικότητα του ανθρώπινου. Τι πιο ταπεινό και, συνεπώς, πιο αποδεσμευτικό της μετάβασης από τη θεώρηση των εαυτών μας ως «λίγο κατώτερων από τους αγγέλους», ως «των διορισμένων κυβερνητών της φύσης», ως «των φτιαγμένων κατ' εικόνα και καθ' ομοίωσιν του Θεού» να κατακτήσουν και να διαπλάσουν τη Γη», στη γνώση πώς δεν είμαστε απλώς φυσικά δημιουργήματα μιας οικουμενικής διαδικασίας καταγωγής μέσω τροποποίησης —και έτσι συγγενείς με όλα τα άλλα όντα—, αλλά κι ένα μικρό, προσφάτως ανθισμένο και εν τέλει εφήμερο κλωνάρι του πολύκλαδου δέντρου της ζωής —και όχι η προκαθορισμένη κορυφή της «κλίμακας της πρόσδου». Κλονίστε την αυτάρεσκη βεβαιότητα και ανάψτε τη φλόγα του νου.

—Stephen Jay Gould

O Stephen Jay Gould, πασίγνωστος εξελικτικός βιολόγος και παλαιοντολόγος, είναι καθηγητής ζωολογίας στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, όπου διδάσκει βιολογία, γεωλογία και ιστορία των φυσικών επιστημών.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Έκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλιπτς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουντάκτης Sergey Ivanov Αντεπιστέλλων Αρχιουντάκτρια Jennifer M. Wang Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχιουντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Yevgeniya Morozova, Αρχιουντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khouri, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λόκειο της Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης / Διευθυντής

Άλεκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Ιωάννα Αποστόλου-βιολόγος, Μαρίνα Λατζόνη-βιολόγος, Γιώργος Μαλάμης-βιολόγος, Γιώργος Κατσιλέρης-φυσικός και Άλεκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επισπομηνούσιοι σύμβουλοι

Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχαίου

Πέτρος Δήμας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Εποτήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γλωσσική επιμέλεια Νίκος Ντάκος	Τυποποιητική επιμέλεια Ηρακλής Ντούσης	Γραμματεία Μαρία Κουρή	Υπεύθυνη λογιστηρίου Μαρία Μάραλη
------------------------------------	---	---------------------------	--------------------------------------

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση Αβ. Μαχαρίδης	Φιλμ, μοντάζ Χρ. Μήτσης	Εκπύλωση Ν. Πουλόπουλος	Βιβλιοδεσία Θ. Αρχοντουλάκης
--	----------------------------	----------------------------	---------------------------------

To *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάποπρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό, ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα Αλ. Μάραλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάποπρο,
Ιοαννίνων 10 και Δαφνούπηλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστήμιο 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ., για ιδιώτες, 21.000 δρχ.
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

Για να περνά η ώρα

Σ206

Τα δαμάσκηνα του πάθους. Τρεις πρίγκιπες προσπαθούσαν να κατακτήσουν την καρδιά της πριγκίπισσας Libusha, της ιδρύτριας του τσέχικου κράτους. Η πριγκίπισσα τους ζήτησε να λύσουν το εξής πρόβλημα: «Αν δώσω τα μισά από τα δαμάσκηνα που υπάρχουν σε αυτό το καλάθι σουν ένα επιπλέον στον έναν πρίγκιπα, τα μισά από τα υπόλοιπα συν ένα ακόμη δαμάσκηνο στον δεύτερο, και τα μισά από τα υπόλοιπα συν τρία ακόμη στον τρίτο, το καλάθι θα μείνει άδειο. Πόσα δαμάσκηνα υπάρχουν στο καλάθι;»



Σ207

Παραλίγο δύο δωδεκάδες. Τοποθετήστε στους κύκλους τους αριθμούς 1 έως 8 ώστε σε κάθε μπλε τρίγωνο το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές του να είναι 12 και το άθροισμα των κορυφών στο κόκκινο τρίγωνο καθώς και το άθροισμα των κορυφών στο κόκκινο τετράγωνο να είναι από 11.



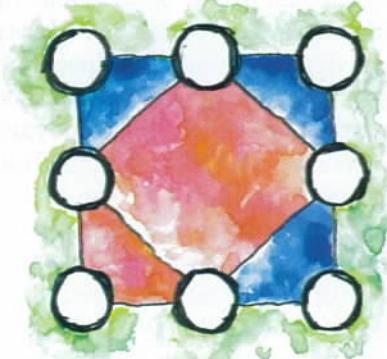
Σ208

Η σκιά του κουταλιού. Το ηλιακό φως ανακλάται στον τοίχο από την επιφάνεια του τσαγιού που υπάρχει σ' ένα φλυτζάνι. Αν πλησιάσουμε κατακόρυφα ένα κουτάλι προς το κέντρο της επιφάνειας του τσαγιού, ποια μορφή θα πάρει η σκιά του μέσα στον φωτεινό κύκλο πάνω στον τοίχο;



Σ207

Ξιφομαχίες σωματοφυλάκων. Ο Άθως, ο Πόρθος, ο Άραμις και ο ντ' Αρτανιάν κατέλαβαν τις τέσσερις πρώτες θέσεις στους βασιλικούς αγώνες ξιφασκίας. Το άθροισμα των θέσεων που κατέλαβαν ο Άθως, ο Πόρθος και ο ντ' Αρτανιάν ήταν 6. Το άθροισμα των θέσεων που κατέλαβαν ο Πόρθος και ο Άραμις ήταν επίσης 6. Ποιες ήταν οι θέσεις κάθε σωματοφύλακα, αν γνωρίζουμε ότι ο Πόρθος είχε καλύτερη θέση από τον Άθω;



Σ209

Αντιστοιχία μπρος μπρος. Λύστε τον επόμενο αλφαριθμητικό γρίφο. Τίδια γράμματα αντιστοιχούν σε ίδια ψηφία και διαφορετικά γράμματα σε διαφορετικά ψηφία.
(Αυτή η σπαζοκεφαλιά προέρχεται από το Αζερμπαϊτζάν, μια από τις δημοκρατίες του Καυκάσου. Στη γλώσσα του Αζερμπαϊτζάν, η λέξη BIR σημαίνει ένα και η DORD τέσσερα.)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 67

Πού και μονιμότητα

Περί της ενέργειας που αποθηκεύεται στα μαγνητικά πεδία

V. Novikov

TO ΓΕΡΟΝΟΣ ΟΤΙ ΣΤΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ πεδία που παράγονται από τα ηλεκτρικά ρεύματα υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια γίνεται εύκολα αντιληπτό αν αναλύσουμε προσεκτικά το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Προς τούτο, θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε ένα πείραμα το οποίο πραγματοποιείται με τη βοήθεια της διάταξης που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Αν μετακινήσουμε το δρομέα μειώνοντας την τιμή της μεταβλητής αντίστασης, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα αυξηθεί. Όσο αυξάνεται η τιμή του ρεύματος, τόσο μεγαλύτερο μαγνητικό πεδίο παράγεται απ' αυτό. Κάθε αύξηση του μαγνητικού πεδίου επιφέρει μια αντίστοιχη αύξηση της μαγνητικής ροής που διαπερνά την επιφάνεια η οποία έχει ως συνοριακή καμπύλη το κύκλωμα. (Το τι ακριβώς μορφή έχει η εν λόγω επιφάνεια μας είναι αδιάφορο, καθότι, δύπως αποδεικνύεται, η μαγνητική ροή είναι ανεξάρτητη από αυτή.) Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, η μετα-

βολή της μαγνητικής ροής δημιουργεί στο κύκλωμα ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής \mathcal{E} , η οποία δίνεται από την έκφραση

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

όπου με $\Delta \Phi$ συμβολίζουμε τη μεταβολή της μαγνητικής ροής στη διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος Δt . Τούτη η ΗΕΔ επάγει ένα πρόσθετο ρεύμα, το οποίο με τη σειρά του παράγει ένα μαγνητικό πεδίο αντίθετης κατεύθυνσης από το αρχικό. Έτσι, η μαγνητική ροή του νεοεμφανισθέντος πεδίου «προσπαθεί» να αντισταθμίσει όποια μεταβολή υπέστη το αρχικό πεδίο· ή, με άλλα λόγια, κάνει ότι μπορεί προκειμένου να διατηρήσει την αρχική τιμή του ρεύματος σταθερή. Για να καταφέρουμε να κάμψουμε την αντίσταση που συναντά η προσπάθεια μας να αυξήσουμε το ρεύμα λόγω αυτού του φαινομένου, χρειάζεται να παραγάγουμε έργο για να υπερνικήσουμε την επαγόμενη ΗΕΔ \mathcal{E} . Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την τιμή τού εν λόγω έργου.

Εάν η αύξηση του ρεύματος από I σε $I + \Delta I$ συνοδεύεται από την εμφάνιση μιας ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής \mathcal{E} , η πηγή ενέργειας (η μπαταρία) παράγει κάποιο έργο για να υπερνικήσει αυτή την ΗΕΔ:

$$\Delta W = -\mathcal{E} I \Delta t.$$

Εισάγοντας την έκφραση (1) για την ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής στην ανωτέρω εξίσωση, παίρνουμε:

$$\Delta W = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} I \Delta t = I \Delta \Phi. \quad (2)$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε, επιβάλλεται τώρα να υπενθυμίσουμε ότι κάθε κύκλωμα μπορεί να χαρακτηριστεί μέσω μιας ορισμένης σταθεράς L , η οποία ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής (ή απλώς αυτεπαγωγή) και μετριέται σε henry. Η εν λόγω σταθερά είναι ο συντελεστής αναλογίας στην εξίσωση που συνδέει τη μαγνητική ροή Φ με το ρεύμα I το οποίο παράγει τη συγκεκριμένη ροή:

$$\Phi = LI. \quad (3)$$

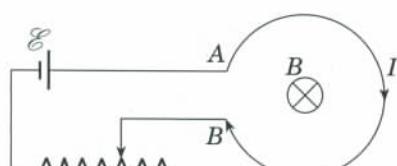
Άρα, όταν το ρεύμα αυξάνεται κατά ΔI , η μαγνητική ροή θα αυξάνεται κατά

$$\Delta \Phi = L \Delta I. \quad (4)$$

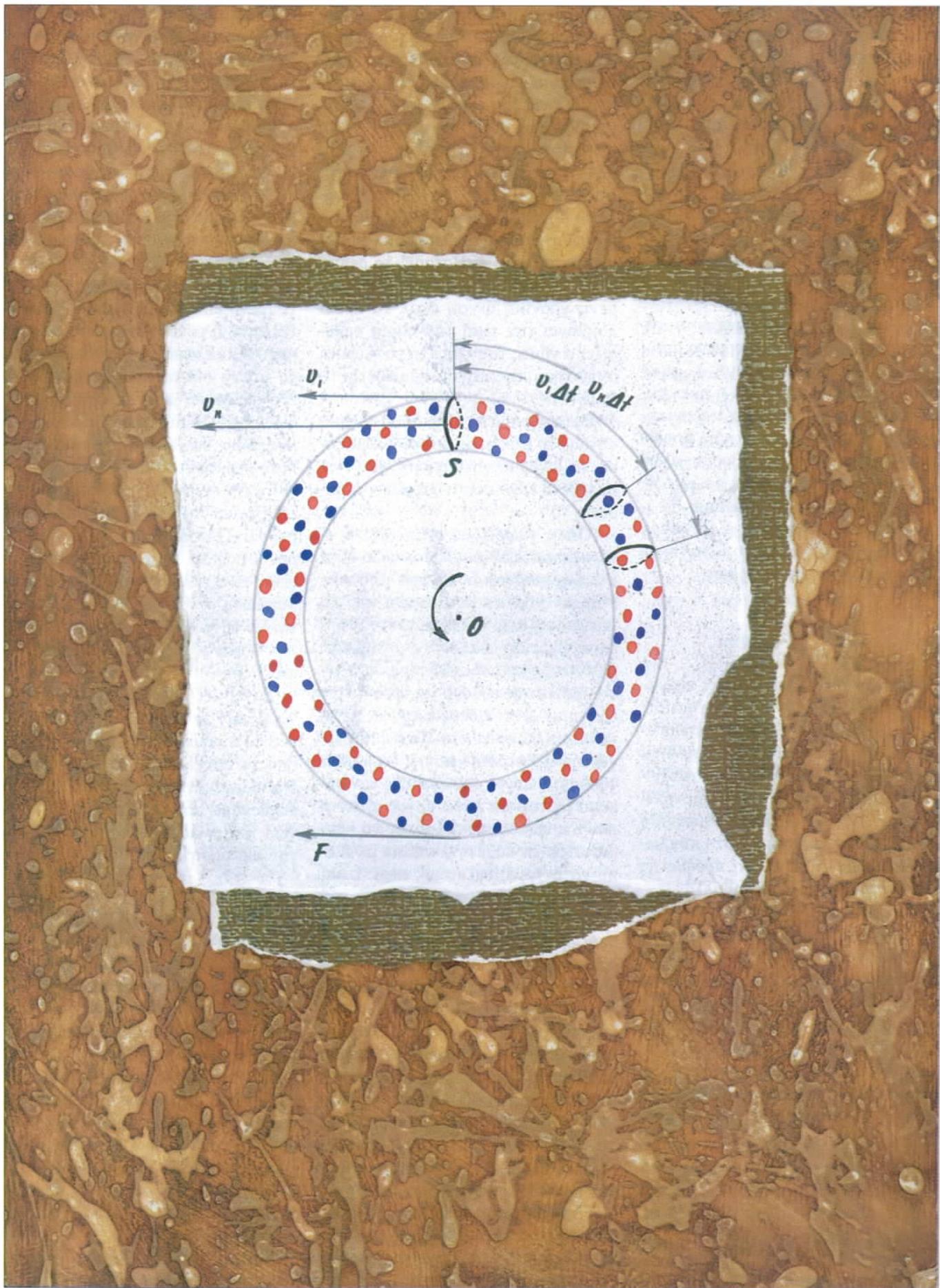
Συνεπώς, η εξίσωση (2) για το έργο μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

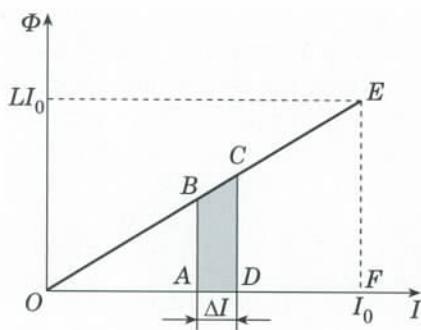
$$\Delta W = LI \Delta I = \Phi \Delta I. \quad (5)$$

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της μαγνητικής ροής Φ συναρτήσει του ρεύματος I . Προφανώς, το έργο ΔW ισούται με το εμ-



Σχήμα 1





Σχήμα 2

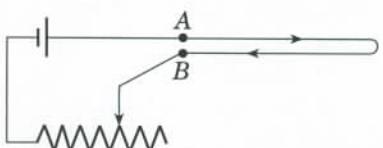
βαδόν του τραπεζίου $ABCD$.

Αν το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μεταβληθεί αυξανόμενο από $I = 0$ ως κάποια τελική τιμή I_0 , το ολικό έργο W που παράγει η ηλεκτρική πηγή προκειμένου να υπερνικήσει την ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής μπορεί να υπολογιστεί με την άθροιση όλων των στοιχειώδων συνεισφορών ΔW . Το αποτέλεσμα της άθροισης θα ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου OEF (Σχήμα 2), οπότε το ολικό έργο W δίνεται από την έκφραση:

$$W = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (6)$$

Προτού οδηγηθούμε στην εξαγωγή οποιωνδήποτε συμπερασμάτων σχετικά με την ενέργεια η οπία υπάρχει αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργήθηκε στο χώρο του κυκλώματος, οφείλουμε πρώτα να ελέγχουμε μήπως η εμφάνιση της ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής στο κύκλωμα προκαλεί την έκλυση πρόσθετης θερμότητας προς το περιβάλλον.

Φανταστείτε λοιπόν ότι, προτού να ξεκινήσουμε το πείραμά μας, παραμορφώνουμε το κύκλωμα έτσι ώστε το εμβαδόν του να γίνει ίσο με μηδέν (Σχήμα 3). Σε τούτη την απλή περίπτωση, δεν εμφανίζεται ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής όσο το ρεύμα αυξάνεται από μηδέν σε I_0 . Η αντίσταση του παραμορφωμένου κυκλώματος παραμένει η ίδια, και έτσι εκλύεται εδώ η



Σχήμα 3

ιδια ποσότητας θερμότητας όπως και στο αρχικό κύκλωμα. Φυσικά, ο ισχυρισμός μας αλληθεύει μόνο εφόσον το ρεύμα αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό και στις δύο περιπτώσεις. Επ' ευκαιρία, υπενθυμίζω ότι στο πρώτο πείραμα αυξάνεται την τιμή του ρεύματος (μετακινώντας την επαφή έτσι ώστε να μειώνεται η αντίσταση) αρκετά αργά, οπότε για κάθε συγκεκριμένη τιμή της R_t που επλεγόταν στη μεταβλητή αντίσταση, το ρεύμα είχε στη διάθεσή του την απαιτούμενη χρονική άνεση ώστε να προσλαμβάνει την τιμή την οποία καθορίζει ο νόμος του Ohm (η εσωτερική αντίσταση της πηγής υποτίθεται αμελητέα).

Κατά συνέπεια, η έκλυση θερμότητας στο κύκλωμα δεν εξαρτάται από το αν η πηγή παράγει ή όχι το πρόσθετο έργο που περιγράφει η εξισώση (6).

Όπως γνωρίζουν οι πάντες, η ενέργεια ούτε εξαφανίζεται αλλά ούτε και δημιουργείται εκ του μηδενός. Μπορεί μόνο να μετατραπεί από τη μία μορφή στην άλλη. Εφόσον η αύξηση της ενέργειας ενός συστήματος ισούται με το παραχθέν έργο, φαίνεται απολύτως εύλογο να θέσουμε το ερώτημα: Σε τι είδους ενέργεια μετατράπηκε το πρόσθετο ηλεκτρικό έργο της ηλεκτρικής πηγής (της μπαταρίας); Ο λόγος που επέβαλε την παραγωγή τού εν λόγω έργου ήταν η ικανότητα του κυκλώματος να «ανθίσταται» σε κάθε προσπάθεια με σκοπό να μεταβληθεί (στην περίπτωσή μας, να αυξηθεί) η μαγνητική ροή που διαπερνά την επιφάνεια την οποία ορίζει το κύκλωμα. Ως εκ τούτου, την ενέργεια στην οποία μετατράπηκε το παραχθέν έργο είναι φυσικό να την ονομάζουμε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του ρευματοφόρου κυκλώματος. Για να πειστούμε, θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε ένα πείραμα που να επιδεικνύει πώς η αποθηκευμένη μαγνητική ενέργεια μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας (φερ' επειν', σε θερμότητα).

Για να ξεκαθαρίσουμε, λοιπόν, οριστικά τούτο το ζήτημα, ας θεωρήσουμε ότι τα σημεία A και B των κυκλώματων μας βραχυκυκλώνονται ακαριαία. Αυτομάτως, η διαφορά δυ-

ναμικού μεταξύ των σημείων A και B την οποία δημιουργούσε η εξωτερική πηγή ρεύματος θα μηδενιστεί. Στο παραμορφωμένο κύκλωμα, το ρεύμα διακόπτεται αυτοστιγμένο. Στο αρχικό κύκλωμα, ωστόσο, το ρεύμα δεν είναι δυνατόν να εξαφανιστεί διαμικά επειδή, σύμφωνα με το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, κάθε μεταβολή του ρεύματος (στην προκειμένη περίπτωση, μείωση) παράγει ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής η οποία «προσπαθεί» να διατηρήσει το προηγούμενο επίπεδο ρεύματος. Ως αποτέλεσμα, η μείωση του ρεύματος στο αρχικό κύκλωμα από την τιμή I_0 έως το μηδέν συντελείται βαθμηδόν σε ένα ορισμένο, μη μηδενικό, χρονικό διάστημα. Σ' αυτή τη διάρκεια, στο κύκλωμα θα εκλυθεί κάποια ποσότητα θερμότητας «δαπάναις» της μαγνητικής ενέργειας που βρίσκεται «αποθηκευμένη» στο χώρο του κυκλώματος. (Προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας ότι η ποσότητα της ενέργειας που εκλύεται μετά τη βραχυκύκλωση των σημείων A και B ισούται με τη μαγνητική ενέργεια $LI_0^2/2$ την οποία είχε συσσωρεύσει τότε το κύκλωμα).

Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ρεύμα I το οποίο διαρρέει το κύκλωμα που χαρακτηρίζεται από το συντελεστή αυτεπαγωγής L δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο στο χώρο γύρω από το κύκλωμα. Η ενέργεια του εν λόγω πεδίου δίνεται από την έκφραση:

$$U_\mu = \frac{LI^2}{2}. \quad (7)$$

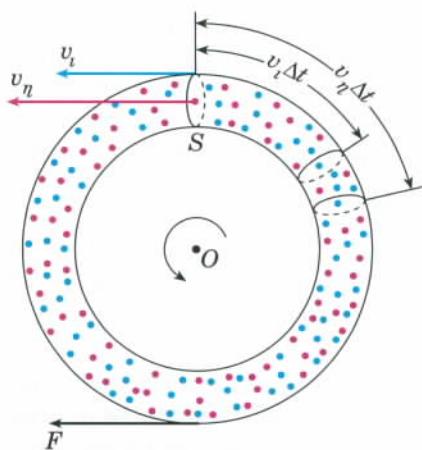
Το πείραμά μας αναφέρεται στην περίπτωση όπου η ενέργεια του παραγόμενου από το ρεύμα μαγνητικού πεδίου παρέχεται από μια εξωτερική πηγή ηλεκτρικής ενέργειας (από μια μπαταρία). Μολατάντα, η ενέργεια του πεδίου προφανώς δεν μπορεί να εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο δημιουργήθηκε το πεδίο, ακριβώς όπως και η κινητική ενέργεια ενός σώματος δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο προσδόθηκε στο σώμα η ταχύτητά του.

Για να διασαφήνισουμε τελείως τούτο το σημείο, ας θεωρήσουμε ένα

ακόμη διαφωτιστικό παράδειγμα, το οποίο δείχνει πώς μπορούμε να μετατρέψουμε άμεσα την κινητική ενέργεια ενός σώματος σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου. Επιπλέον, το συγκεκριμένο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το μηχανισμό μέσω του οποίου παράγεται το μαγνητικό πεδίο από το ρεύμα στο «μικροσκοπικό επίπεδο». Λέγοντας «μικροσκοπικό επίπεδο», εννοούμε ότι θα αναγάγουμε το ηλεκτρικό ρεύμα, μια κατεξοχήν μακροσκοπική έννοια, στην κίνηση των ηλεκτρονίων και των ιόντων, και θα το περιγράψουμε αναλύοντας τις εξισώσεις που διέπουν την κίνηση αυτή.

Ας θεωρήσουμε έναν μεταλλικό δακτύλιο του οποίου η περιφέρεια έχει μήκος l και ο οποίος περιστρέφεται ομαλά γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του και διερχόμενο από το κέντρο του (Σχήμα 4). Ο δακτύλιος υποτίθεται αρκετά λεπτός ώστε η γραμμική ταχύτητα όλων των μερών του να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με v_0 . Από τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο δακτύλιο αρχίζει να δρα μια σταθερή εφαπτομενική δύναμη πέδησης F , οπότε μετά την πάροδο ορισμένου χρόνου ο δακτύλιος παύει να περιστρέφεται. Ωστόσο, εκτός από τη διακοπή της περιστροφής, η δύναμη F προκαλεί ένα ακόμη αποτέλεσμα.

Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, το ρεύμα που διαρρέει το δακτύλιο θα παρουσιάσει αύξηση. Ας θυμηθούμε σε αδρές γραμμές τι είδους δομή έχουν τα μέταλλα όταν βρίσκονται στη στερεά κατάσταση. Τα άτομα βρίσκονται ιονισμένα στους κόμβους του κρυσταλλικού πλέγματος, όπου ταλαντώνονται ελαφρώς γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους. Το κρυσταλλικό πλέγμα εμφανίζεται τρόπον τινά ως ο στερεός σκελετός του με-



Σχήμα 5

ταλλικού σώματος. Σε αντίθεση με τα ιόντα, τα (ελεύθερα) ηλεκτρόνια αγωγιμότητας μπορούν να κινούνται ελεύθερα ανάμεσα στους κόμβους του πλέγματος, σχηματίζοντας ένα είδος «ηλεκτρονικού αερίου».

Ας επιστρέψουμε τώρα στον μεταλλικό μας δακτύλιο. Μπορούμε να τον φανταστούμε ως αποτελούμενο από δύο δακτυλίους, τον έναν μέσα στον άλλο, όπως τον απεικονίζει το Σχήμα 5. Στο εν λόγω σχήμα, το κρυσταλλικό πλέγμα έχει χρωματιστεί μπλε, ενώ με κόκκινο παριστάνεται το ηλεκτρονικό αέριο.

Αρχικά, όταν ο δακτύλιος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, στην κίνηση του συμμετέχει τόσο το πλέγμα όσο και το ηλεκτρονικό αέριο. Η δύναμη πέδησης F , ωστόσο, εφαρμόζεται μόνο στον στερεό σκελετό και όχι στα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Το ηλεκτρονικό αέριο θα επιβραδύνει μόνο εξαιτίας της αλληλεπίδρασής του με τα ιόντα του πλέγματος. Πρόκειται ακριβώς για την ίδια εκείνη διαδικασία που υπόκειται της ηλεκτρικής αντίστασης του μετάλλου. Χάριν απλότητος, μπορούμε να παραβλέψουμε τούτη την αλληλεπίδραση, προχωρώντας όπως εάν, για παράδειγμα, το μέταλλο είχε ψυχθεί σε μια εξαιρετικά χαμηλή θερμοκρασία —όπου τα μέταλλα χάνουν την ιδιότητα της ηλεκτρικής αντίστασης και μετατρέπονται σε υπεραγωγούς.

Συνεπώς, τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας θα προσπερνούν το κρυσταλλικό πλέγμα όσο ο δακτύλιος θα επι-

βραδύνεται. Αυτή η διαφορά ταχύτητας ανάμεσα στα ιόντα και τα ηλεκτρόνια ισοδυναμεί με την εμφάνιση ενός ρεύματος. Έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την τιμή του.

Ας συμβολίσουμε με v_i την ταχύτητα των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος και με v_η την ταχύτητα της κατευθυντικής κίνησης των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας. Το ολικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του δακτυλίου κατά τη διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος Δt συνίσταται από το φορτίο του κρυσταλλικού πλέγματος που εμπειρέχεται σε ένα τόξο μήκους $v_i \Delta t$ (βλ. Σχήμα 5). Αν το ολικό φορτίο όλων των ιόντων που συνεισφέρει στο ηλεκτρονικό νέφος τα ηλεκτρόνια τους ισούται με Q , τότε το ολικό φορτίο των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας θα ανέρχεται σε $-Q$, καθότι συνολικά ο δακτύλιος είναι ηλεκτρικά ουδέτερος. Κατά συνέπεια, τα αντίστοιχα τόξα περιέχουν φορτία ίσα με

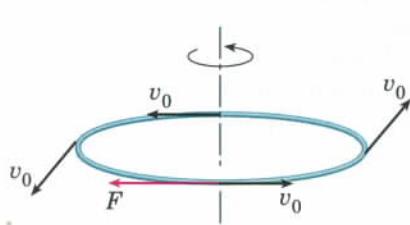
$$Q \frac{v_i \Delta t}{l} \text{ και } -Q \frac{v_\eta \Delta t}{l},$$

όπου με l συμβολίζουμε το μήκος της περιφέρειας του δακτυλίου. Τώρα μπορούμε να βρούμε την ολική ποσότητα του φορτίου που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από μια διατομή του μεταλλικού δακτυλίου:

$$I = \frac{1}{\Delta t} \left(Q \frac{v_i \Delta t}{l} - Q \frac{v_\eta \Delta t}{l} \right) \\ = \frac{Q}{l} (v_i - v_\eta). \quad (8)$$

Στην ανάλυσή μας αγνοήσαμε την άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Κατά τη διαδικασία πέδησης, εντούτοις, έρχονται στο προσκήνιο άλλες δυνάμεις, οι οποίες θα επιβραδύνουν τα ηλεκτρόνια ακόμη και σε ένα υπεραγωγό μοδό δακτύλιο. Πρόκειται για τις δυνάμεις οι οποίες παράγονται από το στροβιλό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ως γνωστόν, η εμφάνιση ρεύματος στο δακτύλιο συνοδεύεται αναγκαστικά από τη δημιουργία ενός μαγνη-



Σχήμα 4

τικού πεδίου. Εφόσον η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται, το εν λόγω μαγνητικό πεδίο δεν παραμένει σταθερό. Ως εκ τούτου, στο δακτύλιο επάγεται ένα στροβιλό ηλεκτρικό πεδίο. Λόγω της παρουσίας αυτού του πεδίου, στα ηλεκτρόνια και στα ιόντα ασκούνται δυνάμεις οι οποίες ανθίστανται σε κάθε μεταβολή του ρεύματος. Με άλλα λόγια, οι συγκεκριμένες δυνάμεις τείνουν να μειώνουν τη σχετική ταχύτητα των ηλεκτρονίων και των ιόντων (βλέπε εξισωση (8)). Συνεπώς, αφενός μεν επιβραδύνουν τα ηλεκτρόνια, αφετέρου δε επιταχύνουν τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Το έργο που παράγουν αυτές οι δυνάμεις καθώς μετατοπίζουν κατά μήκος του δακτύλιου ένα μοναδιαίο φορτίο κατά μήκος του δακτύλιου ισούται με την ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής ($El = \mathcal{E}$), μπορούμε να γράψουμε:

$$M\gamma_i = QE - F, \quad m\gamma_\eta = -QE, \quad (9)$$

όπου το E δηλώνει την ένταση του στροβιλού ηλεκτρικού πεδίου, την οποία θα υπολογίσουμε ευθύς αμέσως.

Δεδομένου ότι το έργο που παράγει το στροβιλό πεδίο για να μεταπούσει ένα μοναδιαίο φορτίο κατά μήκος του δακτύλιου ισούται με την ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής ($El = \mathcal{E}$), μπορούμε να γράψουμε:

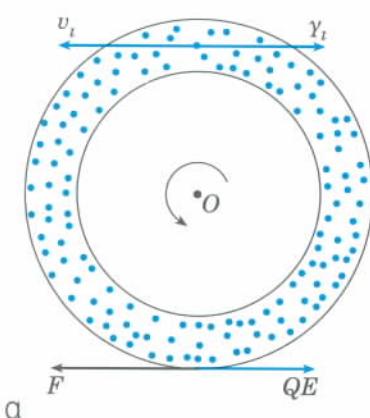
$$\begin{aligned} E &= \frac{\mathcal{E}}{l} = -\frac{1}{l} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \\ &= -\frac{L \Delta I}{l \Delta t} = -\frac{QL}{l^2} \left(\frac{\Delta v_i}{\Delta t} - \frac{\Delta v_\eta}{\Delta t} \right) \\ &= -\frac{QL}{l^2} (\gamma_i - \gamma_\eta). \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια αυτού του αποτελέσματος, οι εξισώσεις (9) που περιγράφουν την κίνηση του κρυσταλλικού πλέγματος και του ηλεκτρονικού αερίου μετασχηματίζονται ως εξής:

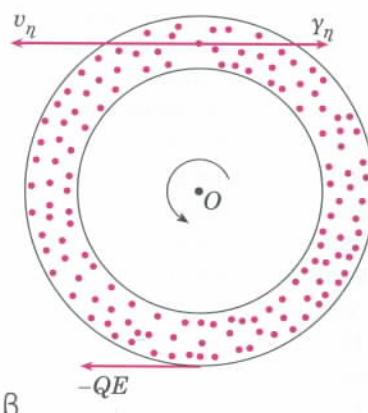
$$\begin{aligned} M\gamma_i &= -\mu(\gamma_i - \gamma_\eta) - F, \\ m\gamma_\eta &= \mu(\gamma_i - \gamma_\eta), \end{aligned} \quad (10)$$

όπου για τη διευκόλυνσή μας εισαγάγαμε την παράμετρο

$$\mu = \frac{Q^2 L}{l^2}.$$



Σχήμα 6



Επιλύοντας το σύστημα (10) ως προς γ_i και γ_η , βρίσκουμε τις εκφράσεις που δίνουν την επιτάχυνση των δακτυλίων:

$$\gamma_i = -\frac{F}{M + \frac{m\mu}{m + \mu}},$$

$$\gamma_\eta = \frac{\mu}{m + \mu} \gamma_i. \quad (11)$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι τόσο το κρυσταλλικό πλέγμα όσο και το ηλεκτρονικό νέφος επιβραδύνονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας πέδησης.

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (11), μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το χρόνο που θα περάσει από την έναρξη της διαδικασίας πέδησης έως την πλήρη ακινητοποίηση του κρυσταλλικού πλέγματος:

$$t = -\frac{v_0}{\gamma_i} = \frac{v_0}{F} \left(M + \frac{m\mu}{m + \mu} \right). \quad (12)$$

Τώρα, είναι εύκολο να βρούμε την ταχύτητα $v_\eta = v$ που θα έχουν τα ηλεκτρόνια όταν θα ολοκληρωθεί η πέδηση για το πλέγμα:

$$v = v_0 + \gamma_i t = \frac{m}{m + \mu} v_0. \quad (13)$$

Έτσι, η τελική τιμή του ρεύματος που διαρρέει το δακτύλιο (για $v_\eta = v$, $v_i = 0$) δίνεται από την έκφραση

$$I = -\frac{Q}{l} v = -\frac{Q}{l} \frac{m}{m + \mu} v_0. \quad (14)$$

Ας επιστρέψουμε, λοιπόν, στο πρόβλημα το οποίο θέσαμε παραπάνω και ας προσδιορίσουμε την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από το ρεύμα επαγόμενο κατά την πέδηση του δακτύλιου. Εν προκειμένω, θα μας φανεί βολικό να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Αρχικά ($t = 0$), όλη η ενέργεια του δακτύλιου αποτελούνταν από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και του κρυσταλλικού πλέγματος —δηλαδή,

$$U_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv_0^2}{2}.$$

Κατά την πέδηση, ένα μέρος της ενέργειας απωλέσθηκε καταναλισκόμενο από τη δύναμη F . Προφανώς, αυτή η «απώλεια» ενέργειας ισούται με $\Delta U = W = Fs$, όπου s η απόσταση την οποία διήνυσε ο ποιοδήποτε σημείο του δακτυλίου (του κρυσταλλικού πλέγματος) κατά την πέδηση:

$$s = v_0 t + \frac{\gamma_i t^2}{2}$$

$$= \frac{v_0^2}{2F} \left(M + \frac{m\mu}{m + \mu} \right).$$

Συνεπώς,

$$W = \frac{v_0^2}{2} \left(M + \frac{m\mu}{m + \mu} \right).$$

Το ρεύμα που εμφανίζεται στο δακτύλιο κατά τη διάρκεια της πέδησης παράγει το μαγνητικό πεδίο. Κατά συνέπεια, στο τέλος του χρόνου πέδησης, όταν η ταχύτητα του κρυσταλλικού πλέγματος μηδενίζεται, η ενέργεια του δακτυλίου συνίσταται αφενός από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων

$$K_\eta = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{m}{m + \mu} \right)^2$$

και αφετέρου από την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου U_μ . Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, πρέπει να ισχύει

$$U_0 = K_\eta + U_\mu + W,$$

οπότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$U_\mu = U_0 - W - K_\eta$$

$$= \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \left(M + \frac{m\mu}{m + \mu} \right)$$

$$- \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{m}{m + \mu} \right)^2$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} \frac{m\mu}{(m + \mu)^2}. \quad (15)$$

Εισάγοντας την τιμή της παραμέτρου μ στην ανωτέρω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{mv_0}{m + \mu} = -I \frac{l}{Q}$$

(βλ. εξίσωση (14)), βρίσκουμε:

$$U_\mu = I^2 \frac{l^2}{Q^2} \frac{Q^2 L}{2l^2} = \frac{LI^2}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε και πάλι στην εξίσωση που εξαγάγαμε νωρίτερα για την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου σε κύκλωμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

Εν κατακλειδί, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η εξιρετικά ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του φαινομένου που μας απασχόλησε στο παρόν άρθρο. Όπως γνωρίζουμε, ο αριθμητικός μέσος δύο θετικών αριθμών αποκλείεται να είναι μικρότερος του γεωμετρικού τους μέσου —δηλαδή ισχύει η ανισότητα $m + \mu \geq 2\sqrt{m\mu}$ συνεπώς,

$$\frac{m\mu}{(m + \mu)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Οπότε, από την εξίσωση (15) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$U_\mu \leq \frac{1}{4} \frac{mv_0^2}{2}.$$

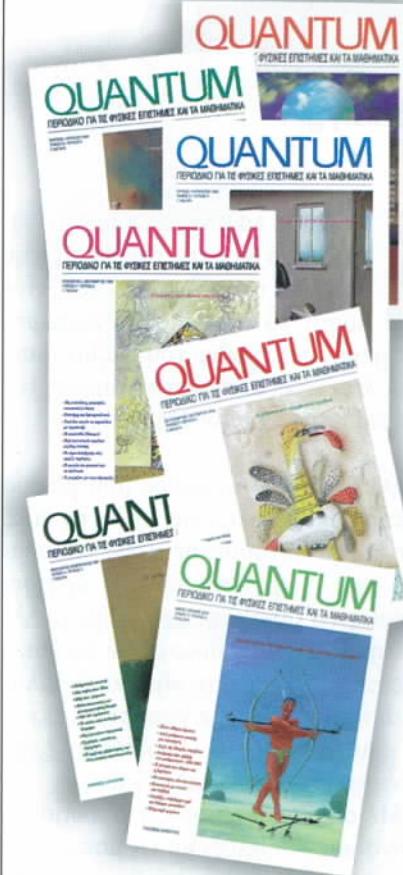
Άρα, από την αρχική κινητική ενέργεια της κατευθυντικής κίνησης των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας, μόλις το 25% μπορεί να μετατραπεί σε μαγνητική ενέργεια μέσω της πέδησης του περιστρεφόμενου κυκλώματος. Αξίζει δε να επισημάνουμε ότι ο περιορισμός αυτός δεν εξαρτάται από το συντελεστή αυτεπαγωγής L του κυκλώματος. \square

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- S. Eatman, F. Muir και H. Hickman, «Το φλογικό και το μαγνητικό πεδίο», Μάιος/Ιούνιος 1994.
- J. Wylie, «Μαγνητικό μονοπόλιο», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.
- A. Stasenko, «Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.
- A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο?», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.
- D. Tselykh, «Το μαγνητικό πεδίο», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.
- A. Stasenko, «Ένας περιστρεφόμενος πυκνωτής», Ιούλιος/Αύγουστος 1999.
- V. Kartsev, «Oersted: μια μαγνητική προσωπικότητα», Ιούλιος/Αύγουστος 1999.

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To *Quantum* διανύει τον όγδοο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί οκτώ χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση, αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει σαράντα δύο τεύχη του. Αυτά, για δύο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχων.

Το *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου.

Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Για την αρχειοθέτηση των τευχών, κυκλοφορούν και οι αντίτυποι της θήκες.

Πώς γενιέται ένα πρόβλημα

Η τέχνη της σύνθεσης προβλημάτων

I. Sharygin

Η ΣΥΖΥΓΟΣ ΑΦΗΝΕΙ ΕΞΑΛΛΗ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ που κρατά στα χέρια της και λέει στον άντρα της: «Θυμάσαι το ποίημα που έγραψες για μένα την ημέρα του γάμου μας; Εδώ λέει πως το έγραψε κάποιος τύπος που τον έλεγαν Πετράρχη!»

Θα ξεκινήσω το άρθρο μου με δύο αντιφατικές δηλώσεις. Από τη μία, δεν θὰ συνιστούσα σε κάθε σπουδαστή που θα το διαβάσει να αρχίσει αμέσως να συνθέτει προβλήματα. Από την άλλη, σας προσκαλώ να δοκιμάσετε να συνθέσετε κάποια προβλήματα (αρχίζοντας με γεωμετρικά) και να μου τα στείλετε. Ίσως κάποτε εμφανιστούν στο περιοδικό μας.

Με αυτό το άρθρο θα προσπαθήσω να σας βοηθήσω με τη μακρόχρονη εμπειρία μου στη σύνθεση γεωμετρικών προβλημάτων, να σας αποκαλύψω μερικά από τα μυστικά μου, και να διατυπώσω ορισμένες αισθητικές και, όσο κι αν ακούγεται παράδοξο, μερικές ηθικές αρχές.

Για δική μας ευκολία, μπορούμε να διακρίνουμε τα προβλήματα σε τρεις κατηγορίες: ασκήσεις βιβλίων, ασκήσεις διαγωνισμών και ασκήσεις τύπου ολυμπιάδων. Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε και μια επιπλέον κατηγορία: τα «δημιουργικά» προβλήματα —αν και αυτό είναι περισσότερο «έμπεσο» παρά τυπικό χαρακτηριστικό, διότι η «δημιουργικότητα» έχει σχέση κυρίως με τον τρόπο επλυσης

του προβλήματος παρά με το ίδιο το πρόβλημα.

Ας αρχίσουμε λοιπόν να ερευνούμε το «σακούλι με τα μαγικά τεχνάσματα» του κατασκευαστή προβλημάτων.

Αναδιατύπωση

Ιδιού ένα παράδειγμα προβλήματος που χρησιμοποιεί την τεχνική της αναδιατύπωσης.

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο ενός τριγώνου και φέρουμε τη διάμετρο που είναι κάθετη σε μια πλευρά του τριγώνου. Στη συνέχεια, προβάλλουμε τη διάμετρο σε μια άλλη πλευρά. Αποδείξτε ότι το μήκος της προβολής ισούται με το μήκος της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

Αφήνουμε τη λύση της άσκησης για τους αναγνώστες (οι οποίοι θα

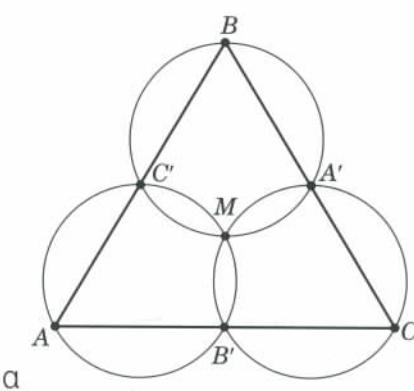
πρέπει να θυμηθούν ότι η προβολή ευθύγραμμου τμήματος μήκους s πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει με το τμήμα γωνία θ έχει μήκος $s \cos \theta$).

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ γνωστό.

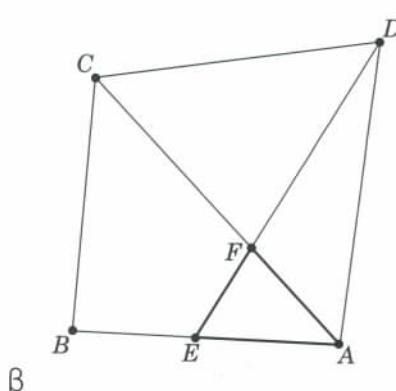
Θεώρημα. Αν θεωρήσουμε τυχαία σημεία A' , B' και C' πάνω στις ευθείες BC , CA και AB , αντίστοιχα (διαφορετικά από τις κορυφές του τριγώνου ABC), τότε οι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία A , B' και C' , τα σημεία A' , B και C' και τα σημεία A' , B' και C , έχουν ένα κοινό σημείο (Σχήμα 1a).

Το θεώρημα αυτό ονομάζεται μερικές φορές θεώρημα του Miquel, ενώ το κοινό σημείο των κύκλων καλείται σημείο του Miquel και συμβολίζεται με M .

Η απόδειξη του θεωρήματος δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Η μοναδική δυσκολία, όταν δεν χρησιμοποιούμε την αναδιατύπωση, είναι να βρούμε τη λύση της άσκησης για τους αναγνώστες (οι οποίοι θα



Σχήμα 1





ούμε προσανατολισμένες γωνίες, είναι να εξετάσουμε τις διάφορες αμοιβαίες θέσεις των σημείων C' , A' , και B' . Στην περίπτωση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1α, όπου ονομάζουμε M το σημείο τομής των κύκλων οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία A , B' , C' και A' , B , C' , αντίστοιχα, αποδεικνύεται εύκολα ότι τα σημεία A' , B' , C και M είναι ομοκυκλικά. (Για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι η $\angle C$ και η $\angle B'MA'$ είναι παραπληρωματικές.)

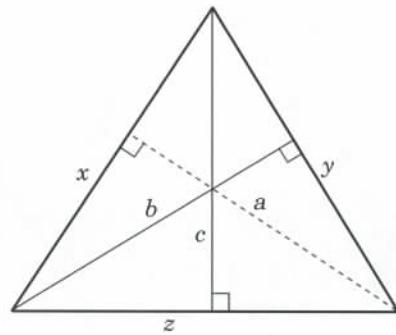
Ιδού ένα πρόβλημα που τέθηκε σε μια πανενωσιακή μαθηματική ολυμπιάδα.

Πρόβλημα 2. Στην πλευρά AB ενός κυρτού τετραπλεύρου $ABCD$ δίνεται σημείο E (διαφορετικό από τα A και B). Τα ευθύγραμμα τμήματα AC και DE τέμνονται σε ένα σημείο F . Αποδείξτε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABC , CDF και BDE έχουν ένα κοινό σημείο.

Λύση. Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά το Σχήμα 1β και τη διατύπωση του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι το Πρόβλημα 2 συμπίπτει με το προηγούμενο θεώρημα. Πράγματι, αρκεί να αναδιατυπώσουμε τη συνθήκη του προβλήματος συναρτήσει τριγώνου AEF , αλλάζοντας τις ονομασίες των σημείων ως εξής: $E \rightarrow B$, $B \rightarrow C'$, $F \rightarrow C$, $C \rightarrow B'$, και $D \rightarrow A'$. Βεβαίως, η διατύπωση του προβλήματος είναι λιγότερο φυσική και, ως εκ τούτου, λιγότερο ελκυστική από το θεωρήματος. Μπορεί να κάνω λάθος σε δύτι αφορά την προέλευση του προβλήματος — τόσο το χειρότερο όμως για τους οργανωτές της ολυμπιάδας!

Όταν ένα γεωμετρικό πρόβλημα μεταφράζεται σε αλγεβρική γλώσσα, μπορεί να προκύψουν κομψά και εντυπωσιακά προβλήματα. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πασίγνωστο πρόβλημα της κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνονται τα τρία ύψη του (μπορείτε να το λύσετε;). Η κατασκευή στηρίζεται στην ιδέα ότι το τρίγωνο με πλευρές a , b και c είναι όμοιο με το τρίγωνο που έχει πλευρές $1/h_a$, $1/h_b$ και $1/h_c$ (αφού $ah_a = bh_b = ch_c = 2E$).

Έστω ότι τα μήκη των υψών του τριγώνου είναι a , b και c , και έστω



Σχήμα 2

ότι οι πλευρές του είναι x , y και z . Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, έχουμε αμέσως ότι $x^2 + y^2 = z^2$.

Πρόβλημα 3. Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = z, \\ \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = x, \\ \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = y. \end{cases}$$

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε την προέλευση του συστήματος, είναι εύκολο να βρούμε τη συνθήκη για να είναι συμβιβαστό (το τρίγωνο με πλευρές $1/a$, $1/b$ και $1/c$ πρέπει να είναι οξυγώνιο) και στη συνέχεια να το λύσουμε. Αποδείξτε ότι και το σύστημα και το πρόβλημα κατασκευής έχουν το πολύ μία λύση.

Στην ίδια μεθοδολογία κατασκευής προβλημάτων μπορεί επίσης να καταταγεί, αν και κάπως καταχρηστικά, η αλλαγή διατύπωσης που προκύπτει όταν μεταβαίνουμε από μια ευθεία πρόταση στην αντίστροφή της. (Πρέπει να επισημάνουμε ότι τα όρια μεταξύ των διαφόρων ειδών προβλημάτων είναι μάλλον δυσδιάκριτα. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να είναι παράδειγμα για διάφορες μεθόδους, ειδικά όταν το τελικό πρόβλημα προκύπτει από το συνδυασμό αρκετών μεθόδων.) Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της συγκεκριμένης μεθόδου, αλλά εδώ θα παρουσιάσω ένα μόνο παράδειγμα που επιδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο μια τετριμμένη ευθεία πρόταση δημιουργεί ένα πρόβλημα με πλούσιο γεωμετρικό περιεχόμενο.

Αν παρατηρήσουμε διάφορα ορθογώνια τρίγωνα, θα διαπιστώ-

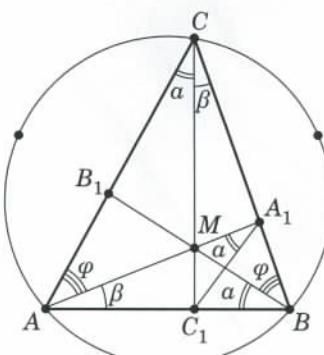
σουμε ότι το ορθόκεντρο H ενός οξυγώνιου τριγώνου ABC έχει την ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \angle HAB &= \angle HCB, \\ \angle HBA &= \angle HCA, \\ \angle HAC &= \angle HBC. \end{aligned}$$

Επομένως, ανακύπτει απολύτως φυσικά το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 4. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία $\angle MAB = \angle MCB$ και $\angle MBA = \angle MCA$, όπου ABC είναι δεδομένο οξυγώνιο τρίγωνο.

Άστρη. Προφανώς, το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ανήκει στον εν λόγω γεωμετρικό τόπο. Το μη τετριμμένο πρόβλημα είναι να ανακαλύψουμε αν υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Θα αποδείξουμε ότι, πράγματι, το σημείο είναι μοναδικό. Ας προεκτείνουμε τις AM , BM και CM ώστε ότου τμήσουν τις πλευρές του τριγώνου στα σημεία A_1 , B_1 και C_1 (Σχήμα 3). Τα σημεία A , C , A_1 και C_1 είναι ομοκυκλικά (εφόσον $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$). Άρα, $\angle MA_1C_1 = \angle MCA = \angle MBC_1$ και $\angle MAC = \angle MC_1A_1$. Συνεπώς, τα σημεία M , B , A_1 και C_1 είναι επίσης ομοκυκλικά, και $\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1 = \angle MAC$. Συμβολίζουμε τις γωνίες με a , b και φ , όπως στο Σχήμα 3, και βρίσκουμε ότι $a + b + \varphi = (A + B + C)/2 = \pi/2$. Έπειτα ότι τα AA_1 , BB_1 και CC_1 είναι τα ύψη του δεδομένου τριγώνου. Όμως, ο γεωμετρικός τόπος που αναζητούμε δεν εξαντλείται στο μοναδικό σημείο τομής των υψών. Το τόξο AB του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC και τα μέσα των τόξων BC



Σχήμα 3

και CA ανήκουν επίσης στον ίδιο γεωμετρικό τόπο (αποδείξτε το).

Προβλήματα δομημένα επί απλών προβλημάτων

Στη γεωμετρία, η δομή ενός προβλήματος απαιτεί συχνά να χρησιμοποιήσουμε άλλα αποτελέσματα ή γεωμετρικά σχήματα για την αντιμετώπισή του. Προβλήματα στερεομετρίας αυτού του τύπου εμφανίζονται συχνά στις εισαγωγικές εξετάσεις των ρωσικών πανεπιστημάτων. Όταν η δομή ενός τέτοιου προβλήματος είναι περίπλοκη, η λύση βρίσκεται συνήθως σταδιακά, με βήματα τα οποία θυμίζουν ξύλινες μπαμπούσκες που μπαίνουν η μία μέσα στην άλλη.

Ουτόσο, η βασική δομή αυτών των προβλημάτων δεν είναι αναγκαστικά περίπλοκη. Ιδού ένα απλό παράδειγμα που συντίθεται από δύο (ή τρία) υποπροβλήματα.

Πρόβλημα 5. Οι διαγώνιοι ενός κυρτού τετραπλεύρου το διαιρούν σε τέσσερα τρίγωνα. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των εμβαδών δύο αντικείμενων τριγώνων ισούται με το γινόμενο των εμβαδών των δύο άλλων τριγώνων.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι, μεταξύ όλων των τετραπλεύρων που εγγράφονται σε δεδομένο κύκλο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

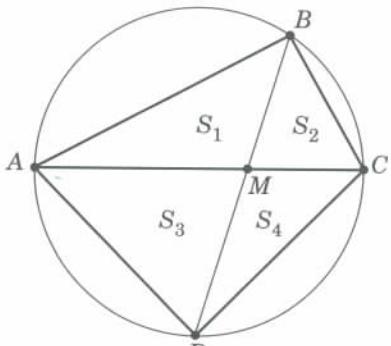
Καλούμε τους αναγνώστες να λύσουν τα δύο προηγούμενα προβλήματα, και διατυπώνουμε ένα καινούργιο που βασίζεται σε αυτά.

Πρόβλημα 7. Το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε έναν μοναδιαίο κύκλο. Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου τέμνονται σε κάποιο σημείο M . Βρείτε το εμβαδόν του διατάνταν δίνεται ότι το γινόμενο των εμβαδών των τριγώνων ABM και CDM ισούται με $1/4$.

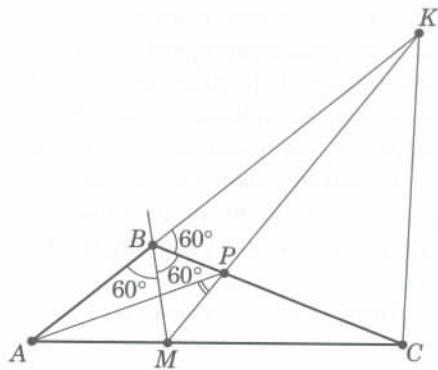
Λύση. Για να λύσετε αυτό το πρόβλημα, αρκεί να παρατηρήσετε (βλ. Σχήμα 4) ότι $S_1S_4 = S_2S_3 = 1/4$ (Πρόβλημα 5) και ότι

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &\geq 2\sqrt{S_1S_4} + 2\sqrt{S_2S_3} = 2 \end{aligned}$$

(ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου).



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Επιπλέον, $S_{ABCD} \leq 2$ (Πρόβλημα 6), διότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο ισούται με 2. Απ' όλα αυτά έπειτα ότι το $ABCD$ είναι τετράγωνο και το εμβαδόν του ισούται με 2.

Πολλά προβλήματα είναι έτοι κατασκευασμένα ώστε να μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια κάποιας συγκεκριμένης ιδέας. Συχνά όμως αποδεικνύεται ότι έχουν μια διαφορετική (και αρκετές φορές απλούστερη) λύση.

Ιδού λοιπόν μια δική μου σύνθεση τέτοιου είδους. Ήθελα να δημιουργήσω ένα πρόβλημα στο οποίο ο συλλογισμός ότι οι τρεις διχοτόμοι τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο (ακριβέστερα, ότι η τρίτη διχοτόμος διέρχεται από το σημείο τομής δύο άλλων διχοτόμων γωνιών ενός τριγώνου —όχι απαραίτητα εσωτερικών) να επαναλαμβάνεται δύο φορές. Επιπλέον, ήθελα το δεύτερο στάδιο της λύσης να εξαρτάται ουσιαστικά από το πρώτο στάδιο της. Δεν θα υποστηρίξω ότι το πρόβλημα που προέκυψε ήταν ιδιαίτερα επιτυχημένο, διότι στηρίζεται σε μια παούγνωστη κατασκευή. Εν πάσῃ περιπτώσει, ιδού το πρόβλημα.

Πρόβλημα 8. Το μέτρο της γωνίας B ενός τριγώνου ABC ισούται με 120° . Θεωρούμε ένα σημείο M στην πλευρά AC και ένα σημείο K στην ευθεία AB τέτοια ώστε η BM να είναι διχοτόμος της γωνίας B και η CK διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας C . Το τμήμα MK τέμνει την πλευρά BC στο σημείο P . Αποδείξτε ότι $\angle APM = 30^\circ$.

Λύση. Ο συλλογισμός μας θα αναπτυχθεί σε δύο βήματα. Στο τρίγωνο BMC , οι ευθείες BK και CK

είναι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και C , αντίστοιχα (Σχήμα 5). Συνεπώς, η MP είναι η διχοτόμος της γωνίας BMC , και P είναι το σημείο τομής των εξωτερικών γωνιών B και M του τριγώνου ABM . Επομένως, η AP είναι η διχοτόμος της γωνίας BAC . Τελικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} \angle APM &= \angle PMC - \angle PAM \\ &= \frac{1}{2}(\angle BMC - \angle BAM) \\ &= \frac{1}{2}(\angle ABM) = 30^\circ. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το μέτρο μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.

Τέλος, ένα πρόβλημα μπορεί να κατασκευαστεί έτοι ώστε να προκύπτει κάποιο ζητούμενο αποτέλεσμα (αυτό το τέχνασμα χρησιμοποιείται συχνά σε ασκήσεις). Θα δώσουμε ένα παράδειγμα που έχει μια «παγίδα» (τέτοια προβλήματα είναι ιδιαίτερα σπάνια). Τα αριθμητικά δεδομένα έχουν επιλεγεί έτοι ώστε να δημιουργείται μια ασυνήθιστη γεωμετρική δομή. Παρά τα κάποια μειονεκτήματά του (έπρεπε να καταφύγω σε ένα τέχνασμα κατά την εκφόνηση), αυτό το πρόβλημα μου αρέσει. Πάντως, δεν θα μπορούσε να καταταγεί ούτε στα προβλήματα τύπου ολυμπιάδας (δεν συνηθίζεται να δίνονται προβλήματα με αριθμητικά δεδομένα στις ολυμπιάδες) ούτε στα προβλήματα διαγωνισμών (ακόμη και ο καλύτερος μαθητής μπορεί να πέσει σε παγίδα, και αυτό αντιβαίνει στο σκοπό των διαγωνισμών). Πρόκειται μάλλον για διδακτικό πρόβλημα.

Πρόβλημα 9. Ένα κυρτό τετρά-

πλευρο με τις δύο πλευρές του ίσες με 6 μονάδες μήκους και τις δύο άλλες ίσες με 10 μονάδες μήκους αποτελεί τη βάση μιας πυραμίδας. Το ύψος της πυραμίδας ισούται με 7 μονάδες, και οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία 60° με το επίπεδο της βάσης. Βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση. Από την εκφώνηση έπειτα ότι το μέτρο των δίεδρων γωνιών στη βάση της πυραμίδας είναι 60° ή 120° (όχι υποχρεωτικά 60° —αυτά είναι τα αόρατα «ψιλά γράμματα» στη διατύπωση του προβλήματος). Είναι απλό να δούμε ότι η προβολή της κορυφής της πυραμίδας στο επίπεδο της βάσης ισαπέχει από τις πλευρές του τετραπλεύρου (ακριβέστερα, ισαπέχει από τις ευθείες στις οποίες ανήκουν οι πλευρές του τετραπλεύρου). Επομένως, αυτό το τετράπλευρο δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, οι δύο διαδοχικές πλευρές του έχουν μήκος 6 μονάδες και οι άλλες δύο, επίσης διαδοχικές, έχουν μήκος 10 μονάδες. Τώρα, αν $AB = BC = 10$ και $AD = DC = 6$ (βλ. Σχήμα 6), θα υπάρχουν δύο σημεία (O_1 και O_2) που ισαπέχουν από τις πλευρές. Από τις συνθήκες του προβλήματος, έπειτα ότι η προβολή της κορυφής της πυραμίδας απέχει από τις πλευρές $7\sqrt{60^\circ} = 7/\sqrt{3}$. Αν η προβολή της κορυφής είναι το σημείο O_1 , το οποίο είναι κέντρο του εγγεγραμμένου στο $ABCD$ κύκλου, το εμβαδόν τού $ABCD$ θα ισούται με:

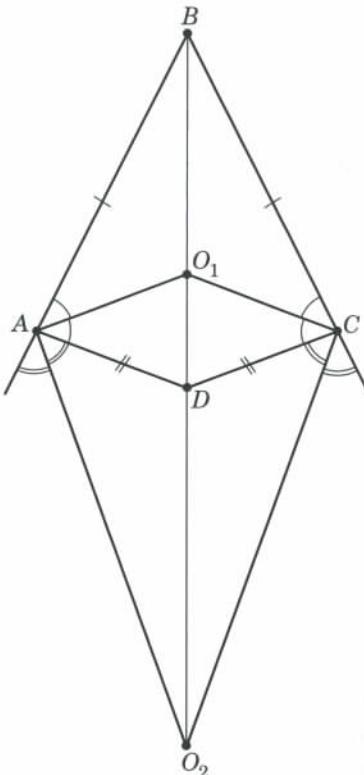
$$16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Όμως, αυτό το εμβαδόν δεν μπορεί να υπερβαίνει το 60 (είναι ίσο με 60, όταν οι γωνίες A και C έχουν μέτρο 90°), αλλά

$$16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} > 60.$$

Συνεπώς, η κορυφή της πυραμίδας προβάλλεται στο O_2 , και η απόσταση αυτού του σημείου από τις πλευρές του τετραπλεύρου $ABCD$ ισούται με $7/\sqrt{3}$.

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το εμβαδόν τού $ABCD$, το οποίο είναι ίσο με:



Σχήμα 6

$$(10 - 6) \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{28}{\sqrt{3}},$$

και άρα ο όγκος της πυραμίδας ισούται με:

$$\frac{196}{3\sqrt{3}}.$$

Ειδική περίπτωση

Πολλά γενικά θεώρημα που μας προσφέρουν ένα πανίσχυρο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων, όπως το θεώρημα του Ceva ή οι ανισότητες μεταξύ των διαφόρων μέσων στην άλγεβρα, χρησιμοποιούνται επίσης στη σύνθεση προβλημάτων. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το θεώρημα του Pascal: Αν έχι σημεία A, B, C, D, E και F ανήκουν στον ίδιο κύκλο, τότε τα τρία σημεία στα οποία τέμνονται τα ζεύγη των ενθειών AB και DE , BC και EF , FA και CD , αντίστοιχα, είναι συνενθειακά. Ιδού ένα πρόβλημα που συνδέεται με το θεώρημα του Pascal.

Πρόβλημα 10. Εστω ότι οι πλευρές AB και DE ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $ABDE$ τέμνονται στο σημείο M , και έστω ότι οι πλευρές του BD και AE τέμνονται στο σημείο K . Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες του

κύκλου που διέρχονται από τα σημεία B και E τέμνονται επί της ευθείας KM .

Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι το θεώρημα αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση (ακριβέστερα, οριακή περίπτωση) του θεώρηματος του Pascal, στην οποία τα σημεία B και C συμπίπτουν (και το ίδιο συμβαίνει και με τα σημεία E και F). Οι δύο πλευρές του εξαγώνου που αναφέρεται στο θεώρημα του Pascal έχουν γίνει σε αυτή την οριακή περίπτωση εφαπτόμενες.

Οι επαγγελματίες μαθηματικοί που βοηθούν στη διοργάνωση των μαθηματικών ολυμπιάδων παράγουν συχνά κομψά και ενδιαφέροντα προβλήματα από την επιστημονική τους εργασία. Οι ειδικές περιπτώσεις θεμελιώδών θεωρημάτων και τα αναρίθμητα λήμματα που προκύπτουν κατά την απόδειξη όλων σχεδόν των θεωρημάτων μπορούν συχνά να αναδιατυπωθούν ως προβλήματα για μαθητές λυκείου. Τέτοια παραδείγματα σπανίζουν στη γεωμετρία, διότι η σύγχρονη οπτική γωνία γι' αυτό το πεδίο διαφέρει σημαντικά από την εκδοχή που διδάσκεται στο σχολείο (τούτη η παρατήρηση δεν σημαίνει καθόλου ότι υποτιμώ τη σχολική γεωμετρία). Στο παρόν άρθρο θα δώσω μόνο ένα παράδειγμα —ίσως όχι το πιο χαρακτηριστικό ή το πιο λαμπρό.

Υπάρχει ένα «τεθλασμένο» θεώρημα. Δίνονται δύο κύκλοι (πιθανόν και στο χώρο). Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο $2n$ σημείων $A_1A_2\dots A_{2n}$ τέτοιο ώστε τα σημεία με περιττούς δείκτες να ανήκουν στον ένα κύκλο και τα σημεία με άρτιους στον άλλο. Έστω επίσης ότι $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{2n}A_1$. Με όλα αυτά τα δεδομένα, αποδεικνύεται ότι υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων συνόλων $2n$ σημείων, ότι μπορούμε να λάβουμε ως αρχικό σημείο A_1 οποιοδήποτε σημείο του πρώτου κύκλου και ότι η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σημείων οποιοδήποτε από αυτά τα σύνολα είναι σταθερή, ίδια για όλα τα εν λόγω σύνολα.

Δεν γνωρίζω στοιχειώδη απόδειξη αυτού του θεώρηματος. Όμως, οι ειδικές περιπτώσεις του μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στοιχειώδη προ-

βλήματα. Ιδού μία από αυτές.

Πρόβλημα 11. Δίνονται δύο κύκλοι στο επίπεδο με ακτίνες R και r , αντίστοιχα. Η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους ισούται με a . Βρείτε την πλευρά ενός ρόμβου του οποίου οι δύο απέναντι κορυφές ανήκουν στον ένα κύκλο και οι δύο άλλες στον δεύτερο.

Αφήνω το πρόβλημα ως πρόκληση στους αναγνώστες, δίνοντας μόνο την απάντηση:

$$\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}.$$

Παραπλαγές στη διατύπωση

Το επόμενο σύνολο προβλημάτων μάς δείχνει τι μπορεί να συμβεί όταν αλλάζουμε ελαφρώς τη διατύπωση ενός προβλήματος: Κατασκευάστε ένα τρίγωνο όταν: (α) δίνονται οι τρεις πλευρές του, (β) δίνονται οι τρεις διάμεσοι, (γ) δίνονται τα τρία ύψη, (δ) δίνονται οι τρεις εσωτερικές διχοτόμοι. Αυτά τα παραδείγματα μας δείχνουν ότι μια μικρή αλλαγή στη διατύπωση ενός προβλήματος μπορεί να έχει ως συνέπεια τεράστιες αλλαγές στο επίπεδο δυσκολίας του. Το πρόβλημα (α) είναι μια καθιερωμένη άσκηση των σχολικών βιβλίων. Το πρόβλημα (β) είναι ελαφρώς δυσκολότερο αν και εξαιρετικά ενδιαφέρον. Το πρόβλημα (γ) είναι πολύ δυσκολότερο, ενώ το πρόβλημα (δ) δεν μπορεί να λυθεί με κανόνα και διαβήτη.

Ο καθηγητής της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης V. Kutsenok πρότεινε μια ενδιαφέρουσα μέθοδο κατασκευής σειράς προβλημάτων. Θεωρούμε μια γεωμετρική σχέση (για παράδειγμα, την ισότητα $ah_a = bh_b$) και θέτουμε το ερώτημα: Ποιες ιδιότητες έχει ένα τρίγωνο για το οποίο ισχύει η προηγούμενη σχέση όταν αντικαταστήσουμε τα ύψη με τις διαμέσους ή τις διχοτόμους; Προκύπτει έτσι το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 12. Δίνονται δύο σημεία A και B στο επίπεδο. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων C του επιπέδου τα οποία είναι τέτοια ώστε να ισχύει η επόμενη ισότητα για το τρίγωνο ABC :

(α) $am_a = bm_b$ (m_a και m_b είναι διάμεσοι του τριγώνου ABC)

(β) $a\delta_a = b\delta_b$ (δ_a και δ_b είναι διχοτόμοι του τριγώνου ABC).

Και στις δύο περιπτώσεις οι λύσεις είναι όμοιες. Θεωρούμε την περίπτωση (α).

Έστω AA_1 και BB_1 τα ύψη του τριγώνου, και AA_0 και BB_0 οι διάμεσοι του. Από τη διατύπωση του προβλήματος έπειται ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AA_0A_1 και BB_0B_1 είναι όμοια. Οι δύο δυνατές διευθετήσεις των σημείων A_1, A_0, B_1 και B_0 στις πλευρές του τριγώνου ABC παρουσιάζονται στα Σχήματα 7α και 7β. Στην πρώτη περίπτωση, τα σημεία A, B, A_0 και B_0 ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Αφού η A_0B_0 είναι παράλληλη στην AB (τα A_0, B_0 είναι μέσα), έπειται ότι το τραπέζιο AB_0A_0B είναι ισοσκελές και, επομένως, $AC = BC$. Σε αυτή την περίπτωση, το C ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

Στη δεύτερη περίπτωση, τα σημεία C, M, A_0 και B_0 ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Η διαγώνιος A_0B_0 του εγγράψιμου τετραπλεύρου CA_0MB_0 ισούται με το ήμισυ του AB και διχοτομείται από τη διαγώνιο CM . Η διαγώνιος CM ισούται με $(2/3)\mu_c$ και, επομένως, η CM διαιρείται από τη διαγώνιο A_0B_0 σε λόγο $3 : 1$. Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο τα γινόμενα των τημάτων των δύο διαγωνίων του είναι ίσα. Προκύπτει επομένως $\mu_c^2 = 3AB^2$, δηλαδή μια σταθερά. Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τη μεσοκάθετο του τημάτος AB και τον κύκλο με κέντρο το μέσο του AB και ακτίνα $AB\sqrt{3}$.

Στην περίπτωση (β), το σημείο C

ανήκει στη μεσοκάθετο του τημάτος AB ή σε ένα τόξο κύκλου από το οποίο το AB φαίνεται υπό γωνία 60° .

Μερικές φορές δημιουργούμε προβλήματα παραλλάσσοντας τη διατύπωση ενός γνωστού αποτελέσματος. Θα παρουσιάσω δύο μόνο παραδείγματα. Σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα Steiner-Lehmus, ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν δύο διχοτόμοι του είναι ίσες. Αυτό το θεώρημα είναι απολύτως φυσικό, παρόλο που η απόδειξη του είναι μάλλον περίπλοκη (σε αντίθεση με τα παρόμοια θεωρήματα για ίσες διαμέσους και ύψη ενός τριγώνου που αποδεικνύονται εύκολα). Εδώ διαπιστώνουμε την «κακή συμπεριφορά» των διχοτόμων η οποία παρουσιάζεται σε όλο της το μεγαλείο στο πρόβλημα που ακολουθεί.

Πρόβλημα 13. Σε τρίγωνο ABC , οι διχοτόμοι των γωνιών είναι οι AA_1 , BB_1 και CC_1 . Είναι ισοσκελές το τρίγωνο αν έχει:

(α) ίσες διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών A και B ;

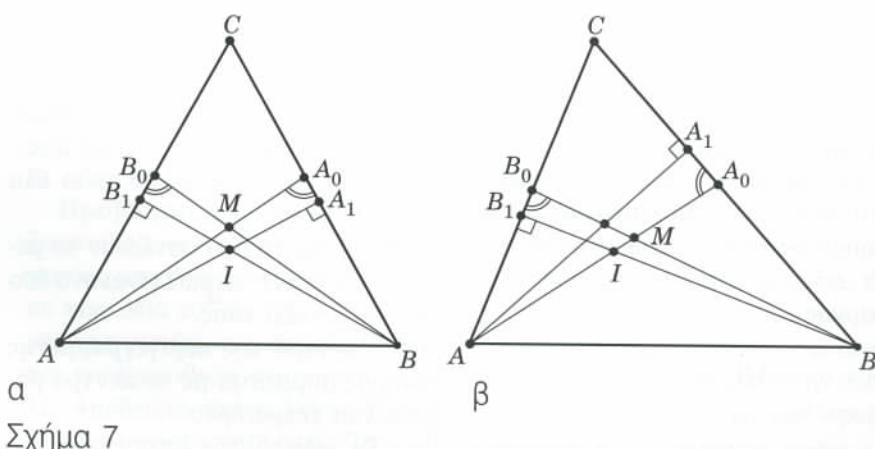
(β) ίσα τημάτα IA_1 και IB_1 (όπου I το σημείο τομής των διχοτόμων AA_1 και BB_1 των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου);

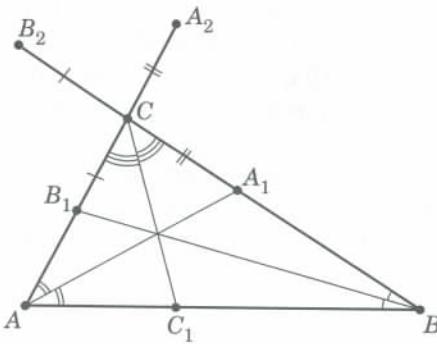
(γ) ίσες αποστάσεις του σημείου C_1 από τα μέσα των πλευρών CA και CB ;

(δ) $C_1A_1 = C_1B_1$;

(ε) την πλευρά AB εφαπτόμενη στον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A_1, B_1 και C_1 ;

Η απάντηση είναι αρνητική και στις πέντε περιπτώσεις. Οι (δ) και (ε) είναι οι δυσκολότερες. Σε αυτό το άρθρο, θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση (ε), την οποία πληροφορήθη-





Σχήμα 8

κα από κάποιες συζητήσεις σε μαθηματικούς κύκλους. Θα παρουσιάσω τον τρόπο κατασκευής ενός μη ισοσκελούς τριγώνου που έχει την εν λόγω ιδιότητα, αλλά δεν θα εξηγήσω τον τρόπο επινόησης αυτής της λύσης.

Έστω AA_1 , BB_1 και CC_1 οι διχοτόμοι του τριγώνου ABC (Σχήμα 8). Θεωρούμε σημεία A_2 και B_2 στις προεκτάσεις των πλευρών AC και BC τέτοια ώστε $CA_2 = CA_1$ και $CB_2 = CB_1$. Προφανώς, τα σημεία A_1 , A_2 , B_1 και B_2 είναι ομοκυκλικά (επαληθεύστε ότι οι $\angle B_2 A_1 A_2$ και $\angle A_2 B_1 B_2$ είναι ίσες). Αν φροντίσουμε οι AC_1 και BC_1 να ισούνται με τις εφαπτόμενες που φέρουμε από τα σημεία A και B προς αυτό τον κύκλο, τότε ο κύκλος εφάπτεται της AB στο σημείο C_1 . Αν το μήκος ενός τμήματος ισούται με το άθροισμα των εφαπτομένων που φέρουμε από τα άκρα του προς τον κύκλο, τότε αυτό το τμήμα εφάπτεται στον κύκλο. (Αφήνουμε τη συγκεκριμένη απόδειξη για τους αναγνώστες.) Συνεπώς, απαιτούμε να ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2,$$

$$BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Είναι γνωστό ότι η διχοτόμος ενός τριγώνου διαιρεί την πλευρά προς την οποία άγεται σε δύο τμήματα ανάλογα προς τις άλλες δύο πλευρές. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να εκφράσουμε κάθε τμήμα συναρτήσει του μήκους των τριών πλευρών. Παίρνουμε

$$AB_1 = \frac{bc}{c+a},$$

και ούτω καθεξής. Στη συνέχεια

βρίσκουμε ότι καθεμία από αυτές τις δύο ισότητες είναι ισοδύναμη με την

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει τρίγωνο, μη ισοσκελές, οι πλευρές του οποίου ικανοποιούν αυτή τη σχέση. Εύκολα μπορούμε να βρούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Έστω $c = 1$, $a + b = 1 + \lambda$. Τότε, αν γράψουμε την προηγούμενη εξίσωση συναρτήσει του λ , βρίσκουμε $ab = \lambda(2+\lambda)^2$. Αν το λ είναι αρκετά μικρό, μπορούμε να βρούμε (λύνοντας μια δευτεροβάθμια ως προς a) αριθμούς a και b που θα ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις, με $a \neq b$.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα σειρά προβλημάτων αφορά την περίπτωση όπου ένα τετράεδρο έχει ίσες έδρες. Γνωρίζουμε πολλές ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει ένα τετράεδρο ίσες έδρες. Χωρίς να σημαίνει ότι προσπαθώ να εξαντλήσω το θέμα (ούτε καν να πετύχω κάποιο ρεκόρ), θέτω το εξής πρόβλημα.

Πρόβλημα 14. Ποιες από τις επόμενες συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες για να έχει ίσες έδρες ένα τετράεδρο $ABCD$:

(α) Για κάθε ζεύγος απέναντι ακμών, οι ακμές είναι ίσες.

(β) Οι περιμέτροι όλων των εδρών είναι ίσες μεταξύ τους.

(γ) Τα αθροίσματα των επίπεδων γωνιών που πρόσκεινται σε όλες τις κορυφές είναι ίσα με 180° .

(δ) Ισχύει η επόμενη ισότητα:

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC.$$

(ε) Ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

$$\angle BAC = \angle BDC, \quad \angle ABD = \angle ACD, \quad \angle BAD = \angle BCD.$$

(στ) Οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των εδρών είναι όλες ίσες.

(ζ) Οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των εδρών είναι όλες ίσες.

(η) Τα εμβαδά των εδρών είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

(θ) Τα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι ακμών είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους.

(ι) Το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας συμπίπτει με το κέντρο βάρους του τετραέδρου.

(ια) Το κέντρο της εγγεγραμμένης

σφαίρας συμπίπτει με το κέντρο βάρους του τετραέδρου.

(ιβ) Τα κέντρα της περιγεγραμμένης και της εγγεγραμμένης σφαίρας συμπίπτουν.

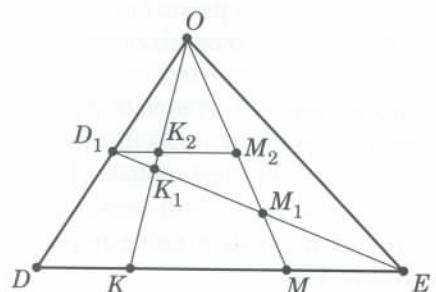
(ιγ) Το άθροισμα των συνημιτόνων των δίεδρων γωνιών ισούται με -2 .

(ιδ) Υπάρχουν τέσσερις σφαίρες με κέντρα που ανήκουν στην περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου, οι οποίες εφάπτονται στη μία έδρα σε ένα εσωτερικό σημείο καθώς και στα επίπεδα των άλλων εδρών.

Νομίζω ότι αρκούν. Γενικώς, μπορούμε να διατυπώσουμε δεκάδες τέτοιων συνθηκών, ειδικά αν λάβουμε υπόψη ότι μερικές από τις συνθήκες είναι δυνατόν να αναμιχθούν. Για παράδειγμα, οι πρώτες οκτώ συνθήκες είναι διατυπωμένες ως συνδυασμοί τριών ισοτήτων. Μπορούμε να τις συνδυάσουμε διαφορετικά, παίρνοντας, για παράδειγμα, μία ισότητα από την (α) (δύο απέναντι ακμές ίσες) και δύο ισότητες από τη (γ) (τα αθροίσματα των επίπεδων γωνιών που πρόσκεινται σε δύο κορυφές ισούνται με 180°).

Σε αυτό το πρόβλημα, σχεδόν όλες οι συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες για να έχει το τετράεδρο ίσες έδρες. Ίσως μαντέψατε ότι η πρόταση (ζ) αποτελεί εξαίρεση (και σε αυτή την περίπτωση οι διχοτόμοι δημιουργούν προβλήματα). Και πράγματι, έτσι έχει η κατάσταση. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε ένα αντιπαράδειγμα. (Δοκιμάστε να ξεκινήσετε με δύο ζεύγη άνισων ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν την επιθυμητή ιδιότητα.)

Η πρόταση (ιδ) έχει εξαιρετικά δύσκολη απόδειξη —ή, τουλάχιστον, δεν γνωρίζω να υπάρχει κάποια στοιχειώδης απόδειξη της.



Σχήμα 9

Παρεμπιπτόντως, θέλω να αναφέρω ότι σκέφτηκα την πρόταση (ε) όταν έγραφα το άρθρο. Αξίζει να επισημάνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση το γεγονός ότι το τετράεδρο είναι στερεό σχήμα έχει ουσιαστική σημασία: Αν τα σημεία A , B , C και D ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, τότε η ιδιότητα που αναφέρεται στην πρόταση (ε) δεν αρκεί για να είναι τα τρίγωνα ABM και CDM είναι ισοοκελή ($AB = AM$ και $CD = CM$, αντιστοίχως). Καλώ τους αναγνώστες να ολοκληρώσουν την απόδειξη.

Γενικεύσεις

Η ανάπτυξη των μαθηματικών είναι συνδεδεμένη με μια συνεχή αλυσίδα γενικεύσεων. Όταν κατά την κατασκευή στοιχειωδών προβλημάτων χρησιμοποιούμε γενικεύσεις, δεν αναμένουμε να επιτύχουμε θεμελιώδη αποτελέσματα. Ανεξάρτητα απ' αυτό, όμως, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τη σπουδαιότητα της μεθόδου.

Οι γενικεύσεις μπορεί να ακολουθούν διαφορετικές κατευθύνσεις. Μερικές φορές έχουμε τη δυνατότητα να αφαιρέσουμε ορισμένους περιορισμούς από κάποιο πρόβλημα και να επεκτείνουμε την πρόταση σε ένα ευρύτερο σύνολο αντικειμένων. Για παράδειγμα, συνάντησα κάποτε σε ένα παλιό μαθηματικό περιοδικό το εξής πρόβλημα.

Πρόβλημα 15. Η πλευρά AD ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $ABCD$ είναι διάμετρος του κύκλου και οι διχοτόμοι των γωνιών B και C τέμνονται πάνω στην πλευρά AD . Αποδείξτε ότι $AB + CD = AD$.

Δεν μου άρεσε η λύση που παρουσιάζει το περιοδικό. Αφού σκέφτηκα το ζήτημα, βρήκα μια άλλη λύση που δεν χρησιμοποιούσε τη συνθήκη ότι η AD είναι διάμετρος του κύκλου, και η οποία αποδείχτηκε πλεονασμός. Το αποτέλεσμα ήταν η γέννηση ενός νέου προβλήματος.

Πρόβλημα 15'. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και C ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου $ABCD$ τέμνονται πάνω στην πλευρά AD . Αποδείξτε ότι $AB + CD = AD$.

Στη λύση μου (υπάρχουν πολλές άλλες ακόμη) χρησιμοποίησα τον εξής συλλογισμό. Έστω P το σημείο της AD στο οποίο τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών B και C . Φέρου-

με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BCP και συμβολίζουμε με M το δεύτερο σημείο τομής αυτού του κύκλου με την AD . Αν λάβουμε υπόψη την ισότητα διαφόρων γωνιών στα εγγράψιμα τετράπλευρα $ABCD$ και $BCPM$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ABM και CDM είναι ισοοκελή ($AB = AM$ και $CD = CM$, αντιστοίχως). Καλώ τους αναγνώστες να ολοκληρώσουν την απόδειξη.

Τούτο το παράδειγμα αποδεικνύει ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να προσπαθούμε να δοκιμάζουμε διαφορετικές μεθόδους όταν λύνουμε ένα πρόβλημα, δίνοντας ειδική βαρύτητα στις περισσότερο γεωμετρικές, διότι αυτές μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε βαθύτερα τις εσωτερικές ιδιότητες των σχημάτων και μας διευκολύνουν να διακρίνουμε τα ουσιώδη από τα δευτερεύοντα. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Το εξής πρόβλημα είχε προταθεί αλλά τελικά δεν χρησιμοποιήθηκε στην πανενωσιακή μαθηματική Ολυμπιάδα του 1990.

Πρόβλημα 16. Τα σημεία D και E ανήκουν στις πλευρές AB και BC ενός τριγώνου ABC , αντίστοιχα. Τα σημεία K και M διαιρούν το τμήμα DE σε τρία ίσα μέρη. Οι ευθείες BK και BM τέμνουν την πλευρά AC στα σημεία T και P , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$TP \leq \frac{1}{3} AC.$$

Η διατύπωση του προβλήματος, αυτή καθαυτή με άφησε αδιάφορο —ήταν υπερβολικά βαρετή και περιείχε πάρα πολλά γράμματα. Δεν μου άρεσε ούτε η λύση της —ερχόταν σε αντίθεση με τις αρχές που σας έχω αναπτύξει. Όταν βρήκα μια καλύτερη λύση (σύμφωνα με τη δική μου άποψη), ήμουν σε θέση να διατυπώσω ξανά το πρόβλημα και να το κάνω γενικότερο.

Πρόβλημα 16'. Δύο ημιευθείες ξεκινούν από την κορυφή κάποιας γωνίας και βρίσκονται στο εσωτερικό της. Μια ευθεία τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία D και E και τις ημιευθείες στα σημεία K και M . Αποδείξτε ότι ο λόγος KM/DE παίρνει μέγιστη τιμή όταν $DK = ME$.

Για να αποδείξουμε αυτό το γεγονός, θεωρούμε μια άλλη ευθεία που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία E και D_1 και τις δεδομένες ημιευθείες στα σημεία K_1 και M_1 (Σχήμα 9). Έστω $DK = ME = a$, $KM = b$ και $OD_1 = \lambda OD$. Φέρουμε την ευθεία D_1M_2 παράλληλη προς την DE . Έχουμε:

$$D_1K_2 = \lambda a, \quad K_2M_2 = \lambda b,$$

$$\frac{D_1M_1}{M_1E} = \frac{\lambda(a+b)}{a},$$

(από τα όμοια τρίγωνα $D_1M_2M_1$ και EMM_1). Αλγεβρικώς, αυτό είναι ισοδύναμο με τις:

$$D_1M_1 = \frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} \cdot D_1E,$$

$$D_1K_1 = \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a} \cdot D_1E,$$

$$K_1M_1 =$$

$$\left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} - \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a} \right) \cdot D_1E.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε διάφορα ζεύγη όμοιων τριγώνων και γνωστές ιδιότητες των αναλογιών.

Τελικώς, το πρόβλημα ανάγεται στην απόδειξη της απλής αλγεβρικής ανισότητας

$$\frac{\lambda(b^2 + 2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a + a + b)} \leq \frac{b}{2a+b},$$

η οποία γράφεται ως

$$(\lambda - 1)^2 a(a+b) \geq 0.$$

Μια άλλη δυνατή κατεύθυνση γενικεύσεων είναι η μεταφορά ενός γεωμετρικού γεγονότος από ένα αντικείμενο σε κάποιο άλλο —και ιδιαίτερα η επέκταση των γεωμετρικών ιδιοτήτων επίπεδων σχημάτων σε στερεά. Με αυτό τον τρόπο δημιουργήθηκε το επόμενο πρόβλημα.

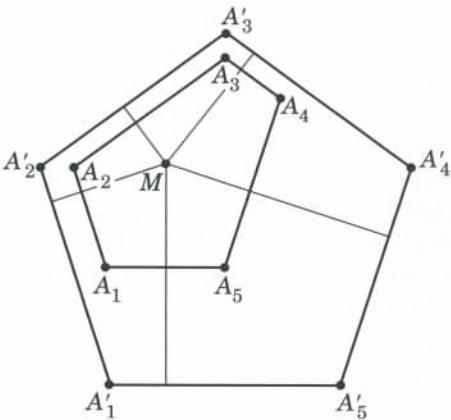
Πρόβλημα 17. Φέρουμε δύο εφαπτόμενες AB και CD προς δύο σφαίρες έτσι ώστε τα σημεία A και C να ανήκουν στη μία σφαίρα, και τα B , D στην άλλη. Αποδείξτε ότι οι προβολές των AC και BD στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών είναι ίσες.

Στην περίπτωση του επιπέδου, αυτό το πρόβλημα είναι απλό (εδώ τα AB και CD είναι, αντίστοιχα, οι κοινές εξωτερικές και εσωτερικές εφαπτόμενες των δύο κύκλων). Και στην περίπτωση του χώρου δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Η λύση στηρίζεται στο γεγονός ότι τα μέσα των κοινών εφαπτομένων των δύο κύκλων ανήκουν σε ένα επίπεδο κάθετο στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών (αφήνω την απόδειξη για τους αναγνώστες). Κατά τη γνώμη μου, αυτό το πρόβλημα είναι αξιοσημείωτο, διότι αποτελεί μια περίπτωση όπου αλληλεύει το τρισδιάστατο ανάλογο μιας πρότασης που έχει διατυπωθεί για το επίπεδο —γεγονός που συμβαίνει σπανίως. Συχνά, είναι απαραίτητο να κατασκευάσουμε αντιπαράδειγμα που διαφεύδει τέτοιες γενικεύσεις. Παραδείγματος χάριν, η απλή πρόταση της επίπεδης γεωμετρίας που μας διαβεβαιώνει ότι σε κάθε τρίγωνο το ίχνος ενός τουλάχιστον ύψους βρίσκεται στην αντίστοιχη πλευρά (και όχι στις προεκτάσεις της) μας οδηγεί στο εξής πρόβλημα για την τρισδιάστατη περίπτωση.

Πρόβλημα 18. Αληθεύει ότι σε κάθε τετράεδρο το ίχνος ενός τουλάχιστον ύψους ανήκει στην αντίστοιχη έδρα;

Η απάντηση είναι αρνητική. Αντιπαράδειγμα μας προσφέρει το τετράεδρο στο οποίο δύο δίεδρες γωνίες που αντιστοιχούν σε ασύμβατες ακμές είναι αμβλείες.

Αρκετά συχνά, ένα πρόβλημα γενικεύεται προς διαφορετικές κατευθύνσεις και παράγει μια σειρά προβλημάτων. Ας θεωρήσουμε το εξής γνωστό θεώρημα: *Το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου που βρίσκεται στο εσωτερικό ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του τριγώνου είναι σταθερό.* (Θα δώσω μια αδρή περιγραφή της απόδειξης, για τους αναγνώστες που δεν γνωρίζουν αυτή την πρόταση: Το εμβαδόν του εν λόγω ισόπλευρου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριών τριγώνων που έχουν βάσεις τις πλευρές του δεδομένου τριγώνου και κοινή κορυφή το τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του.)



Σχήμα 10

Ο ισχυρισμός αυτού του θεωρήματος επεκτείνεται εύκολα και για την περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ισόπλευρου πολυγώνου. Η επέκτασή του και στην περίπτωση οποιουδήποτε πολυγώνου με ίσες γωνίες είναι λιγότερο προφανής. Πράγματι, έστω $A_1A_2\dots A_n$ ένα πολύγωνο με ίσες γωνίες (δείτε το Σχήμα 10, όπου $n = 5$). Ας θεωρήσουμε το κανονικό n -γώνο $A'_1A'_2\dots A'_n$ που περιέχει το $A_1A_2\dots A_n$, και οι πλευρές του είναι παράλληλες προς τις πλευρές του αρχικού n -γώνου. Για κάθε σημείο M στο εσωτερικό τού $A_1A_2\dots A_n$, έχουμε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του από τις πλευρές τού $A'_1A'_2\dots A'_n$ παραμένει σταθερό. Η απόσταση του M από οποιαδήποτε πλευρά του αρχικού n -γώνου είναι μικρότερη της απόστασης του M από την αντίστοιχη παράλληλη πλευρά του περιβάλλοντος κανονικού n -γώνου κατά μια σταθερή ποσότητα. Συνεπώς, το άθροισμα των αποστάσεων του M από τις πλευρές τού $A'_1A'_2\dots A'_n$ διαφέρει από το άθροισμα των αποστάσεων του M από τις πλευρές τού $A'_1A'_2\dots A'_n$ κατά μια σταθερά. Επομένως, είναι και αυτή σταθερά.

Μπορούμε να κάνουμε μια περαιτέρω γενίκευση που συνδυάζει τις δύο προηγούμενες.

Πρόβλημα 19. Δίνονται n διαφορετικά μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου τα οποία έχουν άθροισμα μηδέν. Θεωρούμε το κυρτό n -γώνο με πλευρές κάθετες σε αυτά τα διανύσματα. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου αυτού του n -γώνου από τις

πλευρές του είναι σταθερό.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το αρχικό θεώρημα περί ισόπλευρων τριγώνων και προς άλλες κατευθύνσεις —για παράδειγμα, να εξετάσουμε την τρισδιάστατη περίπτωση. Θα είχε ενδιαφέρον να μάθουμε αν ισχύει το τρισδιάστατο ανάλογο του Προβλήματος 19.

Ανακαλύψεις και προβλήματα

Τα προηγούμενα παραδείγματα του άρθρου επιδείκνυαν συγκεκριμένες τεχνικές. Όμως, η κύρια πηγή νέων προβλημάτων είναι η περιέργεια, η επιθυμία να αποκαλύψουμε την ουσία ενός προβλήματος, η ικανότητα να παρατηρήσουμε ένα γνωστό γεγονός από καινούργια οπτική γωνιά. Τότε εμφανίζονται τα πο ενδιαφέροντα γεωμετρικά προβλήματα, αυτά που μπορούμε να ονομάσουμε ανακαλύψεις. Ιδού ένα από τα πλέον κομψά προβλήματα τύπου ολυμπιάδας που εμφανίστηκαν τα τελευταία χρόνια.

Πρόβλημα 20. Είναι δυνατόν να αποκόψουμε τρία κανονικά τετράεδρα με μοναδιαία ακμή από έναν ξύλινο μοναδιαίο κύβο;

Το πρόβλημα αυτό είχε προταθεί αλλά τελικά δεν χρησιμοποιήθηκε στην πανρωσική Ολυμπιάδα του 1989. Έχει ενδιαφέρον ότι το πρόβλημα της κοπής δύο μοναδιαίων τετραέδρων από έναν μοναδιαίο κύβο είχε συζητηθεί σε πολλές συλλογές προβλημάτων ολυμπιάδων, και τελικά αποδείχτηκε ότι μπορούν να κοπούν τρία τετράεδρα! Πράγματι, ας θεωρήσουμε τρεις ακμές του κύβου που ανά δύο είναι ασύμβατες. Καθεμία απ' αυτές θα είναι η ακμή ενός τετραέδρου. Τα μέσα των απέναντι ακμών κάθε τετραέδρου συμπίπουν με το κέντρο του κύβου. Απομένει πλέον να αποδείξουν οι αναγνώστες ότι τα τετράεδρα αυτά, τοποθετημένα στις κατάλληλες θέσεις, δεν έχουν άλλα κοινά σημεία.

Δεν έχει ουσιαστική σημασία αν κάποιο κομψό γεωμετρικό γεγονός που ανακαλύπτετε είναι ήδη γνωστό. Μερικές φορές, ένα παλιό γεωμετρικό θεώρημα μπορεί να εκπλήξει ακόμα και έμπειρους γεωμέτρες. Δυστυχώς, πολλά είναι αυτά που έχουν χα-

θεί στη γεωμετρία από την εμφάνισή της.

Το επόμενο πρόβλημα πιστεύω ότι αποτελεί μια από τις καλύτερες γεωμετρικές ανακαλύψεις μου.

Πρόβλημα 21. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ευθειών που μπορούμε να φέρουμε από κάποιο σημείο στον τρισδιάστατο χώρο έτσι ώστε όλες οι γωνίες που σχηματίζονται να είναι ανά δύο ίσες;

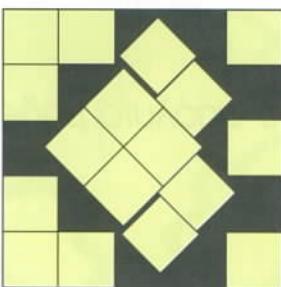
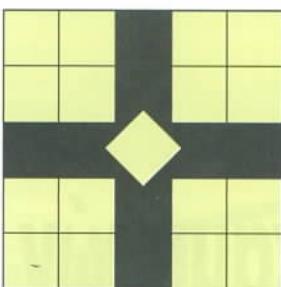
Απάντηση: Είναι $\sqrt{5}$. Θεωρώ σχεδόν βέβαιο ότι το γεγονός αυτό είχε ανακαλυφθεί και στην αρχαιότητα —για παράδειγμα, ο Αρχιμήδης ενδεχομένως να το γνώριζε.

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι το πλήθος αυτών των ευθειών δεν μπορεί να υπερβαίνει το $\sqrt{5}$. Πράγματι, έστω l_1 και l_2 δύο από τις εν λόγω ευθείες που διέρχονται από το σημείο O . Τότε, όλες οι άλλες ευθείες αυτού του συνόλου πρέπει να ανίκουν στην τομή δύο κωνικών επιφανειών: για την πρώτη, η l_1 είναι άξονας και η l_2 γενέτειρα για τη δεύτερη, η l_2 είναι άξονας και η l_1 γενέτειρα. Τέτοιες επιφανεις δεν μπορούν να τέμνονται κατά περισσότερες από τέσσερις ευθείες.

Παράδειγμα $\sqrt{5}$ ευθειών με τη ζητούμενη ιδιότητα μας δίνουν οι διαγώνιοι ενός εικοσαέδρου (το κανονικό εικοσαέδρο έχει 12 κορυφές). Αν δυσκολεύεστε να φανταστείτε ένα εικοσαέδρο, μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ως εξής: Θεωρήστε $\sqrt{5}$ διανύσματα $(a, \pm b, 0)$, $(\pm b, 0, a)$ και $(0, a, \pm b)$ και χρησιμοποιήστε τα ως κατευθύνοντα διανύσματα των ευθειών που θα κατασκευαστούν. Αφού όλα αυτά τα διανύσματα έχουν το ίδιο μήκος, οι απόλυτες τιμές των εσωτερικών γινομένων τους (ανά δύο) θα είναι επίσης ίσες. Αν υποθέσουμε ότι $a \geq b > 0$, προκύπτει η εξίσωση $a^2 - ab - b^2 = 0$. Για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε $b = 1$ και

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Σε κανένα άλλο πεδίο των μαθηματικών δεν είναι τόσο μικρή η απόσταση μεταξύ μιας σχολικής άσκησης και ενός ανοικτού προβλήματος όσο στη γεωμετρία. Για παράδειγμα, οι διατυπώσεις των επόμενων προ-



Σχήμα 11

βλημάτων δεν φαίνεται να διαφέρουν ιδιαίτερα: Βρείτε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού τριγώνου που περιέχει έναν μοναδιαίο κύκλο και βρείτε το σχήμα με το ελάχιστο εμβαδόν το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καλύψει οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα μοναδιαίας διαμέτρου. Και όμως, το πρώτο πρόβλημα είναι μια απλή άσκηση ενώ το δεύτερο είναι το ανοικτό πρόβλημα του Lebesgue περί ελάχιστης κάλυψης. Για να διατυπώσει κάποιος ένα τέτοιο ενδιαφέρον και σημαντικό πρόβλημα, πρέπει να κατανοεί σε βάθος τα μαθηματικά. Καλό είναι να θυμάστε την παροιμία ότι ένας ανόητος μπορεί να κάνει μια ερώτηση την οποία δεν θα μπορούν να απαντήσουν εκατό ξέπνοι.

Μια άλλη διαφορά της γεωμετρίας από πολλούς άλλους κλάδους των μαθηματικών είναι ότι επιτρέπει τον πειραματισμό —με την άμεση, πραγματική σημασία του όρου. Πολλές γεωμετρικές ανακαλύψεις της αρχαιότητας υπήρξαν αποτέλεσμα παρατηρήσεων και πειραμάτων. Είναι πιθανόν ότι ο αξιοσημείωτος σύγχρονος γεωμέτρης Connelli, ο οποίος κατασκεύασε ένα μεταμορφωνόμενο n -έδρο (ένα n -έδρο που μπορεί να αλλάξει σχήμα ενώ οι έδρες του παραμένουν αμετάβλητες), πειραματίζοταν κατά την πορεία της εργασίας του —δηλαδή, δημιουργούσε φυσικά μοντέλα. Το n -έδρο του Connelli έλυ-

σε ένα από τα παλαιότερα μαθηματικά προβλήματα. Το γεγονός ότι αυτή η λύση αποδείχτηκε τελείως στοιχειώδης μοιάζει απίθανο —ειδικά αν λάβουμε υπόψη το επίπεδο ανάπτυξης των σύγχρονων μαθηματικών. Αυτό συμβαίνει πολύ σπάνια και ίσως μόνο στη γεωμετρία.

Θα ήθελα να σας δώσω ένα μικρό παράδειγμα ανακάλυψης που έγινε πειραματικά. Ιδού ένα πρόβλημα της στοιχειώδους γεωμετρίας: Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μοναδιαίων τετραγώνων που μπορεί να αποκοπεί από ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους $4 + a$, όπου $0 < a < 1$; Το συγκεκριμένο πρόβλημα έλκυσε το ενδιαφέρον πολλών σημαντικών μαθηματικών —για παράδειγμα, του ούγγρου Paul Erdős. Ήταν η πηγή ενός άλλου προβλήματος το οποίο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Mathematics in School*.

Δίνεται ότι από ένα τετράγωνο πλευράς $4 + a$ μπορούν να αποκοπούν 17 μοναδιαία τετράγωνα. Βρείτε το ελάχιστο a για το οποίο μπορεί να γίνει αυτό.

Το πρόβλημα αυτό δεν είναι ίσως ιδιαίτερα κομψό, όμως δεν είναι και ανούσιο. Δεν περιμέναμε από τους αναγνώστες μας να δώσουν ακριβή απάντηση. Οι περισσότεροι έδωσαν την απάντηση του Σχήματος 11a, όπου $a = \sqrt{2}/2$.

Μια απόρσμενη απάντηση προήλθε από τη μαθηματική λέσχη του Σχολείου 51 του Κιέβου. Τα μέλη της λέσχης ανακάλυψαν πειραματικά ότι το ελάχιστο α προκύπτει από τη διευθέτηση του Σχήματος 11β. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι σε αυτή τη διευθέτηση το a είναι αρκετά εκατοστά της μονάδας μικρότερο από το a που αντιστοιχεί στη διευθέτηση του Σχήματος 11a. Δυσκολεύομαι να επιβεβαιώσω την εγκυρότητα του αποτελέσματος, διότι δεν έχω λεπτομερή πειργραφή του πειράματος. Εκτός αυτού, η μαθηματική μου παιδεία με εμποδίζει να αποδεχτώ μια τέτοια «απόδειξη». Τελικά, όπως φαίνεται, δεν χρειάζεται να είστε μαθηματική ιδιοφυΐα για να κάνετε γεωμετρικές ανακαλύψεις —αυτό το πρόβλημα αποδεικνύει ότι κάθε μαθητής μπορεί να τα καταφέρει. Γιατί όχι και σεις!

Η φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών

Οι ιδιότητες του ηλίου κοντά στο απόλυτο μηδέν και η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας

A. Buzdin και V. Tugushev

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΥΣΙΩΝ ΣΕ ΧΑΜΗΛΕΣ θερμοκρασίες απασχολούν τους επιστήμονες από μακρού. Τον 18ο αιώνα, ο Antoine Lavoisier (1743-1794), ο πατέρας της σύγχρονης χημείας, έγραψε ότι αν η Γη ήταν δυνατόν να εκτεθεί σε τόσο δριμύ ψύχος ώστε όλοι οι ποταμοί και οι ωκεανοί να γίνουν βουνά πάγου και ο αέρας να μετατραπεί σε ένα ορατό υγρό, αυτός ο μετασχηματισμός θα άνοιγε πρωτόφαντες δυνατότητες για την παραγωγή ασυνθιστών καινούργιων υγρών με αντικουστες ιδιότητες. Και πράγματι, η προαιρήση του Lavoisier για την ανακάλυψη ενός συναρπαστικού νέου κόσμου στις χαμηλές θερμοκρασίες βγήκε αληθινή σε όλα της τα σημεία. Η έρευνα των ιδιοτήτων που επιδεικνύει η ύλη στις χαμηλές θερμοκρασίες αποτελεί στην εποχή μας μείζονα κλάδο της σύγχρονης φυσικής.

Η συμπεριφορά των ουσιών κοντά στο απόλυτο μηδέν δεν έχει απολύτως καμία σχέση με τις συνήθεις ιδιότητές τους όπως τις γνωρίζουμε στις κανονικές θερμοκρασίες. Πολλά υπέροχα φαινόμενα εκδηλώνονται αποκλειστικά και μόνο σε εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες, ενώ υπό κανονικές συνθήκες συγκαλύπτονται, κατά κανόνα, από τη θερμική κίνηση των ατόμων. Για παράδειγμα, η επίτευξη πολύ χαμηλών θερμοκρα-

σιών αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για να καταστεί δυνατή η παρατήρηση της υπεραγωγιμότητας —της ικανότητας που έχουν ορισμένες ουσίες να άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα χωρίς και την ελάχιστη έστω αντίσταση στη ροή του. Αυτό το καταπληκτικό φαινόμενο, το οποίο δεν έχει αντίστοιχο του στην κλασική φυσική, το ανακάλυψε ο εξέχων ολλανδός επιστήμονας Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926). Όντας ο πρώτος άνθρωπος που κατάφερε να υγροποιήσει το ήλιο, ο Kamerlingh-Onnes ανέλαβε στη συνέχεια τη διεξοδική διερεύνηση των ιδιοτήτων του, φτάνοντας ώς την ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας. Αν μπόρεσε να επιτύχει έναν τέτοιον άθλο, τούτο οφείλεται πρωτίστως στο ότι ο Kamerlingh-Onnes είχε τη δυνατότητα να πραγματοποιεί έρευνα ρουτίνας σε χαμηλές θερμοκρασίες. Έτσι, λοιπόν, μπήκαμε στο θέμα στο οποίο αφιερώνεται το παρόν άρθρο: σκοπός μας είναι να αφηγηθούμε την ιστορία της παραγωγής του υγρού ήλιου και της ανακάλυψης της υπεραγωγιμότητας.

Η υγροποίηση των αερίων

Οι έρευνες στη φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών συνδέονται στενά με την υγροποίηση των αερίων. Όπως γνωρίζετε, πολλά αέρια δεν μετατρέπονται σε υγρά παρά μόνο σε

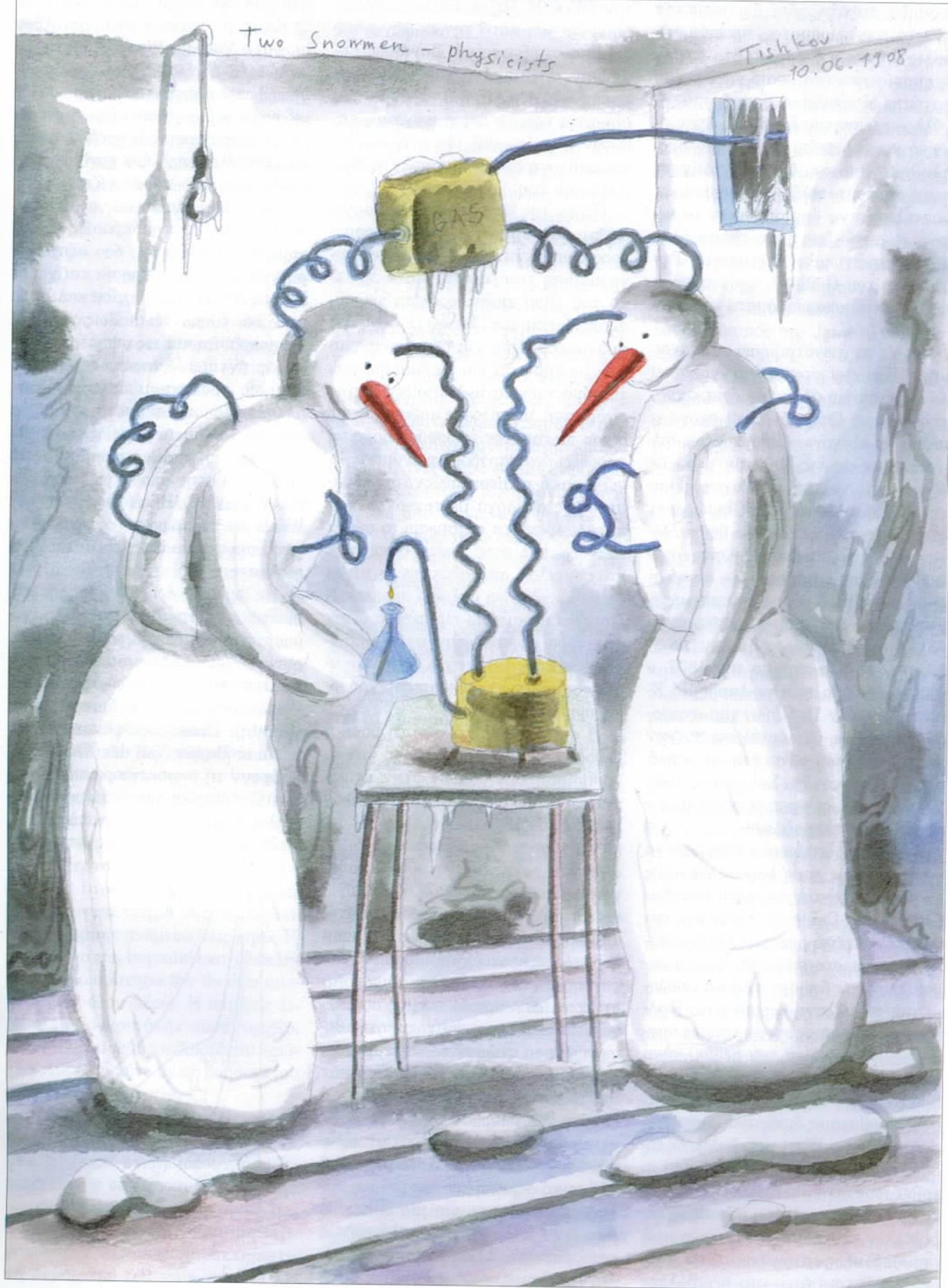
εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες. Όταν ένα υγρό «αέριο» (μια ουσία, δηλαδή, που υπό συνήθεις συνθήκες βρίσκεται στην αέρια κατάσταση) εισάγεται σε ένα δοχείο, εξαερώνεται και, κατά τη διαδικασία αυτή, απορροφά θερμότητα από το περιβάλλον. Όσο στο δοχείο παραμένει έστω και μία σταγόνα υγρού αερίου, η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή (και ίση με το σημείο βρασμού του).

Η ιστορία της υγροποίησης των αερίων της ατμόσφαιρας αρχίζει το 1877 και σημαδεύεται από τα ονόματα του γάλλου επιστήμονα Louis Paul Cailletet (1832-1913) και του ελβετού φυσικού Raoul-Pierre Pictet (1842-1929). Η επιστημονική προσέγγιση που ακολούθησε ο Cailletet τού επέτρεψε να επιτύχει την υγροποίηση των βασικών αερίων της ατμόσφαιρας λίγες μόνο εβδομάδες πριν από τον Pictet, ενώ η μηχανολογική δεινότητα του Pictet οδήγησε στην ανάπτυξη συσκευών που βασίζονται στην αρχή της κλιμακωτής ψύξης, η οποία αργότερα εφαρμόστηκε στο μεγαλύτερο μέρος των κρυογονικών ερευνών.

Σε ένα από τα πειράματά του, ο Gailletet επιχείρησε να υγροποιήσει ακετυλένιο υπό υψηλή πίεση. Ένα αεροστεγές επισφράγισμα της διάταξης δεν άντεξε, και το συμπεισμένο αέριο άρχισε να διαρρέει. Ο Gailletet,

Two Snowmen - physicists

Tishkov
10.06.1908



ο οποίος παρατηρούσε άγρυπνα την εξέλιξη του πειράματος, πρόσεξε ότι, μόλις άρχισε η διαρροή, στο δοχείο σχηματίστηκε ένα αραιό νέφος, που κατόπιν εξαφανίστηκε απότομα. Ο γάλλος ερευνητής διατύπωσε την άποψη πως η πτώση πίεσης που προκλήθηκε από τη διαρροή οδήγησε στην απότομη ψύξη του αερίου, με αποτέλεσμα να δημιουργήθει το νέφος, το οποίο δεν ήταν τίποτε άλλο από συμπυκνωμένο ακετυλένιο. Την υπόθεση του Gailletet την επιβεβαίωσαν τα επίπονα πειράματα που ακολούθησαν.

Χωρίς να χρονοτριβήσει ούτε στιγμή, ο Cailletet άρχισε να υγροποιεί το ένα μετά το άλλο τα αέρια της ατμόσφαιρας. Ως πρώτο του στόχο επέλεξε το οξυγόνο. Αυτό το αέριο συμπέστηκε ώς τις 300 atm μέσα σε ένα παχύτοιχο γυάλινο δοχείο, όπου και ψύχθηκε στους -29°C μαζί με εξατμιζόμενο διοξείδιο του θείου. Όταν το δοχείο αποσυμπέστηκε ταχέως, ο Cailletet μπόρεσε να παρατηρήσει ένα μικρό νέφος συμπυκνωμένου αερίου. Δεν υπήρχε καμία αμφιβολία: αυτό το νέφος ήταν υγρό οξυγόνο. Τον Δεκέμβριο του 1877, ο Cailletet υπέβαλε στην Ακαδημία Επιστημών των Παρισίων μια αναφορά σχετικά με τα αποτελέσματα των πειραμάτων του πάνω στην υγροποίηση του οξυγόνου. Σύντομα ο Cailletet κατόρθωσε να επιτύχει και την υγροποίηση του αζώτου.

Δεν δυσκολευόμαστε ιδιαίτερα να αντιληφθούμε τους λόγους για τους οποίους ψύχονταν τα αέρια στα πειράματα του Cailletet. Όταν ένα αέριο εκτονώνεται αρκετά γρήγορα, τότε ανάμεσα στο σύστημα και το περιβάλλον του δεν συντελείται υπολογίσιμη ανταλλαγή θερμότητας. Εφόσον, λοιπόν, επικρατούν τέτοιες συνθήκες, η εκτόνωση του αερίου είναι σχεδόν αδιαβατική. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, στις αδιαβατικές διαδικασίες ισχύει η σχέση $\Delta U = -W$ (η μεταβολή, δηλαδή, της εσωτερικής ενέργειας του αερίου ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το έργο που εκτελεί το αέριο στο περιβάλλον του και έχει αντίθετο πρόσημο). Καθώς εκτονώνεται, το αέριο εκτελεί θετικό έργο στο περιβάλλον

του ($W > 0$). Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι κατά την εν λόγω διαδικασία οι εξωτερικές δυνάμεις παράγουν αρνητικό έργο. Επομένως, προκύπτει ότι $\Delta U < 0$, πράγμα που σημαίνει πως το αέριο ψύχεται, καθόσον η εσωτερική του ενέργεια είναι ανάλογη προς την απόλυτη θερμοκρασία του.

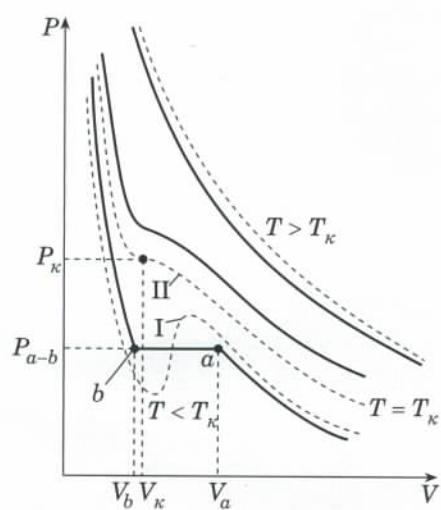
Πέραν της θερμοκρασίας, υπάρχει ακόμη μία σημαντικότατη παράμετρος η οποία επηρεάζει καίρια την υγροποίηση των αερίων. Κατά τα τέλη του 18ου αιώνα, ο ολλανδός φυσικός Martin von Marum (1750-1837) πραγματοποίησε μια σειρά πειραμάτων με αμμωνία για να επαληθεύσει το νόμο των Boyle-Mariotte. Όντας εξαιρετικά λεπτολόγος παρατηρητής, ο von Marum δεν μπορούσε παρά να προσέξει ένα παράδοξο φαινόμενο. Ενώ αρχικά η πίεση αυξανόταν αντιστρόφως ανάλογα με τον όγκο που καταλάμβανε το συμπεσμένο αέριο, όταν έφτανε στις 7 atm συνέβαινε κάτι εντελώς απροσδόκητο: η πίεση ήταν αδύνατο να αυξηθεί περισσότερο μέσω περαιτέρω συμπίεσης. Στον κύλινδρο εμφανίζοταν υγρή αμμωνία, και κάθε περαιτέρω συμπίεση απλώς παρήγαγε περισσότερο υγρό, όχι υψηλότερη πίεση.

Η συμπίεση αποτέλεσε τη βασική μέθοδο που εφαρμόστηκε για την υγροποίηση των αερίων στην πειραματική θερμοδυναμική κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα. Ωστόσο, παρά τις επανειλημμένες προσπάθειες, οι επιστήμονες αδύνατούσαν να υγροποιήσουν αέρια όπως το υδρογόνο, το άζωτο και το οξυγόνο. Αυτές οι ουσίες παρέμεναν αέριες όσο υψηλές πιεσεις και αν χρησιμοποιούνταν για τη συμπίεση και την υγροποίησή τους. Δεν πρέπει να μας παραξενεύει, λοιπόν, που οι ερευνητές θεωρούσαν τα εν λόγω αέρια «έμμονα», ή «μόνιμα». Με άλλα λόγια, πίστευαν ότι το υδρογόνο, το άζωτο και το οξυγόνο δεν μπορούσαν να υπάρξουν στην υγρή κατάσταση. Εντούτοις, ανέκυπτε το ενοχλητικό ερώτημα γιατί μερικά αέρια ήταν έμμονα και άλλα όχι. Επρόκειτο για μια δυσκολία που δεν έμελλε να την επλύσουν οι πειραματιστές αλλά ο περίφημος ολλανδός θεωρητικός φυσικός Johan-

nes Van der Waals (1837-1922).

Κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, ο Van der Waals εξήγαγε μια απλούστατη εξίσωση για την περιγραφή των πραγματικών αερίων. Το «ιδανικό αέριο», που τόσο συχνά απαντά στους φυσικούς υπολογισμούς δεν αποτελεί παρά ένα χονδρικό μοντέλο το οποίο προσεγγίζει τις ιδιότητες των πραγματικών αερίων μόνο στις υψηλές θερμοκρασίες και τις χαμηλές πυκνότητες: όσο υψηλότερη γίνεται η θερμοκρασία και χαμηλότερη η πυκνότητα, τόσο καλύτερα αποδίδει το μοντέλο. Στις χαμηλές θερμοκρασίες και τις υψηλές πυκνότητες, αντίθετα, αποκτά εξαιρετική σημασία ο ρόλος που παίζουν τόσο οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα μόρια όσο και το ίδιο το μέγεθός τους (παράγοντες οι οποίοι παραβλέπονται αμφότεροι στην προσέγγιση του ιδανικού αερίου). Η εξίσωση Van der Waals για τα πραγματικά αέρια λαμβάνει υπόψη και τους δύο αυτούς παράγοντες.

Το Σχήμα 1 δείχνει πειραματικές ισόθερμες για πραγματικά αέρια (χαραγμένες με συνεχή γραμμή) και μερικές θεωρητικές καμπύλες που προκύπτουν βάσει της εξίσωσης Van der Waals (χαραγμένες με διακεκομένη γραμμή). Όπως σαφώς διαπιστώνουμε, οι ισόθερμες Van der Waals περιγράφουν τη συμπεριφορά των πραγματικών αερίων ακριβέστερα στις υψηλές θερμοκρασίες. Με άλλα λόγια, η εξίσωση Van der Waals αντιπροσω-



Σχήμα 1

πεύει επίσης ένα προσεγγιστικό μοντέλο των πραγματικών αερίων. Εντούτοις, η συγκεκριμένη εξίσωση περιγράφει το εμπειρικό δεδομένο ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές καταστάσεις (φάσεις) της ύλης —η υγρή και η αέρια. Η εξίσωση προβλέπει ότι υφίσταται κάποια κρίσιμη θερμοκρασία πάνω από την οποία η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών φάσεων εξαφανίζεται.

Το βασικό γνώρισμα που χαρακτηρίζει την ισόθερμη I του Σχήματος 1 συνίσταται στην παρουσία του τμήματος όπου η πίεση αυξάνεται αυξανομένου του όγκου. Όπως εύκολα αντιλαμβανόμαστε, το εν λόγω τμήμα της ισόθερμης I, όπου η πίεση συμπεριφέρεται ως αύξουσα συνάρτηση του όγκου, σημαίνει ότι στη συγκεκριμένη περιοχή το αέριο παρουσιάζει αστάθεια.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε έναν κύλινδρο εφοδιασμένο με έμβολο που περιέχει αέριο: Στην περιοχή ανάμεσα στα σημεία *a* και *b* επί της ισόθερμης I, κάθε τυχαία μείωση στον όγκο του αερίου θα συνεπέφερε μια αντίστοιχη μείωση της πίεσης που ασκείται στο έμβολο, πράγμα το οποίο σημαίνει περαιτέρω συμπίεση του αερίου. Συνεπώς, σ' αυτή την περιοχή δεν μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία Van der Waals: Η μετάβαση από την αέρια φάση στην υγρή (η υγροποίηση) συμβαίνει ακριβώς εδώ. Η πίεση στο σύστημα παραμένει σταθερή κατά τη συμπύκνωση και ισούται με την τάση των κορεσμένων ατμών. Τούτη η σταθερή πίεση αντιστοιχεί στο οριζόντιο τμήμα της πειραματικής ισόθερμης ανάμεσα στις τιμές V_a και V_b . Όταν η συμπύκνωση ολοκληρωθεί, στο σύστημα δεν θα έχει απομείνει καθόλου αέριο. Η ακριβής τιμή V του όγκου στην οποία αρχίζει η συμπύκνωση προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο με τη βοήθεια του πειράματος.

Όταν η θερμοκρασία ανέρχεται, το μέγιστο και το ελάχιστο του ασταθούς τμήματος πλησιάζουν μεταξύ τους, ώσπου σε κάποια θερμοκρασία «συγχωνεύονται» (ισόθερμη II του Σχήματος 1). Τούτη η κρίσιμη θερμοκρασία T_c αποτελεί χαρακτηριστική παράμετρο του κάθε αερίου. Ό-

ταν η θερμοκρασία υπερβαίνει την T_c , το αέριο αποκλείεται να υγροποιηθεί, όσο μεγάλη πίεση κι αν του εφαρμόσουμε. Με άλλα λόγια, η T_c είναι η μέγιστη από τις θερμοκρασίες όπου κάποια ουσία μπορεί να υπάρξει στην υγρή κατάσταση. Η αντίστοιχη τιμή P_c της κρίσιμης πίεσης αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τάση των κορεσμένων ατμών της ουσίας, ενώ ο κρίσιμος όγκος V_c καθορίζει τη μέγιστη πυκνότητα των ατμών. Καθώς η ουσία πλησιάζει στο κρίσιμο σημείο, η διαφορά πυκνότητας ανάμεσα στο αέριο και το υγρό μειώνεται, για να εξαφανιστεί τελείως στις κρίσιμες συνθήκες. Προσέξτε ότι στην περίπτωση του ιδανικού αερίου έχουμε $T_c = 0$, κάτιο το οποίο σημαίνει πως σε καμία (πεπερασμένη) θερμοκρασία δεν λαμβάνει χώρα συμπύκνωση. Η τέτοια κατάσταση των πραγμάτων εξηγείται από το γεγονός ότι στο μοντέλο του ιδανικού αερίου δεν λαμβάνονται καθόλου υπόψη οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε, καθίσταται πλέον σαφές ότι οι ερευνητές προσπαθούσαν (και φυσικά αποτύχαναν) να υγροποιήσουν μερικά αέρια σε θερμοκρασίες ανώτερες από τα κρίσιμα σημεία τους. Εφόσον κάτιο τέτοιο αποκλείεται να συμβεί για οποιαδήποτε τιμή της πίεσης, τα συγκεκριμένα αέρια θεωρήθηκαν εσφαλμένα «έμπονα».

Όλο και πιο κοντά στο

υγρό ήλιο

Μολονότι ο Cailletet κατόρθωσε να υγροποίησε το οξυγόνο, εξακολουθούσε να αντιμετωπίζει ένα ακόμη σημαντικό πρόβλημα: δεδομένου ότι το οξυγόνο εξαερώνεται ταχύτατα υπό κανονικές συνθήκες, έπρεπε να βρει κάποιον τρόπο που θα του επέτρεπε να διατηρεί μια σημαντική ποσότητά του στην υγρή φάση. Αυτό το πρόβλημα ο Cailletet δεν κατάφερε να το λύσει ποτέ. Το επόμενο ήλιμα —από τη συμπύκνωση στην πραγματική υγροποίηση— το πραγματοποίησαν οι πολωνοί φυσικοί Karol Stanislav Olszewski και Zygmunt von Florenty Wroblewski, οι οποίοι αντικατέστησαν την ανεπαρκή και

χαμηλής παραγωγής διάταξη του Cailletet με τις μηχανές κλιμακωτής ψύξης του Pictet και κατόρθωσαν να πάρουν υγρό οξυγόνο, «το οποίο έβραζε ήρεμα στον δοκιμαστικό σωλήνα». Εντούτοις, παρά τις αλλεπαλληλες προσπάθειες, ο Wroblewski και ο Olszewski αδυνατούσαν να πλουτίσουν τον κατάλογο των υγροποιημένων αερίων, διότι το υδρογόνο απέκρουε σθεναρά κάθε απόπειρα για την υγροποίησή του. Ο πρώτος άνθρωπος που παρατήρησε υδρογόνο στην υγρή κατάσταση υπήρξε ο βρετανός φυσικός σερ James Dewar, το 1898.

Στην Ολλανδία, η σκυτάλη στην κούρσα για την υγροποίηση των αερίων πέρασε στον Heike Kamerlingh-Onnes, ο οποίος υπήρξε φίλος του Van der Waals και επηρεάστηκε από το έργο του. Το 1882, ο Kamerlingh-Onnes ανέλαβε την ηγεσία του Εργαστηρίου Κρυογονικής στο Πανεπιστήμιο του Λεΐντεν. Το πρώτο του ήλιμα σ' αυτό το πεδίο ήταν να επαληθεύσει πειραματικά τις θεωρητικές προβλέψεις της θεωρίας του Van der Waals σχετικά με τις κρίσιμες τιμές της θερμοκρασίας και της πίεσης στις οποίες ένα αέριο μπορεί να μετατραπεί σε υγρό.

Ο Kamerlingh-Onnes πειραματίστηκε με πολλά διαφορετικά αέρια, ψύχοντάς τα σε ολοένα και χαμηλότερες θερμοκρασίες και μετρώντας τις ισόθερμες τους. Από όλα αυτά, περισσότερο τον προβλημάτισε το ήλιο, το οποίο συνέχιζε εκείνη την εποχή να ανθίσταται στις προσπάθειες υγροποίησής του. Το γεγονός ότι το ήλιο παραμένει αέριο έως και σε θερμοκρασίες εξαιρετικά χαμηλές καθιστά δυνατή τη λήψη δεδομένων για τις αλληλεπιδράσεις των μορίων από τις πειραματικές ισόθερμες (επειδή στις χαμηλές θερμοκρασίες η απόκλιση ενός πραγματικού αερίου από το μοντέλο του ιδανικού αερίου εκδηλώνεται με τη μέγιστη δυνατή καθαρότητα).

Το 1907, ο Kamerlingh-Onnes δημοσίευσε τα αποτελέσματα των μετρήσεών του σχετικά με τις ισόθερμες του ήλιου σ' ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών που εκτεινόταν από τους -216°C ως τους $+100^{\circ}\text{C}$. Δεν άργη-

σαν να ακολουθήσουν και μετρήσεις στη θερμοκρασία του υγρού υδρογόνου (-259°C).

Η έρευνα σε τόσο χαμηλές θερμοκρασίες απαιτούσε ειδικό εξοπλισμό και οδήγησε στην ανάπτυξη της τεχνολογίας υγροποίησης των αερίων. Εν προκειμένω, ενδείκνυται να πούμε λίγα λόγια για τα ιδιαίτερα χαρίσματα που διέκριναν τον Kamerlingh-Onnes, ο οποίος συνέβαλε τόσο αποφασιστικά στις προόδους που επιτεύχθηκαν στη φυσική των χαμηλών θερμοκρασιών στο εργαστήριο του Λέιντεν.

Ο Kamerlingh-Onnes συγκαταλεγόταν σε εκείνους τους καινοτόμους που είχαν πλήρη συνειδήση του γεγονότος ότι οι εκλεπτυσμένες πειραματικές τεχνικές απαιτούσαν έμπειρους και επαγγελματικά εκπαιδευμένους ειδικούς. Διαισθάνθηκε ότι η εποχή όπου ερασιτέχνες καθηγητές εκτελούσαν πειράματα με κακότεχνες διατάξεις κατασκευασμένες κατ' οίκον είχαν παρέλθει ανεπιστρεπτί. Η περαιτέρω διείσδυση στα βαθύτερα επίπεδα των φυσικών μηχανισμών θα καθίστατο δυνατή μόνο με τη βοήθεια μιας ειδικής «βιομηχανίας» αφοσιωμένης στην ανάπτυξη και παραγωγή επιστημονικών οργάνων. Το 1901, ο Kamerlingh-Onnes οργάνωσε ένα υαλουργείο στο εργαστήριό του. Δεν παρέλειπε να τονίζει συνεχώς ότι οι φυσικές παρατηρήσεις πρέπει να εκτελούνται με αστρονομική ακρίβεια: «Door meten tot weten» (Διά της μετρήσεως προς την γνώσην). Οι απαιτήσεις αυτές θα μπορούσαν να ικανοποιηθούν μόνο με τη βελτίωση της εκπαιδευσης και της επαγγελματικής κατάρτισης των ερευνητών. Ουσιαστικά, το εργαστήριο κρυογονικής του Kamerlingh-Onnes αποτέλεσε το υπόδειγμα και το μοντέλο για τα ερευνητικά ίνστιτούτα του 20ού αιώνα.

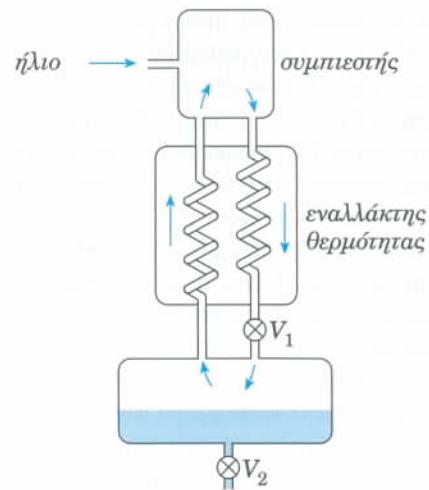
Επιπλέον, ο Kamerlingh-Onnes συναισθανόταν πλήρως τη ζωτική σημασία που έχει η έγκαιρη ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των επιστημόνων. Για να υπηρετήσει αυτό το σκοπό, ίδρυσε το περιοδικό *Communications from the Physics Laboratory at the University of Leyden* (Ειδήσεις από το εργαστήριο φυσικής

του Πανεπιστημίου του Λέιντεν), το οποίο δημοσίευε τα αποτελέσματα των πειραμάτων που διεξάγονταν στο εργαστήριό του. Επιπλέον, οι πόρτες του εργαστηρίου του ήταν πάντα ορθάνοιχτες για οποιονδήποτε επιθυμούσε να εργαστεί στην κρυογονική φυσική και τεχνολογία. Η τακτική αυτή αντιπροσώπευε ένα νέο επιστημονικό στυλ και έναν καινούργιο τύπο σχέσεων μεταξύ επιστημόνων που προέρχονταν από ξένες χώρες και από διαφορετικές επιστημονικές σχολές.

Η υγροποίηση του ήλιου

Πάνω απ' όλα, όμως, το ενδιαφέρον του Kamerlingh-Onnes παρέμενε σταθερά προστηλωμένο στις κρίσιμες παραμέτρους του ήλιου, ιδίως δε στην κρίσιμη θερμοκρασία του T_c . Μετρώντας τις ισθέρμες του ήλιου σε όλο και χαμηλότερες θερμοκρασίες, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η T_c βρισκόταν κάπου ανάμεσα στους 5 K και τους 6 K. Ο Kamerlingh-Onnes έτρεφε την πεποίθηση ότι το ήλιο ήταν δυνατόν να ψυχθεί σε υποκρίσιμες θερμοκρασίες με την ταχύτατη εκτόνωση του αερίου αφού πρώτα αυτό είχε συμπιεστεί στις 100 atm και ψυχθεί από υγρό υδρογόνο. Πραγματικά, κατά τη διάρκεια ενός τέτοιου πειράματος, ο Kamerlingh-Onnes παρατήρησε ένα πυκνό γκρίζο νέφος. Τούτο το νέφος φαινόταν να επιβεβαιώνει τη συμπύκνωση του ήλιου.

Όπως έδειξαν, όμως, τα πειράματα που έγιναν στη συνέχεια, ο πραγματικός λόγος για την εμφάνιση αυτού του νέφους συνίστατο στην παρουσία μιας ελάχιστης ποσότητας υδρογόνου, το οποίο δεν είχε αφαιρεθεί από το ήλιο παρά τον προσεκτικό καθαρισμό. Το πείραμα επαναλήφθηκε με ήλιο που είχε υποβληθεί σε πρόσθετη επεξεργασία, και τότε στο σύστημα δεν εμφανίστηκε κανένα νέφος. Όταν ο Kamerlingh-Onnes αύξησε την ταχύτητα εκτόνωσης, παρατήρησε και πάλι ένα ανοιχτόχρωμο θολό νέφος. Ωστόσο, το νέφος, δεν ήταν πυκνό και εξαφανίστηκε μέσα σε δευτερόλεπτα. Έτσι, το ζήτημα της τιμής της κρίσιμης θερμοκρασίας του ήλιου παρέμεινε ανοιχτό.



Σχήμα 2

Στις 10 Ιουλίου του 1908, πραγματοποιήθηκε το αποφασιστικό πείραμα. Η ιδέα στην οποία στηριζόταν παρουσιάζεται διαγραμματικά στο Σχήμα 2. Έντονα συμπιεσμένο ήλιο περνά από το συμπιεστή σε έναν εναλλάκτη θερμότητας, όπου και ψύχεται από υγρό υδρογόνο. Το συμπιεσμένο και ψυγμένο ήλιο διοχετεύεται σε μια δεξαμενή συλλογής μέσω μιας ειδικής βαλβίδας V_1 , όπου υφίσταται δραστική εκτόνωση και ψύχεται ακόμη περισσότερο. Ενόσω η θερμοκρασία του ήλιου στη δεξαμενή συλλογής παραμένει υψηλότερη από T_c , ουδεμία συμπύκνωση σημειώνεται εκεί, και το ψυγμένο ήλιο επιστρέφει στο συμπιεστή μέσω του εναλλάκτη θερμότητας. Όσο βρίσκεται στον εναλλάκτη θερμότητας, αυτό το μέρος του ήλιου συντείνει στην ψύξη του ήλιου το οποίο ρέει κατά την αντίθετη κατεύθυνση, οπότε το νέο μέρος του αερίου εισέρχεται στη δεξαμενή συλλογής έχοντας χαμηλότερη θερμοκρασία απ' ότι το προηγούμενό του. Αυτή η βήμα προς βήμα διαδικασία μειώνει τη θερμοκρασία του ήλιου που εκτονώνεται στη δεξαμενή συλλογής έως την κρίσιμη τιμή, όπου αρχίζει η συμπύκνωση. Το παραγόμενο υγρό ήλιο αποθηκεύεται σε μια φιάλη Dewar μέσω της ειδικής βαλβίδας V_2 .

Το πείραμα άρχισε στις 5:45 π.μ. με την υγροποίηση 20 λίτρων υδρογόνου που χρειάζονταν για τη μετέπειτα ψύξη του ήλιου. Το συγκεκριμένο έργο περατώθηκε στις 1:30 π.μ. Για την προκαταρκτική ψύξη του

συστήματος με υγρό υδρογόνο, απαιτούνταν εξαιρετική προσοχή. Ακόμη και η ελάχιστη εισοροή αέρα στο σύστημα αρκούσε για να καταδικάσει το πείραμα σε αποτυχία. Ερχόμενος σε επαφή με το υγρό υδρογόνο, ο αέρας θα συμπυκνωνόταν και θα επικαθόταν υπό μορφή πάγου στα τοιχώματα του δοχείου που περιείχε το ήλιο, αποτρέποντας έτσι κάθε περαιτέρω παρατήρηση. Η κυκλοφορία του ηλίου άρχισε στις 4:20 μ.μ., και την ίδια στιγμή ο εσωτερικός κρυοστάτης της υγροποιητικής διάταξης εισερχόταν στην ανεξερεύνητη περιοχή των εξαιρετικά χαμηλών θερμοκρασιών.

Επί μακρόν ο ενδείκτης θερμοκρασίας παρέμενε σχεδόν ακίνητος. Αφού έγιναν οι αναγκαίες συμπληρωματικές ρυθμίσεις της διάταξης, οι ερευνητές παρατήρησαν μια βαθμιαία μείωση της θερμοκρασίας, που όμως σύντομα διακόπηκε. Όλο σχεδόν το απόθεμα του υγρού υδρογόνου είχε ξοδευτεί, κι όμως ακόμη δεν είχε φανεί ούτε η παραμικρή ένδειξη για την υγροποίηση του ηλίου. Στις 7:30 μ.μ. όλα έδειχναν ότι η προσπάθειά τους να υγροποιήσουν το ήλιο είχε αποτύχει, αλλά εκείνη την κρίσιμη στιγμή κάποιος από τους συνεργάτες του Kamerlingh-Onnes επισήμανε ότι η απουσία περαιτέρω προόδου στην ψύξη του ηλίου θα μπορούσε να οφείλεται στο γεγονός ότι το θερμόμετρο ήταν βυθισμένο σ' ένα αόρατο υγρό που έβραζε.

Οι ερευνητές φώτισαν τη δεξαμενή συλλογής από κάτω, και αίφνης ειδαν καθαρά ότι το δοχείο ήταν σχεδόν γεμάτο με ένα υγρό, το οποίο γινόταν ορατό χάρη στην ανάκλαση του φωτός. Είχαν παραγάγει περίπου 60 cm^3 υγρού ηλίου. Νά πώς περιέγραψε ο Kamerlingh-Onnes αυτή την ιστορική στιγμή: «Ήταν ένα υπέροχο θέαμα —η πρώτη εικόνα που αντίκρισε ποτέ κανείς ενός υγρού με σχεδόν άυλη εμφάνιση. Η είσοδος του στο δοχείο πέρασε απαρατήρητη. Δεν έγινε αντιληπτό παρά μόνο όταν γέμισε το δοχείο, όμως και τότε η επιφάνειά του διαγραφόταν τόσο λεπτή όσο η κόψη ενός μαχαιριού. Ένοιωσα ευτυχισμένος που θα μπορούσα να δείξω το υγροποιημένο ήλιο στον

σεβαστό μου φίλο Van der Waals, του οποίου η θεωρία υπήρξε ο μίτος που καθοδήγησε τα πειράματά μας έως την ευτυχή τους κατάληξη.»

Καθώς το περίφημο πείραμα οδηγούνταν προς την ολοκλήρωσή του, ο Kamerlingh-Onnes προσπάθησε να πάρει στερεό ήλιο μειώνοντας την πίεση στο δοχείο όπου έβραζε το υγρό. Για να επιτύχει τη χαμηλότερη δυνατή θερμοκρασία, άφησε το υγρό να βράζει, ώσπου στη δεξαμενή συλλογής δεν απέμειναν παρά μόνο 10 cm^3 απ' αυτό: στη συνέχεια συνέδεσε τον κρυοστάτη ηλίου με μια αντλία κενού, η οποία έριξε την πίεση πάνω από το υγρό που έβραζε στις 0,01 atm. Μολατάτα, κανένα σημείο στερεού ηλίου δεν φάνηκε, και έτσι ο Kamerlingh-Onnes υπέθεσε ότι με τη διάταξη του δεν μπορούσε, δυστυχώς, να φτάσει ως το σημείο πήξης του ηλίου.

Αργότερα, επιχείρησε ακόμη δύο φορές να επιτύχει τη στερεοποίηση του ηλίου, όμως και πάλι απέτυχε. Χρησιμοποιώντας δώδεκα αντλίες για να αφαιρέσει τους ατμούς πάνω από το υγρό ήλιο, μείωσε την πίεση ώς τα $0,013 \text{ mmHg}$ και επέτυχε θερμοκρασία $0,83 \text{ K}$! Ωστόσο, το ήλιο παρέμεινε υγρό ακόμη και σ' αυτή την πρωτοφανώς χαμηλή θερμοκρασία.

Στο πρώτο του πείραμα με υγρό ήλιο, ο Kamerlingh-Onnes έμεινε κατάπληκτος από την εξαιρετικά χαμηλή του πυκνότητα. Όπως αποδείχτηκε, η πυκνότητά του υπολειπόταν εκείνης του νερού κατά έναν παράγοντα 8. Αυτό σημαίνει ότι τα άτομα του ηλίου βρίσκονται σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις το ένα από το άλλο. Συνεπώς, μια τέτοια ουσία παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες δυσκολίες στη στερεοποίησή της απ' ότι τα συνήθη υγρά.

Έτσι εξηγείται γιατί το ήλιο παραμένει υγρό έως και σε εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες. Ωστόσο, θα παρέμενε υγρό ακόμη και πλησίον του απόλυτου μηδενός, καθότι σ' αυτή την περιοχή θερμοκρασιών η στερεοποίησή του αποκλείεται από τους νόμους της κβαντικής μηχανικής. Πράγματι, σύμφωνα με την κλασική φυσική, η θερμική δόνηση των σωματιδίων εξασθενεί όλο και περισσό-

τερο όσο μειώνεται η θερμοκρασία. Κατά συνέπεια, αναμένεται ότι τελικά οι διαμοριακές ελκτικές δυνάμεις θα επιφέρουν τη στερεοποίηση της ψυχόμενης ουσίας. Η κβαντική μηχανική, όμως, διδάσκει πως η αντίληψη ότι τα άτομα σταματούν εντελώς να κινούνται στο απόλυτο μηδέν αποτελεί πλάνη. Στην πραγματικότητα, ακόμη και όταν η θερμοκρασία πέσει στο απόλυτο μηδέν, τα άτομα εκτελούν τις λεγόμενες ταλαντώσεις «μηδενικού σημείου», και οι οποίες δεν σχετίζονται με τη θερμική κίνηση.

Έτσι, η μοναδική συμπεριφορά του υγρού ηλίου στις χαμηλές θερμοκρασίες έρχεται σε αντίφαση με την κλασική φυσική. Σε κανονική πίεση, η ουσία αυτή δεν στερεοποιείται ακόμη και σε θερμοκρασίες που απέχουν ελάχιστα από το απόλυτο μηδέν. Για να στερεοποιηθεί το ήλιο σε θερμοκρασία $T = 1,78 \text{ K}$, απαιτείται τεράστια πίεση 30.000 atm .

Από το πρώτο του κιόλας πείραμα πάνω στην υγροποίηση του ηλίου, ο Kamerlingh-Onnes επεσήμανε άλλη μία παράξενη ιδιότητα του υγρού ηλίου. Όταν η θερμοκρασία έπεφτε κάτω από το σημείο βρασμού, η πυκνότητα του ηλίου παρουσίαζε την αναμενόμενη αύξηση, πράγμα που σήμαινε ότι το ήλιο μπορεί να συμπιεστεί μέσω ψύξης (ή ότι μπορεί να εκτονωθεί μέσω θέρμανσης). Στους $2,2 \text{ K}$, ωστόσο, εμφανιζόταν μια οξεία κορυφή στο διάγραμμα πυκνότητας-θερμοκρασίας, και η περαιτέρω ψύξη οδηγούσε σε ελάττωση της πυκνότητας του υγρού ηλίου. Οι έρευνες που διεξήγαγε ο Kamerlingh-Onnes στα τελευταία χρόνια της ζωής του αποκάλυψαν και άλλες ανώμαλες ιδιότητες του ηλίου σε θερμοκρασίες χαμηλότερες των $2,2 \text{ K}$.

Αργότερα, μετά το θάνατο του Kamerlingh-Onnes το 1926, οι μαθητές του δημοσίευσαν τα αποτελέσματα των μελετών τους σχετικά με το υγρό ήλιο. Το 1932, οι Keesom και Clausius ανακάλυψαν μια δραστική μείωση της ειδικής θερμότητας του ηλίου κοντά στη θερμοκρασία $T = 2,2 \text{ K}$. Έπειτα από μερικά χρόνια, κατέστη σαφές ότι αυτή η θερμοκρασία αποτελεί το ορόσημο μιας μετατρο-

πής φάσης, κατά την οποία αλλάζει όχι μόνο η ειδική θερμότητα αλλά και πολλές άλλες ιδιότητες του υγρού ήλιου. Στην περιοχή θερμοκρασιών που εκτείνεται από τους 2,2 K ώς το σημείο βρασμού του, το ήλιο είναι ένα υγρό με λίγο-πολύ συνηθισμένες ιδιότητες. Αυτό το υγρό αναφέρεται ως He I.

Απεναντίας, στη θερμοκρασιακή περιοχή $T < 2,2$ K το ήλιο επιδεικνύει απροσδόκητες και παράδοξες ιδιότητες. Το 1938, ο εξέχων ρώσος φυσικός Pyotr Kapitsa ανακάλυψε ότι για $T < 2,2$ K το υγρό ήλιο (που αναφέρεται ως He II) δεν παρουσιάζει συνεκτικότητα (ιξώδες) και μπορεί να ρέει σε έναν τριχοειδή σωλήνα χωρίς να συναντά αντίσταση. Με άλλα λόγια, η τριβή είναι κάτι αγνωστό για το He II. Τούτη η ιδιότητα του He II ονομάζεται «υπερρευστότητα». Τη δημιουργία της θεωρίας της υπερρευστότητας την οφείλουμε σε έναν ιδιοφυή συνεργάτη του Kapitsa, στον μεγάλο ρώσο θεωρητικό Lev Landau. Η δημιουργική ενότητα του πειραματικού και θεωρητικού έργου των δύο αυτών γιγάντων της έρευνας κέρδισε την υψηλή εκτίμηση του επιστημονικού κόσμου: Και οι δύο τους τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ.

Στα πειράματα του με το υγρό ήλιο, ο Kamerlingh-Onnes είχε παρατηρήσει τη μετάβαση στην υπεραγώγιμη φάση, αλλά δεν διέθετε το απατούμενο εννοιολογικό πλαίσιο ώστε να εκτιμήσει και να περιγράψει το γεγονός. Δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι εκείνη την εποχή η κβαντική φυσική διήγησε ακόμη το νηπακό της στάδιο. Για να εξηγηθεί η συμπεριφορά του υγρού ήλιου στις χαμηλές θερμοκρασίες, χρειαζόταν πρότα να απορριφθούν οι παλιές κλασικές ιδέες και να δημιουργηθεί μια νέα θεωρία. Τέτοιο έργο μπορούσαν να το φέρουν εις πέρας μόνο οι φυσικοί της επόμενης γενιάς. Τον καιρό του Kamerlingh-Onnes, η διαδικασία της υγροποίησης του ήλιου αποτελούσε έναν μεγάλο επιστημονικό θρίαμβο —τόσο σπουδαίο, μάλιστα, ώστε λογίζοταν ως το τελευταίο στάδιο της πορείας προς το απόλυτο μηδέν.

Η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας

Έχοντας αναπτύξει μια ειδική τεχνική για την επίτευξη θερμοκρασιών γύρω στον 1 K, ο Kamerlingh-Onnes και οι συνεργάτες του πραγματοποίησαν αναρίθμητα πειράματα για να ελέγξουν τις ιδιότητες διαφόρων ουσιών στις «θερμοκρασίες του ήλιου». Η μέτρηση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας γίνεται εύκολα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία. Δεν προκαλεί απολύτως καμία απορία, λοιπόν, το γεγονός ότι ο Kamerlingh-Onnes άρχισε να μελετά πώς συμπεριφέρεται η ειδική αντίσταση στις χαμηλές θερμοκρασίες. Εντούτοις, η επιλογή του αυτή δεν οφειλόταν αποκλειστικά και μόνο σε λόγους πειραματικής απλότητας.

Κατά τις αρχές του 20ού αιώνα, υπήρχαν δύο θεωρίες περί ηλεκτρισμού που οδηγούσαν σε αντίθετες προβλέψεις σχετικά με τη συμπεριφορά της ειδικής αντίστασης στις πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Μία εξ αυτών διατεινόταν ότι η ειδική αντίσταση έπρεπε να μηδενίζεται στο απόλυτο μηδέν. Πράγματι, η ειδική αντίσταση στα μέταλλα είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών προσκρούσεων ενός ηλεκτρονίου πάνω σε άτομα που ταλαντώνται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Όταν η θερμοκρασία πέφτει, το πλάτος των ατομικών ταλαντώσεων φθίνει (μοιάζει σαν τα άτομα να «συρρικνώνονται»), οπότε η πθανότητα του ηλεκτρονίου να συναντήσει κάποιο άτομο γίνεται αμελητέα. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς $T \rightarrow 0$, η ειδική αντίσταση αναμένεται να τείνει στο μηδέν.

Σύμφωνα με τη δεύτερη θεωρία, στις χαμηλές θεωρίες «παγώνουν» τα πάντα, οπότε τα ηλεκτρόνια παύουν να «περιπλανώνται» μέσα στο μέταλλο και πέφτουν πάνω στα άτομα. Εν τοιαύτη περιπτώσει, στο μέταλλο δεν θα απέμεναν φορείς φορτίου, οπότε, καθώς $T \rightarrow 0$, η ειδική αντίσταση θα έπρεπε να απειρίζεται.

Όταν ο Kamerlingh-Onnes άρχισε να μετρά τις ειδικές αντιστάσεις σε χαμηλές θερμοκρασίες, επέλεξε το

λευκόχρυσο ως το πρώτο υλικό που θα υπέβαλλε σε έλεγχο. Πέρα από κάθε προσδοκία, τα αποτελέσματά του δεν συμφωνούσαν με καμία από τις δύο θεωρίες: Η ειδική αντίσταση του εξαιρετικά ψυχρού λευκόχρυσου δεν παρουσίαζε καμία εξάρτηση από τη θερμοκρασία! Ωστόσο, σ' αυτό το τρελό παγωμένο κόσμο θα μπορούσε κανείς να περιμένει οτιδήποτε. Ο Kamerlingh-Onnes πρόσεξε ότι η ειδική αντίσταση διαφόρων δειγμάτων λευκόχρυσου μειωνόταν όσο αυξανόταν η καθαρότητά τους. Έτσι, συμπέρανε ότι, καθώς $T \rightarrow 0$, η ύπαρξη πεπερασμένης ειδικής αντίστασης (η λεγόμενη παραμένουσα ειδική αντίσταση) προκύπτει από τις προσμίξεις, ενώ ένα καθαρό μέταλλο στη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός θα έπρεπε να χαρακτηρίζεται από μηδενική αντίσταση. Ωστόσο, ο Kamerlingh-Onnes υπέθεσε εσφαλμένα ότι η ειδική αντίσταση των καθαρών μετάλλων θα έπρεπε να τείνει βαθμιαία προς το μηδέν, ακόμη και στις «θερμοκρασίες του ήλιου».

Συνεπώς, το πρόβλημα ήταν να εξεταστεί η ειδική αντίσταση των καθαρότερων δυνατών δειγμάτων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του χρυσού μπορεί να επιτευχθεί καθαρότητα πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι για οποιοδήποτε άλλο μέταλλο, και ειδικότερα απ' ό,τι για το λευκόχρυσο. Όπως αναμενόταν, η παραμένουσα ειδική αντίσταση του χρυσού βρέθηκε πολύ χαμηλότερη από εκείνη του λευκοχρύσου και μειωνόταν ακόμη περισσότερο όσο βελτιωνόταν η καθαρότητα του δείγματος.

Εμβαθύνοντας περισσότερο σ' αυτό το πρόβλημα, ο Kamerlingh-Onnes άρχισε να μελετά την ειδική αντίσταση του υδραργύρου σε χαμηλές θερμοκρασίες. Η συγκεκριμένη ουσία παραμένει υψηλή σε θερμοκρασία δωματίου, οπότε το να εξασφαλίσει κανείς δείγματα υδραργύρου υψηλής καθαρότητας με τη μέθοδο των διαδοχικών αποστάξεων αποτελεί μάλλον απλή υπόθεση. Τα φαινομενικώς πληκτικά πειράματα που ακολούθησαν έδωσαν αποτελέσματα εντελώς απροσδόκητα. Η ειδική αντίσταση του υδραργύρου δεν ελαττώνόταν βαθμιαία καθώς η ουσία ψυ-

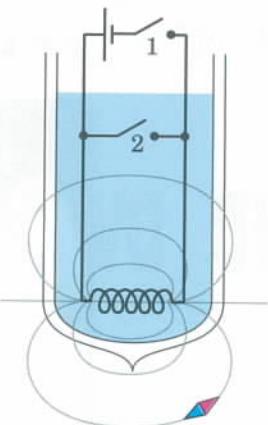
χόταν —όταν η θερμοκρασία έπεφτε κάτω από το σημείο βρασμού του ήλιου, η ειδική αντίσταση μειωνόταν δραστικά και γινόταν τόσο μικρή ώστε να διαφεύγει τη μέτρηση.

Στις 28 Απριλίου 1911, ο Kamerlingh-Onnes παρουσίασε μια αναφορά για τα αποτελέσματα των ερευνών του στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών του Άμστερνταμ. Ονόμασε το νέο φαινόμενο «υπεραγωγιμότητα».

Το 1913 απονεμήθηκε στον Kamerlingh-Onnes το βραβείο Νόμπελ. Στη διάλεξη που έδωσε κατά τη διάρκεια της τελετής, ο ολλανδός επιστήμονας διατύπωσε την άποψη πως το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας πιθανόν να συνδέεται με την κβάντωση της ενέργειας που ανακάλυψε ο Max Planck (1858-1947) στις αρχές του 20ού αιώνα. Άλλα χρειάστηκε να περάσει σχεδόν μισός αιώνας έως ότου δημιουργηθεί η ολοκληρωμένη θεωρία της υπεραγωγιμότητας στη βάση της κβαντικής θεωρίας, όπως ακριβώς προέβλεψε ο μεγάλος εκείνος πρωτοπόρος.

Έχοντας ανιχνεύσει τη μετάβαση της ύλης σε μια άγνωστη έως τότε κατάσταση, ο Kamerlingh-Onnes προσπάθησε να διερευνήσει διεξοδικά τις ιδιότητές της. Το πρώτο ερώτημα ήταν: Πόσο μικρή γίνεται η ειδική αντίσταση ενός υπεραγωγιμού υλικού; Για να απαντήσει, ο Kamerlingh-Onnes έπρεπε να επινοήσει μια μέθοδο μέτρησης της απείρως μικρής ειδικής αντίστασης. Ως συνήθως, κατάφερε να λύσει και αυτό το πρόβλημα με επιτυχία, αναπτύσσοντας μια ευφυέστατη νέα μέθοδο μέτρησης.

Η διάταξη αποτελούνταν από ένα πηνίο κατασκευασμένο από μολύβδινο σύρμα (Σχήμα 3) που μπορούσε να συνδέεται με μια μπαταρία μέσω ενός διακόπτη (1), ενώ ένας άλλος διακόπτης (2) επέτρεπε τη βραχυκύκλωση του πηνίου. Στην αρχή του πειράματος, ο διακόπτης 1 ήταν κλειστός και ο διακόπτης 2 ανοιχτός. Το πηνίο ψυχόταν από υγρό ήλιο που περιεχόταν σε μια φιάλη Dewar και διατηρούνταν στην υπεραγωγιμή κατάσταση. Το ρεύμα από την μπαταρία διέρρεε το πηνίο δημιουργώντας ένα μαγνητικό πεδίο γύρω του, το ο-



Σχήμα 3

ποίο ανιχνευόταν εύκολα με τη βοήθεια μιας μαγνητικής βελόνας τοποθετημένης εξω από τη φιάλη Dewar. Τότε έκλεινε ο διακόπτης 2 (μαντέψυτε πώς κατανέμεται το ηλεκτρικό ρεύμα στους κλάδους του κυκλώματος), και έπειτα από λίγο ανοιγόταν ο διακόπτης 1. Τώρα το υπεραγωγιμό πηνίο έμενε βραχυκυκλωμένο από το διακόπτη 2. Σε ένα συνηθισμένο πηνίο, η κατάσταση αυτή θα οδηγούσε στη βαθμιαία μείωση του ρεύματος που το διαρρέει και την εξασθένηση του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου μέχρι μηδενισμού. Εντούτοις, η μαγνητική βελόνα εξακολουθούσε να παρουσιάζει απόκλιση, ένδειξη που επιβεβαίωνε την ύπαρξη ηλεκτρικού ρεύματος στο πηνίο —έστω κι αν αυτό είχε αποσυνδεθεί από την μπαταρία.

Παρότι συνέχισε να παρατηρεί τη συμπεριφορά της βελόνας επί πολλές ώρες (έως ότου να εξαρθεί το ήλιο από το λουτρό), ο Kamerlingh-Onnes δεν κατόρθωσε να ανιχνεύσει την παραμικρή μεταβολή στη θέση της. Αυτό σήμαινε ότι το πηνίο δεν παρουσιάζει καθόλου αντίσταση —ειδάλλως, θα υπήρχαν απώλειες ενέργειας, το ρεύμα θα έφθινε και το μαγνητικό πεδίο θα εξαφανίζεται, με αποτέλεσμα η μαγνητική βελόνα να επιστρέψει στην αρχική της θέση.

Ο Kamerlingh-Onnes πέτυχε να εκτιμήσει το άνω φράγμα της ειδικής αντίστασης του υπεραγωγιμού μολύβδινου πηνίου, το οποίο προέκυψε μικρότερο από την ειδική του αντίσταση στην κανονική (μη υπεραγωγιμη) κατάσταση κατά έναν παράγοντα τουλάχιστον 10.

Το μακροβιότερο αμείωτο ρεύμα που έχει παρατηρηθεί έως σήμερα διήρκεσε περίπου δύο χρόνια. Αυτό το ρεύμα πιθανόν να είχε εξακολουθήσει να ρέει και στον 21ο αιώνα αν οι εργαζόμενοι στις μεταφορές δεν είχαν κηρύξει απεργία και δεν είχαν διακόψει την παροχή υγρού ήλιου. Ακόμη και έπειτα από δύο ολόκληρα χρόνια κυκλοφορίας του ρεύματος, δεν διαπιστώθηκε ούτε η παραμικρή ένδειξη μείωσής του, εξ ου και συνάγεται πως η ειδική αντίσταση των υπεραγωγών ισούται πρακτικά με μηδέν.

Οι προοπτικές πρακτικής εφαρμογής της υπεραγωγιμότητας μας υπόσχονται πολλά. Οι υπεραγώγιμοι ηλεκτρομαγνήτες δεν καταναλώνουν καθόλου ενέργεια, οπότε θα προσέφεραν έναν εύκολο τρόπο για την παραγωγή πανίσχυρων μαγνητικών πεδίων. Τέτοια πεδία παράγονται συνήθως από τεράστια ρεύματα, τα οποία διαρρέουν ηλεκτρομαγνήτες που εκλύουν τεράστιες ποσότητες θερμότητας. Τούτη η έκλυση θερμότητας, όμως, εμποδίζει κάθε περαιτέρω αύξηση του ρεύματος, η οποία είναι απαραίτητη για την παραγωγή ισχυρότερων πεδίων. Η χρήση υπεραγωγών σε μετασχηματιστές, ηλεκτρικούς κινητήρες και γεννήτριες επίσης υπόσχεται μεγάλα πλεονεκτήματα τα οποία θα μας αποζημιώνουν με το παραπάνω για όλες τις δαπάνες που συνεπάγεται η εργασία στις θερμοκρασίες του ήλιου.

Ο Kamerlingh-Onnes υπήρξε ο πρώτος που κατασκεύασε υπεραγωγιμό ηλεκτρομαγνήτη. Ωστόσο, το εγχείρημα αυτό του επεφύλασσε μια απογοήτευση. Τα πειράματα που διεξήχθησαν στο Εργαστήριο Κρυογονικής του Λεΐντεν έδειξαν σαφώς ότι το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας εξαφανίζεται εφόσον τα μαγνητικά πεδία υπερβαίνουν μια ορισμένη κρίσιμη τιμή. Αυτές οι κρίσιμες (κατωφλιακές) τιμές αποδείχτηκαν μάλλον μικρές —της τάξεως των μερικών εκατοντάδων gauss, δηλαδή σημαντικά χαμηλότερες από την ένταση των πεδίων που παράγονται ακόμη και σε μικρές ηλεκτρικές μηχανές. Τα μεγάλα ρεύματα κατέστρεφαν επίσης την υπεραγωγιμότητα, καθότι τα δημι-

ουργούμενα μαγνητικά πεδία υπερέβαιναν τις κρίσιμες τιμές ακόμη και για μέτριες τιμές του ηλεκτρικού ρεύματος.

Αφού πρώτα καταναλώθηκαν πάρα πολλές δεξαμενές υγρού ήλιου, ανακαλύφθηκαν επιτέλους τα υπεραγώγια υλικά, τα οποία ήταν ικανά να ανθίστανται σε ισχυρά μαγνητικά πεδία και να άγουν τεράστια ρεύματα χωρίς να καταστρέφεται η υπεραγώγιμότητα. Χρειάστηκαν περισσότερα από σαράντα χρόνια πεισματικής εργασίας για να παραχθούν οι πρώτοι υπεραγώγιμοι μαγνήτες που θα μπορούσαν να έχουν πρακτική σημασία. Επί του παρόντος, το κύριο ρεύμα των ερευνητικών εργασιών στην υπεραγώγιμότητα αποσκοπεί στην ανάπτυξη υλικών που γίνονται υπεραγώγια σε υψηλές θερμοκρασίες —ακόμη, ίσως, και σε θερμοκρασίες δωματίου.

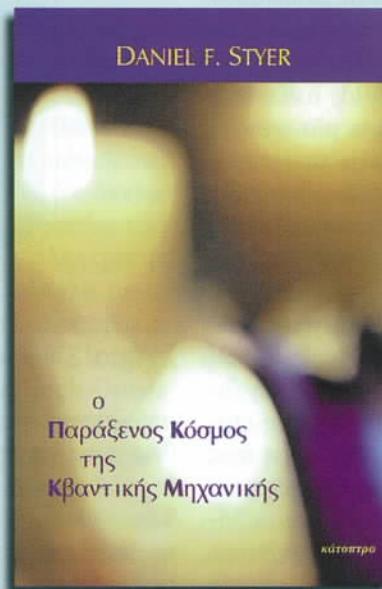
Η έρευνα των φυσικών ιδιοτήτων που παρουσιάζουν οι διάφορες ουσίες σε χαμηλές θερμοκρασίες διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη σύγχρονη εποχή. Η πρόβλεψη του Kamerlingh-Onnes αποδείχτηκε πράγματι αληθινή: «Από κάθε πεδίο της φυσικής προκύπτουν προβλήματα των οποίων η λύση πρόκειται να ανακαλυφθεί στις θερμοκρασίες του ήλιου. Στρέφοντας το βλέμμα στο μέλλον, βλέπω να γίνονται παντού μετρήσεις σε κρυοστάτες γεμάτους υγρό ήλιο, το οποίο θα ρέει τόσο ελεύθερα όσο το νερό. Αναμφίβολα, αυτή η εργασία θα αφαιρέσει τον πέπλο που χρησιμοποιεί η θερμική κίνηση για να αποκρύψει τον εσωτερικό κόσμο των ατόμων και των ηλεκτρονίων στις συνήθεις θερμοκρασίες.»



Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Buzdin και A. Varlamov, «Νικώντας τις αντιστάσεις», Μάιος/Ιούνιος 1994.
- T. Rossing και J. Hull, «Η μαγνητική αιώρηση ενηλικιώνεται», Μάιος/Ιούνιος 1995.
- H. Schreiber, «Κάτω από το απόλυτο μηδέν», Μάρτιος/Απρίλιος 1997.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



DANIEL F. STYER

ο
Παράξενος Κόσμος
της
Κβαντικής Μηχανικής

κάποιατρο

Daniel Styer

Ο Παράξενος Κόσμος της Κβαντικής Μηχανικής

Το βιβλίο, αφού συνοψίζει τις θεμελιώδεις διαφορές ανάμεσα στην κλασική και την κβαντική συμπεριφορά, εξετάζει το πείραμα Stern-Gerlach και τα συνακόλουθά του, εκθέτει εν συντομίᾳ τις βασικές έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων, για να περάσει κατόπιν στην ανάλυση του παραδόξου Einstein-Podolsky-Rosen και του θεωρήματος Bell.

Στη συνέχεια, παρουσιάζει την κβαντική συμβολή και εισάγει την έννοια του πλάτους πιθανότητας, οπότε και μας αποκαλύπτει τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις πιθανότητες και τη συμβολή των πλατών.

Τα τελευταία κεφάλαια διερευνούν ορισμένες συναρπαστικές νέες εξελίξεις στην κβαντική υπολογιστική και κρυπτογραφία, αποκαλύπτουν την απροσδόκητη συμπεριφορά του «κβαντικού μπιλιάρδου» και αντιμετωπίζουν την πρόκληση της περιγραφής ενός σωματιδίου «που δεν έχει θέση».

Το βιβλίο περιλαμβάνει πρωτότυπες ερωτήσεις και προβλήματα —ειδικά σχεδιασμένα για να κεντρίσουν τη σκέψη του αναγνώστη—, τις απαντήσεις τους, καθώς και υποδείξεις για περαιτέρω μελέτη.

Ο παράξενος κόσμος της κβαντικής μηχανικής έχει δύο στόχους: οι μεν σπουδαστές να κατανοήσουν βαθύτερα τη σφαίρα του πολύ μικρού, το δε ευρύ φιλομαθές κοινό να γευτεί τη διανοητική περιπέτεια της φυσικής του 20ού αιώνα.

- «Όταν ο Dan Styer μιλά για κβαντική μηχανική, εγώ απλώς σιωπώ και ακούω.» —Edwin Taylor, MIT, Μετάλλιο Oersted

Μια εξαιρετικά βαπτή, ακριβής και μη τεχνική εισαγωγή στην κβαντική μηχανική

264 σελ., 14,5 × 21,5 εκ., πανόδετο, 7.000 δρχ.

Μαθαίνοντας να σκεφτόμαστε

«Προβλήμασι, ἀρά, ην δ' εγώ χρώμενοι ὡσπερ
γεωμετρίαν ούτω και αστρονομίαν.»

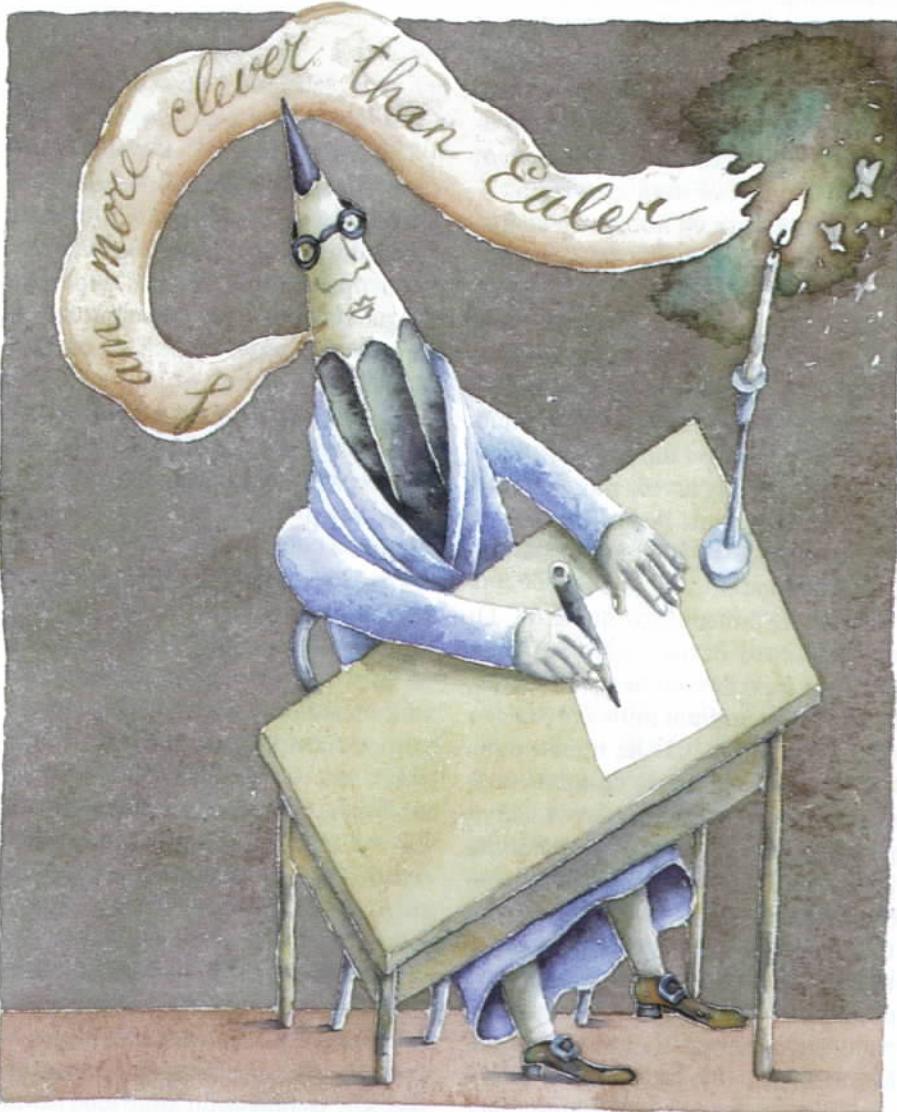
—Πλάτων, *Πολιτεία*, 530.B.6

V. Proizvolov

ΑΕΝ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΜΑΘΕΤΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ βλέποντας απλώς κάποιον άλλο να ασχολείται με αυτά. Μια ενεργή διαδικασία μάθησης εμπεριέχει την επίλυση προβλημάτων αυξανόμενης δυσκολίας: αν λύνετε συνεχώς προβλήματα της ίδιας πάντα δυσκολίας, αυτά καταλήγουν απλώς ασκήσεις ρουτίνας. Αν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σας αντιστέκεται επίμονα, μπορείτε μεν να κοιτάτε το ταβάνι ή να συνοφρυώνεστε (δεν υπάρχει κανείς νόμος που να το απαγορεύει), αλλά το καλύτερο που έχετε να κάνετε είναι να πάρετε χαρτί και μολύβι και να αρχίσετε να πειραματίζεστε: προβείτε σε κάποιες εκτιμήσεις, θεωρήστε ειδικές περιπτώσεις, περιγράψτε τις ιδέες σας, και ούτω καθεξής. Ο Leonard Euler είπε κάποτε: «Το μολύβι μου μερικές φορές κατεβάζει καλύτερες ιδέες απ' το κεφάλι μου.»

Για να αντιμετωπίσετε το πρόβλημα, πρέπει να συγκεντρώσετε την προσοχή σας στις συνθήκες του και στη διατύπωσή του έως ότου εμφανιστεί η πρώτη αναλαμπή μιας ιδέας και η ελπίδα της επιτυχίας. Η επίλυση ενός προβλήματος δεν αποτελεί μόνο διανοητική πρόκληση αλλά και δοκιμασία της θέλησης: απαιτεί «μαθητικό πνεύμα».

Δεν είναι απαραίτητο (ούτε καν



εφικτό) να λύσετε όλα τα γνωστά μαθηματικά προβλήματα. Πρέπει επομένως να διαλέξετε ό,τι θεωρείτε ευχάριστο, διδακτικό, ενδιαφέρον και στα πλαίσια των δυνατοτήτων σας. Μέσα από αυτή τη διαδικασία θα καλλιεργήσετε τα κριτήριά σας και θα αποκτήσετε ευρύτερη μαθηματική «κουλτούρα».

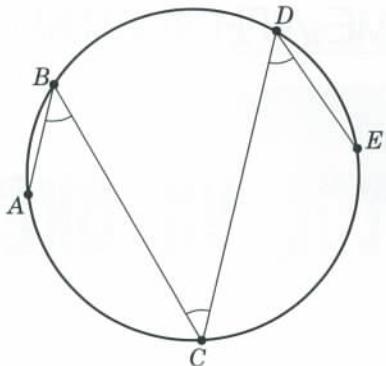
Τα μαθηματικά, εκτός των άλλων, σας διδάσκουν να είστε ειλικρινείς και με τον εαυτό σας και με τους άλλους. Όταν απαντάτε σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν είναι δυνατές οι υπεκφυγές. Και επιπλέον, η ειλικρίνεια αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση του συνεπούς τρόπου σκέψης. Εκτός αυτού, όταν λύνουμε προβλήματα δεν μαθαίνουμε μόνο πώς να αποδεικνύουμε αληθείς προτάσεις αλλά και πώς να μαντεύουμε ποιες είναι οι αληθείς. Και η ικανότητα να μαντεύουμε αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της παραγωγικής σκέψης.

Ο όμορφος κόσμος των μαθηματικών προβλημάτων αυξάνεται και πληρύνεται συνεχώς, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα μαθηματικά είναι πράγματι μια ζωντανή επιστήμη.

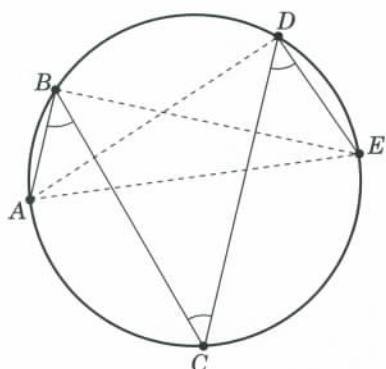
Προσπαθήστε να λύσετε τα επόμενα προβλήματα, χωρίς να δείτε τις λύσεις τους.

Πρόβλημα 1. Είναι δυνατόν; Γράψουμε όλους τους ακέραιους από το 1 έως το 100 σε αύξουσα σειρά. Διαγράφουμε είκοσι πέντε απ' αυτούς. Είναι δυνατόν να διαγράψουμε άλλους είκοσι πέντε ακέραιους, έτσι ώστε το άθροισμα δύον απομένουν να ισούται με το άθροισμα δύον έχουν διαγραφεί;

Λύση. Βεβαίως είναι δυνατόν. Οι πρώτοι εκατό θετικοί ακέραιοι μπορεί να χωριστούν σε πενήντα ζεύγη, έτσι ώστε οι αριθμοί κάθε ζεύγους να έχουν άθροισμα 101. Ας υποθέσουμε ότι στους είκοσι πέντε αριθμούς που έχουν διαγραφεί υπάρχουν k ζεύγη με αυτή την ιδιότητα. Οι υπόλοιποι $25 - 2k$ αριθμοί αυτού του συνόλου δεν σχηματίζουν τέτοια ζεύγη. Σε αυτούς τους $25 - 2k$ αριθμούς προσθέτουμε τους $25 - 2k$ αριθμούς που σχηματίζουν ζεύγη μαζί τους και τους διαγράφουμε. Στη συνέχεια επλέγουμε και διαγράφουμε k ζεύγη αριθμών από τους αριθμούς που δεν



Σχήμα 1



Σχήμα 2

έχουν ακόμη διαγραφεί. Καταλήγουμε να έχουμε διαγράψει ένα σύνολο είκοσι πέντε ζευγών αριθμών, οι οποίοι προφανώς θα έχουν άθροισμα ίσο με το ίμισυ του αθροίσματος όλων των θετικών ακέραιών από το 1 έως το 100.

Πρόβλημα 2. Τεθλασμένη πορεία πάνω στην περιφέρεια. Οι κορυφές της τεθλασμένης γραμμής $ABCDE$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο (Σχήμα 1). Τα μέτρα των γωνιών B , C και D είναι 45° . Αποδείξτε ότι $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

Λύση. Αφού $\angle ABC = \angle EDC = 45^\circ$, τα τόξα AC και CE ισούνται με 90° το καθένα· επομένως η AE είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα, $AB^2 + BE^2 = AE^2$ και $AD^2 + DE^2 = AE^2$ (Σχήμα 2). Τώρα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι $BE = CD$ και $AD = BC$ (και τα δύο ζεύγη χορδών αντιστοιχούν σε ίσα τόξα), καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα.

Πρόβλημα 3. Τριψήφιοι αριθμοί. Δίνονται τρεις τριψήφιοι αριθμοί. Η δεκαδική τους αναπαράσταση περιέχει όλα τα ψηφία εκτός του μηδενός, και το άθροισμά τους ισούται με

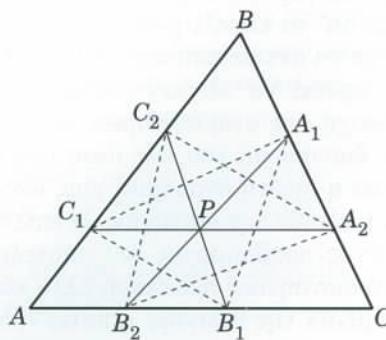
1.665. Εναλλάσσουμε το πρώτο ψηφίο κάθε αριθμού με το τελευταίο του. Ποιο είναι το άθροισμα των τριών νέων αριθμών;

Λύση. Η απάντηση είναι 1.665. Το άθροισμα των τελευταίων ψηφίων των τριών δεδομένων αριθμών πρέπει να είναι 5, 15 ή 25. Όμως, δεν μπορεί να είναι 5 ή 25, διότι αυτοί οι δύο αριθμοί δεν γράφονται ως άθροισμα τριών διαφορετικών μονωψήφιων αριθμών (από το 1 έως το 9). Συνεπώς, το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων είναι 15. Λαμβάνοντας υπόψη και το κρατούμενο, εύκολα βλέπουμε ότι το άθροισμα των μεσαίων ψηφίων είναι επίσης 15, όπως και το άθροισμα των τριών πρώτων. Είναι πλέον προφανές ότι το άθροισμα των αριθμών στους οποίους έχουμε εναλλάξει το πρώτο με το τελευταίο ψηφίο παραμένει το ίδιο —δηλαδή, 1.665.

Ιδού μια τριάδα αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος: 159, 672, 834.

Πρόβλημα 4. Ισα εμβαδά. Τα τρία ευθύγραμμα τρίγωνα C_1A_2 , C_2B_1 και A_1B_2 έχουν τα άκρα τους στις πλευρές του τριγώνου ABC , είναι παράλληλα προς τις πλευρές του και διέρχονται από ένα σημείο P (Σχήμα 3). Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_2B_2C_2$ έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση. Τα τρίγωνα A_1B_1P και A_2B_2P είναι ισεμβαδικά, διότι έχουν την ίδια βάση και ίσα ύψη. Τα τρίγωνα A_2B_2P και A_2B_1P είναι ισεμβαδικά για τον ίδιο λόγο. Άρα, τα εμβαδά των τριγώνων A_1B_1P και A_2B_2P είναι επίσης ίσα. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα εμβαδά των τριγώνων C_1A_1P και C_2A_2P είναι ίσα, και ομοίως των τριγώνων



Σχήμα 3

	B	B	B	B	B
A	C	A	C	A	C
	B	B	B	B	B
A	C	A	C	A	C
	B	B	B	B	B
A	C	A	C	A	C
	B	B	B	B	B
A	C	A	C	A	C

Σχήμα 4

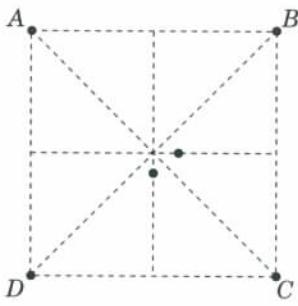
C_1B_1P και C_2B_2P . Άρα, τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_2B_2C_2$ έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 5. Θέση σε σκακιούτικη παρτίδα. Η θέση σε μια παρτίδα σκακιού έχει την εξής ιδιότητα: Σε κάθε κάθετη και κάθε οριζόντια γραμμή, το πλήθος των κομματιών είναι περιττό. Αποδείξτε ότι υπάρχει άρτιο πλήθος κομματιών στα μαύρα τετράγωνα.

Λύση. Σημειώνουμε το γράμμα A στα μαύρα τετράγωνα της πρώτης, τρίτης, πέμπτης και έβδομης κάθετης γραμμής. Σε όλα τα υπόλοιπα μαύρα τετράγωνα γράφουμε το γράμμα B (Σχήμα 4). Κατόπιν, γράφουμε το γράμμα C στα άσπρα τετράγωνα της πρώτης, τρίτης, πέμπτης και έβδομης οριζόντιας γραμμής. Έστω ότι το πλήθος των κομματιών στα τετράγωνα A είναι a , στα τετράγωνα B είναι b και στα τετράγωνα C είναι c . Από τις συνθήκες του προβλήματος μας έπειται ότι τα $a + c$ και $b + c$ είναι άρτια. Άρα, το $a + b$ είναι επίσης άρτιο —δηλαδή, υπάρχει άρτιο πλήθος κομματιών στα μαύρα τετράγωνα.

Πρόβλημα 6. Έξι σημεία. Βρείτε έξι σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε οποιαδήποτε πέντε απ' αυτά να καλύπτονται από δύο τετράγωνα με μοναδιαία διαγώνιο, αλλά να μην καλύπτονται και τα έξι από δύο κύκλους με μοναδιαία διάμετρο.

Λύση. Τοποθετούμε ένα μοναδιαίο τετράγωνο στο επίπεδο με τις πλευρές του παράλληλες προς τους άξονες των συντεταγμένων. Σημειώνουμε τις τέσσερις κορυφές του και δύο σημεία στο εσωτερικό του: το πρώτο σε απόσταση 0,1 δεξιά από το κέντρο του τετραγώνου και το δεύτερο σε α-



Σχήμα 5

πόσταση 0,1 κάτω από το κέντρο (Σχήμα 5). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οποιαδήποτε πέντε απ' αυτά τα σημεία καλύπτονται από δύο τετράγωνα με μοναδιαία διαγώνιο.

Παρατηρούμε τώρα ότι δεν είναι δυνατόν να καλύψουμε τρεις κορυφές αυτού του τετραγώνου με έναν μοναδιαίο κύκλο (πράγματι, αν ήταν δυνατόν, ο κύκλος θα κάλυπτε τη διαγώνιο του τετραγώνου). Άρα, κάθε κύκλος μπορεί να καλύψει δύο μόνο κορυφές του τετραγώνου. Έστω, για παράδειγμα, ότι ο ένας καλύπτει τις δύο αριστερές κορυφές και ο άλλος τις δύο δεξιές. Τότε, η αριστερή και η δεξιά πλευρά του τετραγώνου συμπίπτουν με τις διαμέτρους των κύκλων, και το σημείο που βρίσκεται κάτω από το κέντρο παραμένει ακάλυπτο. Ομοίως, αν ο ένας κύκλος καλύπτει τις πάνω κορυφές και ο άλλος τις κάτω, το σημείο δεξιά του κέντρου παραμένει ακάλυπτο.

Πρόβλημα 7. Χορδές κύκλου. Σχεδιάζουμε διάφορες χορδές σε έναν κύκλο έτσι ώστε καθεμία απ' αυτές να διέρχεται από το μέσο μιας άλλης. Αποδείξτε ότι όλες είναι διάμετροι του κύκλου.

Λύση. Θεωρούμε τη χορδή a που απέχει περισσότερο από το κέντρο O του κύκλου και ονομάζουμε το μέσο της A . Από την εκφώνηση του προβλήματος γνωρίζουμε ότι η χορδή αυτή περιέχει το μέσο B μια άλλης χορδής b . Άρα, η OB δεν είναι κάθετη προς την αρχική χορδή a , επομένως, $OB \geq OA$. Από την άλλη πλευρά, $OB \leq OA$, λόγω του ορισμού της χορδής a . Συνεπώς, $OB = OA$, και τα σημεία A και B συμπίπτουν. Αφού συμπίπτουν τα μέσα των δύο διαφορετικών χορδών a και b , αυτές είναι διάμετροι. Επομένως, η χορδή

που απέχει περισσότερο από το κέντρο είναι διάμετρος. Άρα όλες οι δεδομένες χορδές είναι διάμετροι.

Πρόβλημα 8. Ένα σύνολο βαρών.

Δίνεται ένα σύνολο από 100 βάρη για τα οποία γνωρίζουμε ότι μπορούν να χωριστούν σε ζεύγη έτσι ώστε η διαφορά ανάμεσα στα βάρη κάθε ζεύγους να είναι πάντοτε η ίδια. Αποδείξτε ότι μπορούμε να μοιράσουμε τα βάρη στις πλάστιγγες μιας ζυγαριάς, από 50 σε κάθε πλάστιγγα, έτσι ώστε η ζυγαριά να ισορροπεί.

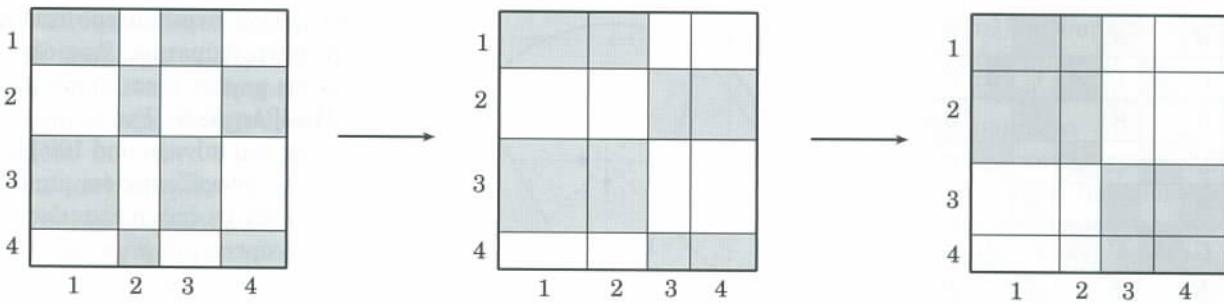
Λύση. Χωρίζουμε τα βάρη σε ζεύγη όπως περιγράφει η εκφώνηση του προβλήματος. Παίρνουμε 25 από τα ζεύγη, και τοποθετούμε το μικρότερο βάρος κάθε ζεύγους στην αριστερή πλάστιγγα της ζυγαριάς και το μεγαλύτερο στη δεξιά. Κάνουμε το αντίστροφο για τα υπόλοιπα 25 ζεύγη: τοποθετούμε το μεγαλύτερο βάρος στην αριστερή πλάστιγγα και το μικρότερο στη δεξιά. Η ζυγαριά θα ισορροπεί.

Πρόβλημα 9. Ημερολογιακή εξίσωση. (α) Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί x, y, z που ικανοποιούν την εξίσωση $28x + 30y + 31z = 365$; (β) Οι μη αρνητικοί ακέραιοι x, y, z ικανοποιούν την εξίσωση $28x + 30y + 31z = 365$. Αποδείξτε ότι $x + y + z = 12$.

Λύση. (α) Για να απαντήσουμε καταφατικά στην ερώτηση αυτή αρκεί να θυμηθούμε το ημερολόγιο. Ένα συνηθισμένο (όχι δίσεκτο) έτος έχει 365 ημέρες: ένας μήνας έχει 28 ημέρες ($x = 1$), τέσσερις έχουν 30 ($y = 4$) και επτά έχουν 31 ($z = 7$). Αυτή η εξίσωση έχει και άλλες λύσεις —για παράδειγμα, $x = 2, y = 1, z = 9$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $x + y + z \leq 11$. Τότε, $28x + 30y + 31z \leq 11 \cdot 31 = 341$. Επομένως, $x + y + z > 11$. Ας υποθέσουμε ότι $x + y + z \geq 13$. Τότε, $28x + 30y + 31z \geq 13 \cdot 28 = 364$, και η ισότητα είναι δυνατή μόνο όταν $x = 13, y = z = 0$ —σε κάθε άλλη περίπτωση, $28x + 30y + 31z \geq 366$. Άρα, $x + y + z = 12$.

Πρόβλημα 10. Κατασκευή ορθογωνίου. Χωρίζουμε ένα τετράγωνο διαστάσεων 2×2 σε ορθογώνια, φέροντας ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του, και χρωματίζουμε τα ορθογώνια άσπρα και μαύρα, όπως τα τετράγωνα μιας σκακιέρας. Έστω



Σχήμα 6

ότι το συνολικό εμβαδόν των μαύρων ορθογωνίων ισούται με το συνολικό εμβαδόν των λευκών. Αποδειξτε ότι μπορούμε να ενώσουμε ξανά τα μαύρα ορθογωνία και να σχηματίσουμε ορθογώνιο διαστάσεων 1×2 .

Λύση. Οι ευθείες χωρίζουν το δεδομένο τετράγωνο σε άρτιες και περιττές οριζόντιες και κάθετες λωρίδες. Αναδιατάσσουμε τις κάθετες λωρίδες έτσι ώστε όλες οι περιττές λωρίδες να βρεθούν αριστερά και όλες οι άρτιες δεξιά. Στη συνέχεια, αναδιατάσσουμε τις οριζόντιες λωρίδες έτσι ώστε οι περιττές να βρεθούν πάνω και οι άρτιες κάτω (Σχήμα 6). Το δεδομένο τετράγωνο έχει πλέον χωριστεί σε τέσσερα ορθογωνία, και μας δίνεται ότι το άθροισμα των εμβαδών των μαύρων ορθογωνίων ισούται με 2. Αν ονομάσσουμε x, y τις διαστάσεις τού πάνω αριστερά μαύρου ορθογωνίου, τότε $xy + (2-x)(2-y) = 2$, ή $(1-x)(1-y) = 0$. Επομένως, η μία τουλάχιστον διάστασή του, π.χ. η οριζόντια, είναι 1. Άρα και η οριζόντια διάσταση του άλλου μαύρου ορθογωνίου είναι επίσης 1, οπότε εύκολα τώρα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα 1×2 ορθογώνιο.

Πρόβλημα 11. Γύρω από το τραπέζι. Δώδεκα άνθρωποι που συμμετέχουν σε μια συνεδρίαση κάθονται γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι. Μετά το διάλειμμα κάθονται ξανά στο τραπέζι, αλλά με διαφορετική σειρά. Αποδειξτε ότι δύο από αυτούς έχουν ίδιο πλήθος ανθρώπων μεταξύ τους πριν και μετά το διάλειμμα (μετρώντας δεξιόστροφα από τον πρώτο προς τον δεύτερο).

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι όλες οι αποστάσεις μεταξύ δύο συνέδρων άλλαξαν μετά το διάλειμμα. Ας θεωρήσουμε ότι όλοι μετακινήθηκαν δεξιό-

στροφα, από τις παλιές στις νέες τους θέσεις. Τότε, η συνολική απόσταση που κάλυψαν θα ισούται με ακέραιο πλήθος στροφών γύρω από το τραπέζι (αφήνουμε τους αναγνώστες να αποδειξουν αυτό το γεγονός). Από την άλλη, λόγω της υπόθεσής μας, όλοι οι σύνεδροι κάλυψαν διαφορετικές αποστάσεις, και αυτό είναι δυνατόν μόνο αν κάποιος παρέμεινε στη θέση του, ο επόμενος κάλυψε $1/12$ της περιφέρειας του τραπεζιού, ο μεθεόπερνος τα $2/12$, και ούτω καθεξής. Ο τελευταίος πρέπει να καλύψει τα $11/12$ της περιφέρειας. Η συνολική απόσταση που έχουν καλύψει θα είναι $66/12$, ή $5,5$ πλήρεις στροφές. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η συνολική απόσταση που κάλυψαν ισούται με ακέραιο πλήθος πλήρων στροφών.

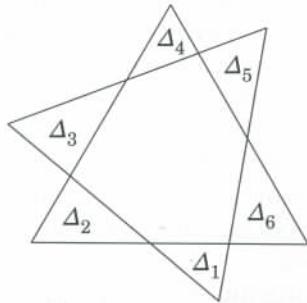
Πρόβλημα 12. Εναλλασσόμενα τρίγωνα. Διευθετούμε δύο (όχι απαραίτητως ίσα) ισόπλευρα τρίγωνα έτσι ώστε οι τομές τους να σχηματίζουν ένα εξάγωνο. Αποδειξτε ότι το άθροισμα των μηκών τριών μη διαδοχικών ανά δύο πλευρών του εξαγώνου ισούται με το άθροισμα των μηκών των τριών άλλων πλευρών του.

Λύση. Τα τρίγωνα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$ είναι όμοια (Σχήμα 7). Συνεπώς, για να αποδειξουμε ότι το άθροισμα τριών μη διαδοχικών ανά δύο πλευρών του εξαγώνου ισούται με το άθροισμα των τριών άλλων πλευρών του, αρκεί να αποδειξουμε ότι το άθροισμα των υψών των τριγώνων Δ_1, Δ_3 και Δ_5 που φέρουμε προς στις πλευρές του εξαγώνου ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων υψών των τριγώνων Δ_2, Δ_4 και Δ_6 . Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $A_1A_2A_3, A_3A_4A_5$ και $A_5A_6A_1$ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών

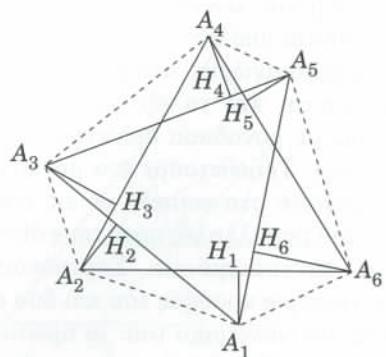
των τριγώνων $A_2A_3A_4, A_4A_5A_6$ και $A_6A_1A_2$ (βλ. Σχήμα 8), διότι καθένα από αυτά τα αθροίσματα μαζί με το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου μάς δίνει το εμβαδόν του εξαγώνου $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Αφού οι βάσεις των έξι τριγώνων είναι ίσες, βρίσκουμε ότι τα αθροίσματα των υψών τους είναι επίσης ίσα.

Πρόβλημα 13. Σταθερή περίμετρος. Διευθετούμε δύο (όχι απαραίτητως ίσα) ισόπλευρα τρίγωνα έτσι ώστε οι τομές τους να σχηματίζουν ένα εξάγωνο. Στη συνέχεια, τα τρίγωνα υπόκεινται σε παράλληλη μετατόπιση και οι τομές τους σχηματίζουν ένα άλλο εξάγωνο (Σχήμα 9). Αποδειξτε ότι τα δύο εξάγωνα έχουν ίσες περιμέτρους.

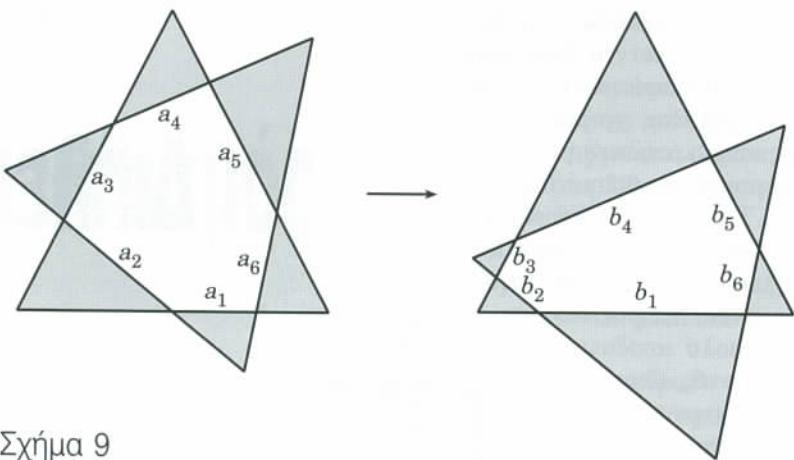
Λύση. Τα αθροίσματα των περιμέ-



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

τρων των έξι τριγώνων που βρίσκονται γύρω από τα δύο εξάγωνα είναι ίσα, διότι το καθένα απ' αυτά ισούται με το άθροισμα των περιμέτρων των δύο δεδομένων ισόπλευρων τριγώνων. Επομένως, έχουμε $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6$, όπου p_i είναι οι περίμετροι των «παλιών» σκιασμένων τριγώνων και q_i οι περίμετροι των «νέων» σκιασμένων τριγώνων. Τα δώδεκα συνοριακά τρίγωνα είναι μεταξύ τους δύοια, συνεπώς υπάρχει ένας συντελεστής k τέτοιος ώστε $p_i = ka_i$ και $q_i = kb_i$. Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις ισότητες στην προηγουμένη εξίσωση για τα άθροισματα των περιμέ-

τρων, προκύπτει $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$.

Πρόβλημα 14. Δύο χορδές. Διαιρούμε έναν κύκλο σε n^2 ίσα τόξα χρησιμοποιώντας n^2 σημεία. Χρωματίζουμε n από αυτά τα σημεία κόκκινα και άλλα n μπλε. Αποδειξτε ότι υπάρχουν δύο ίσες χορδές, η μία από τις οποίες έχει κόκκινα άκρα και η άλλη μπλε.

Λύση. Έστω ότι το μήκος του κύκλου είναι n^2 μονάδες. Τότε, το μήκος ενός τόξου με άκρα τα δεδομένα σημεία μπορεί να πάρει μόνο μία από $n^2 - 1$ δυνατές τιμές: συγκεκριμένα, 1, 2, ..., $n^2 - 1$. Θεωρούμε όλα τα δυνατά τόξα που έχουν άκρα διάφο-

ρετικού χρώματος και είναι τέτοια ώστε όταν πηγαίνουμε από το κόκκινο άκρο προς το μπλε να κινούμαστε δεξιόστροφα. Το πλήθος αυτών των τόξων είναι n^2 . Άρα, βάσει της «αρχής του περιστερών», υπάρχουν δύο τόξα, AB και CD , με ίδιο μήκος. Τότε, η χορδή AC με κόκκινα άκρα ισούται με την BD με μπλε άκρα.

Πρόβλημα 15. Χωρισμός τετραγώνου σε τετράγωνα. Χωρίζουμε ένα τετράγωνο σε 36 μικρότερα τετράγωνα. Το εμβαδόν ενός από αυτά είναι διάφορο του 1, ενώ όλων των υπολοίπων ισούται με 1. Βρείτε το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου.

Λύση. Πρέπει να υπάρχει μια πλευρά του αρχικού τετραγώνου που προσκείται μόνο σε τετράγωνα εμβαδού 1. Επομένως, η πλευρά του αρχικού τετραγώνου θα είναι κάποιος ακέραιος n . Άρα, η πλευρά του τετραγώνου που έχει εμβαδόν διάφορο του 1 θα είναι ένας ακέραιος k . Έχουμε ότι $n^2 - k^2 = 35$, ή $(n+k)(n-k) = 35$. Οι δυνατές τιμές των $n+k$ και $n-k$ είναι ζεύγη παραγόντων του 35. Άρα $n+k = 35$ και $n-k = 1$ ή $n+k = 7$ και $n-k = 5$. Αφού $k \neq 1$, καταλήγουμε στη λύση $n = 18$, και το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου ισούται με $18^2 = 324$. ◻

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ

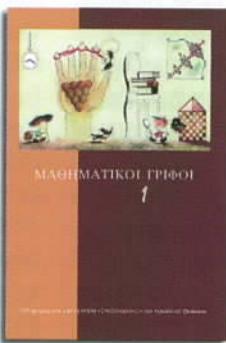
Οι Εκδόσεις Κάτοπτρο ζητούν έμπειρους συνεργάτες για μετάφραση και επιστημονική επιμέλεια βιβλίων και άρθρων από τον ευρύτερο χώρο της φυσικής, της βιολογίας και των μαθηματικών. Ήσοι ενδιαφέρονται πρέπει να αποστείλουν σύντομο βιογραφικό σημείωμα, στο οποίο θα συμπεριλαμβάνουν περιγραφή του ακριβούς γνωστικού πεδίου στο οποίο μπορούν να ανταποκριθούν και κάθε σχετική εμπειρία τους. Θα επακολουθήσει προσωπική επικοινωνία, με πρωτοβουλία των εκδόσεων.

Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10, 11471 Αθήνα, τηλ.: 3643272, fax: 3641864, e-mail: info@katoptro.gr

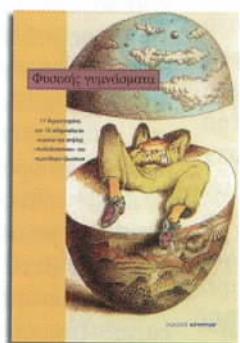
Μοναδικά εκπαιδευτικά βιβλία από τις ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο



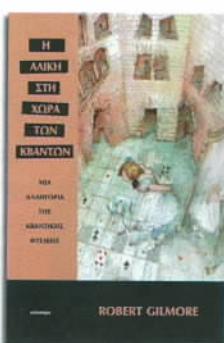
284 σελ., 17 × 25 εκ., A/M,
πανόδετο, 6.500 δρχ.



148 σελ., 17 × 25 εκ., A/M &
Έγχρ., πανόδετο, 5.400 δρχ.



160 σελ., 17 × 25 εκ., A/M,
πανόδετο, 5.500 δρχ.



246 σελ., 17 × 25 εκ., A/M,
πανόδετο, 6.500 δρχ.

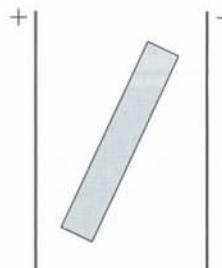
Διηλεκτ



4. Γιατί έχουν τόσο μεγάλη χωρητικότητα οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές;

5. Μια μεταλλική πλάκα εισάγεται στο χώρο μεταξύ των οπλισμών ενός φορτισμένου πυκνωτή. Θα μεταβάλλονταν τα φορτία που εμφανίζονται εξ επαγγής στην πλάκα αν γεμίζαμε το χώρο μεταξύ των οπλισμών με κηροζίνη;

6. Μια διηλεκτρική ράβδος τοποθετείται ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς (Σχήμα 1). Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, παραβλέποντας τις όποιες παραμορφώσεις υφίστανται αυτές κοντά στα άκρα του πυκνωτή.



Σχήμα 1

7. Μια φορτισμένη μεταλλική σφαίρα περιβάλλεται από παχύ σφαιρικό στρώμα διηλεκτρικού. Χαράξτε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του διηλεκτρικού. Πού οφείλεται η μεταβολή την οποία υφίσταται το ηλεκτρικό πεδίο στο σύνορο μετάλλου-διηλεκτρικού;

8. Δύο μικρές μεταλλικές σφαίρες συνδέονται με τους πόλους μιας μακρινής πηγής τάσης. Πώς θα μεταβληθεί η ελεκτική δύναμη μεταξύ των σφαιρών εάν τις βυθίσετε σε ένα υγρό διηλεκτρικό διατηρώντας σταθερή την απόσταση που τις χωρίζει;

ΟΠΩΣ ΑΦΗΝΕΙ ΝΑ ΔΙΑΦΑΝΕΙ ΤΟ μότο μας, πρόκειται να ασχοληθούμε με μια αλληλεπιδραστή μεταξύ δύο τύπων ύλης στην οποία τον κύριο ρόλο παίζει ο ηλεκτρισμός. Έχοντας επιλέξει ως αντικείμενό μας αυτό το ευρύτατο πεδίο φυσικής, θα ξεκινήσουμε από τα ζητήματα που αφορούν τη συμπεριφορά την οποία επιδεικνύουν τα μη αγώγιμα σώματα —οι μονωτές (ή διηλεκτρικά)— όταν βρίσκονται εντός ηλεκτρικών πεδίων. Στην πραγματικότητα, το πρώτο ηλεκτρικό φαινόμενο που υπέπεσε στην αντίληψη των ανθρώπων υπήρξε η κίνηση τέτοιων σωμάτων σε ένα εξωτερικό, ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Αιώνες πειραματισμού και παρατήρησης μας προσέφεραν βαθιά κατανόηση των ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν πολλές διηλεκτρικές ουσίες. Στην πορεία αυτών των ερευνών ανακαλύφθηκαν και αρκετά ασυντίθιστα φαινόμενα —για παράδειγμα, ο πυροηλεκτρισμός (η ηλέκτριση των κρυστάλλων κατά τη θέρμανσή τους) και ο πεζοηλεκτρισμός (η αυθόρυμη ηλεκτρική πόλωση λόγω της επιβολής μηχανικών τάσεων —αρχικά ονομάστηκε ηλεκτρισμός Seignette). Το καθένα από τα προαναφερόμενα φαινόμενα οδήγησε τελικά στην ανάπτυξη εφαρμογών στην επιστήμη, την τεχνολογία και την καθημερινή ζωή —στην κατασκευή εξαιρετικά ευαίσθητων συσκευών για την ανίχνευση ελαττωμάτων σε εξαρτήματα μηχανών ή για την ακρόαση της καρδιάς. Τα εκμεταλλευόμαστε επίσης στην παραγωγή μικροσκοπικών πυκνωτών και μεταλλακτών-αισθητήρων, μικροφώνων και τηλεφώνων.

„...σε σχέση με το ηλεκτρικό ρευστό, η συνηθισμένη ύλη είναι απλώς ένα είδος σπόγγου...“
—Βενιαμίν Φρανκλίνος



Μας βοηθούν να «βλέπουμε» τη θερμική ακτινοβολία και να βγάζουμε «θερμικές φωτογραφίες». Ο πιεζοηλεκτρισμός, μάλιστα, χρησιμοποιείται ευρέως στην κατασκευή ενός πολύ καθημερινού αντικειμένου, του αναπτήρα. Τα διηλεκτρικά αποτελούν τη βάση της ακουστικής και οπτικής ηλεκτρονικής, πεδία τα οποία υπόσχονται να μας δώσουν στο μέλλον πολύ αποδοτικότερους υπολογιστές, όπου τα παρωχημένα ηλεκτρονικά τους θα έχουν αντικατασταθεί με νέα ποι αξιόπιστα εξαρτήματα για τα οποία έχει ήδη καθιερωθεί και μια ονομασία: «έξυπνα διηλεκτρικά».

Επιβάλλεται εν προκειμένω να σημειωθεί ότι η επιτυχημένη έρευνα των ιδιοτήτων των διηλεκτρικών θα είχε σταθεί αδύνατη αν δεν διαθέταμε παράλληλα βαθιά κατανόηση της μοριακής τους δομής. Άλλα θα λέγαμε μόνο τη μισή αλήθεια αν δεν επισημαίναμε τον αμφιδρομο χαρακτήρα της σχέσης αυτής. Τα δεδομένα που αφορούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των συντελούμενων στο μικροσκοπικό επίπεδο ηλεκτρικών διαδικασιών μάς παρέχουν κι εκείνα με τη σειρά τους το κλειδί για την απόκτηση νέων πληροφοριών οι οποίες πλουτίζουν τη γνώση μας για τη δομή των ατόμων και των μορίων.

Θέλουμε να ελπίζουμε ότι οι ερωτήσεις και τα προβλήματα που ακολουθούν θα αποτελέσουν το κλειδί το οποίο θα ανοίξει για σας τις πόρτες αυτού του συναρπαστικού πεδίου.

Ερωτήσεις και προβλήματα

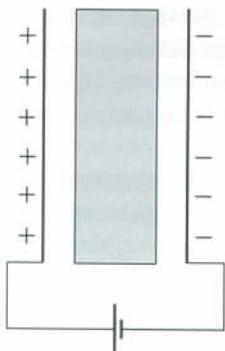
1. Γιατί τα μικρά κομμάτια χαρτιού έλκονται από μια φορτισμένη πλαστική κτένα, όχι όμως και από κάποια από τις πλάκες ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς;

2. Γιατί είναι καταδικασμένη σε αποτυχία κάθε προσπάθεια διοχέτευσης του φορτίου ενός διηλεκτρικού προς το έδαφος;

3. Οι πλάκες ενός κατακόρυφου πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς, ο οποίος μετά τη φόρτισή του αποσυνδέθηκε από την ηλεκτρική πηγή, εμβυθίζονται μερικώς σε υγρό διηλεκτρικό. Πού έχει μεγαλύτερη ένταση το ηλεκτρικό πεδίο —στον αέρα ή στο διηλεκτρικό;

Κός υλισμός

9. Όταν οι πλάκες ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς συνδέθουν με τους πόλους μιας μπαταρίας, αρχίζουν να έλκουν η μία την άλλη. Πώς θα μεταβληθεί η ηλεκτρική έλξη εάν εισαχθεί στον πυκνωτή μια πλάκα διηλεκτρικού (Σχήμα 2);



Σχήμα 2

10. Υποθέστε ότι σας δίνονται δύο πυκνωτές της αυτής χωρητικότητας, στους οποίους χρησιμοποιείται το ίδιο διηλεκτρικό. Γιατί θα πρέπει να διαθέτει μεγαλύτερο όγκο εκείνος που έχει σχεδιαστεί για να λειτουργεί υπό υψηλότερη τάση;

11. Η πτώση δυναμικού κατά μήκος ενός φορτισμένου πυκνωτή ο οποίος έχει αποσυνδεθεί από την μπαταρία διπλασιάζεται όταν διαρρεύσει δόλη η ποσότητα του υγρού διηλεκτρικού που περιέχει. Ποια είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά αυτού του υγρού διηλεκτρικού;

12. Ένας πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς φορτίζεται, αποσυνδέεται από την πηγή τάσης και κατόπιν βυθίζεται σε κηροζίνη. Πώς θα μεταβληθεί η ενέργεια που υπάρχει αποθηκευμένη στον πυκνωτή;

13. Οι οπλισμοί ενός φορτισμένου πυκνωτή γεμάτου με διηλεκτρικό βραχυκυκλώνονται για ελάχιστο χρονικό διάστημα. Μόλις η διαφορά δυ-

ναμικού ανάμεσά τους μειωθεί κατά έναν παράγοντα 3, οι οπλισμοί του πυκνωτή αποσυνδέονται. Παρατηρούμε τότε ότι η διαφορά δυναμικού αυξάνεται βραδέως ώσπου να φτάσει τελικά στα 2/3 της αρχικής της τιμής. Γιατί;

14. Ποιες ουσίες ανακλούν αποτελεσματικότερα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα —τα μέταλλα ή τα διηλεκτρικά;

15. Αλληλεπιδρούν τα ηλεκτρόνια με τα ουδέτερα άτομα;

16. Ας αντιπαραβάλουμε τα εξής δύο μόρια: (α) του διοξειδίου του άνθρακα, που δεν διαθέτει διπολική ροπή (ανήκει, δηλαδή, στα μη πολικά μόρια). (β) του νερού, το οποίο είναι ένα έντονα πολωμένο μόριο με μεγάλη διπολική ροπή. Τι μπορείτε να πείτε για τις δομές τους;

Μικροπειραματισμοί

Ηλεκτρίστε μια πλαστική κτένα τριβοντάς την και παρατηρήστε πώς έλκει μικρά κομμάτια χαρτιού. Ωστόσο, όταν πλησιάζετε τα ίδια κομμάτια χαρτιού στον πόλο μιας μπαταρίας, δεν διαποτώνετε κανένα φαινόμενο έλξης. Γιατί;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...στις αρχές του 18ου αιώνα, ο άγιος φυσικός Stephan Grey (1696-1736) ανακάλυψε ότι η ηλεκτριση ενός σώματος διά τριβής πραγματοποιείται ευκολότερα αν πρώτα το θερμάνουμε. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η θέρμανση προκαλεί την εξαέρωση της υγρασίας, με αποτέλεσμα να μειώνεται η αγωγιμότητα και να βελτιώνονται οι διηλεκτρικές ιδιότητες του σώματος.

...η πρώτη περιγραφή του πυρο-ηλεκτρισμού χρονολογείται ήδη από τον 4ο π.Χ. αιώνα. Τις λεπτομέρειες αυτού του φαινομένου τις διερεύνησε κατά τα μέσα του 18ου αιώνα ο γερμανός φυσικός Franz Maria Aepinus (1724-1802), ο οποίος το διάστημα εκείνο κατείχε την έδρα της φυσικής στην Αγία Πετρούπολη. Ο Aepinus κατέδειξε ότι η ηλεκτριση των κρυστάλλων τουρμαλίνη η οποία προκαλείται μέσω θέρμανσης διαφέρει ριζικά από την ηλεκτριση διά τριβής, —που ήταν ευρέως γνωστή εκείνη την εποχή.

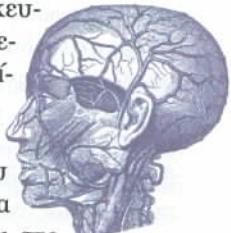
...η έννοια της διηλεκτρικής διαπερατότητας, η οποία χαρακτηρίζει την εξασθένηση του ηλεκτρικού πεδίου εντός διηλεκτρικών σωμάτων, εισήχθη από τον Michael Faraday (1791-1867) το 1837 με την ονομασία «ιδία επαγγελματική ικανότητα».

...πιθανόν να ήταν ο Faraday εκείνος που προέβλεψε την ύπαρξη ηλεκτροστατικών αναλόγων των μόνιμων μαγνητών. Αυτά τα διηλεκτρικά, που παράγουν μόνιμα και σταθερά ηλεκτρικά πεδία, ονομάστηκαν «ηλεκτρίτες» στα τέλη του 19ου αιώνα από τον διακεκριμένο άγγλο φυσικό Oliver Heaviside (1850-1925). Ο πρώτος τεχνητός ηλεκτρίτης παρήχθη πριν από 80 χρόνια από ένα μεγύμα ρητίνης φοίνικα και κολοφωνίου.

...στις αρχές του 19ου αιώνα, ο René Juste Hauvy (1743-1822), γάλλος ορυκτολόγος, ανακάλυψε ότι οι πυροηλεκτρικοί κρύσταλλοι μπορεί να ηλεκτριστούν μέσω πίεσης. Μάλιστα, εκμεταλλεύθηκε αυτή την ιδιότητα για να κατασκευάσει ένα ευαίσθητο ηλεκτροσκόπιο.

...η μέγιστη πόλωση που είναι δυνατόν να παρουσιαστεί σε διηλεκτρικό επετεύχθη το 1918 σε κρυστάλλους άλατος του Seignette (πρόκειται για ένυδρο τρυγικό καλιονάτριο, το οποίο είναι επίσης γνωστό και ως άλας της Ροσέλ). Έτσι εισήχθη και ο όρος ηλεκτρισμός Seignette, ο οποίος όμως τελικά πέρασε στο περιθώριο. Σήμερα, η ηλεκτρική διαπερατότητα ορισμένων κεραμικών υλικών μπορεί να φτάσει σε τεράστιες τιμές, ώς και 20.000.

...πολλοί ιστοί ζώντων οργανισμών (για παράδειγμα, τα αιμοφόρα αγγεία) είναι ηλεκτρίτες. Αυτό το γεγονός πρέπει να λαμβάνεται υπόψη όταν χρησιμοποιούνται τεχνητά αιμοφόρα αγγεία —πρέπει να υποβάλλονται σε προπαρασκευαστική επεξεργασία εντός ηλεκτρικού πεδίου προκειμένου να αποφευχθεί η αύξηση της πηκτικότητας του αίματος, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει στο σχηματισμό θρόμβου.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 67

Τις αγορεύειν βούλεται;

Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η σημαντικότερη εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών;

Η πρώτη επανάσταση

Αν λέγοντας «εφεύρεση» εννοούμε τις τεχνολογικές προόδους, σε αντίθεση με τις ιδέες, τις θεωρίες και τις εννοιες, τότε μπορούμε να δεχτούμε ότι όντως έχουν υπάρξει κάποιες πολύ καλές εφευρέσεις. Θα μπορούσε κανείς να αναφέρει την τυπογραφία ή το ρολόι, για παράδειγμα. Είναι ακόμη αρκετά νωρίς ώστε να μιλάμε με σιγουρία, αλλά επιλογή μου για την πλέον σημαντική εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών αποτελεί το σύνολο της γεωργικής τέχνης που αποκαλούμε «πράσινη επανάσταση». Αυτή η εφεύρεση ξεκίνησε τη δεκαετία του 1960 και συνεχίζεται μέχρι και σήμερα. Μάλιστα, στις μέρες μας εξελίσσεται σε κάτι το οποίο μπορούμε κάλλιστα να αποκαλέσουμε «κυανοπράσινη επανάσταση», που επεκτείνει τις γεωργικές αρχές και μεθόδους και στους ωκεανούς.

Από την άλλη, η πλέον σημαντική εφεύρεση όλων των εποχών συνέβη με τη νεολιθική επανάσταση, όταν η ανθρωπότητα βρήκε τρόπους να καλλιεργεί συστηματικά τη γη και να σοδεύει, οπότε ξεπέρασε τόσο την αστάθεια όσο και τους θανάσιμους κινδύνους που εγείρει η καθημερινή ζωή ενός θηρευτή-τροφοσυλλέκτη. Οι θηρευτές-τροφοσυλλέκτες δεν μπορούσαν ούτε να μένουν σ' ένα συγκεκριμένο μέρος για μεγάλο χρονικό διάστημα, έτσι ώστε να καταφέρουν να αναπτύξουν σταθερό πολιτισμό, ούτε να είναι σίγουροι ότι θα μπορέσουν να επιβιώσουν σε περιόδους ανομβρίας ή άλλων φυσικών καταστροφών. Με τη νεολιθική επανάσταση δόθηκε λύση και στα δύο αυτά προβλήματα, και ο πολιτισμός αποτέλεσε πραγματικό ενδεχόμενο.

Ουτόσο, η νεολιθική επανάσταση έφερε τα δικά της προβλήματα —συγκεκριμένα, αυτό που ονομάζουμε μαλθουσιανό πρόβλημα. Η αύξηση του πληθυσμού απειλούσε συνεχώς να ξεπεράσει τη δυνατότητα παροχής τροφής. Για το προβλέψιμο μέλλον, λοιπόν, το πρόβλημα αυτό έχει λυθεί με την πράσινη επανάσταση. Η παροχή τροφής καλύπτει άνετα την αύξηση του πληθυσμού. Σήμερα, όταν ακούει κανείς ότι υπάρχει πείνα σε κάποια

περιοχή της Αφρικής ή της Ασίας, ξέρει ότι αυτή η κατάσταση έχει δημιουργηθεί ηθελημένα, για λόγους πολιτικούς. Δεν υπάρχει διεθνής έλλειψη τροφής. Υπάρχει πολλή τροφή για να ικανοποιήσει τη ζήτηση, και εξαιτίας της πράσινης επανάστασης θα υπάρχει επαρκής τροφή για μεγάλο διάστημα ακόμα.

—John R. Searle, καθηγητής φιλοσοφίας της νόησης στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Μπέρκλεϋ.

Το Διαδίκτυο

Το Διαδίκτυο (Internet) είναι με διαφορά η πλέον σημαντική εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών. Βέβαια, βασίζεται σε ένα πλήθος άλλων εφευρέσεων (ολοκληρωμένα κυκλώματα, δικτυώσεις, τηλεπικοινωνίες, ηλεκτρονικός), αλλά η επιρροή του είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ότι το σύνολο των επιμέρους στοιχείων που το απαρτίζουν. Δύο λόγοι καθιστούν δυσδιάκριτη την επιλογή μου. Πρώτον, το Διαδίκτυο είναι πια τόσο διαδεδομένο στη ζωή μας, ώστε οι περισσότεροι από εμάς πραγματικά αποτυγχάνουμε να βλέπουμε τη διάστασή του και το θεωρούμε δεδομένο. Δεύτερον, η εξαιρετική ισχύς του δεν έχει αρχίσει ακόμη να εκδηλώνεται σε όλο της το μεγαλείο.

Οι μέθοδοι μετάδοσης των πληροφοριών έχουν ήδη επηρεάσει δραματικά σχεδόν κάθε πτυχή της ζωής μας. Πηγαίνουμε ακόμα σε σχολεία, σε γραφεία, σε ταχυδρομεία, σε χώρους διασκέδασης, σε εμπορικά κέντρα. Όταν όμως δεν χρειάζεται να τρέξουμε στην πόλη για να πληροφορηθούμε ή για να ψωνίσουμε ή για να σπουδάσουμε, τότε για ποιο λόγο θα πρέπει να κατεβαίνουμε στην πόλη; Τα σχολεία, ας πούμε, σύντομα θα αλλάξουν μορφή, μιας και είμαστε πλέον ικανοί να οργανώσουμε κύκλους μαθημάτων στο Διαδίκτυο οι οποίοι θα είναι πολύ καλύτεροι απ' αυτούς που μπορούν να πραγματοποιηθούν στις σχολικές τάξεις. Δεν το πιστεύετε; Μα έχουμε πλέον την απαραίτητη τεχνολογία για να δημιουργήσουμε κύκλους μαθημάτων με τους καλύτερους φυσικούς,

μαθηματικούς ή βιολόγους διαθέσιμους στην άκρη της γραμμής, οι οποίοι δεν θα κάνουν απλώς παραδόσεις και θα προσημειώνουν εργαστηριακές ασκήσεις που επιτρέπουν στους μαθητές να ασκούνται, να δοκιμάζουν, να εκτελούν πειράματα και να λύνουν πραγματικά προβλήματα, αλλά επίσης θα απαντούν και στις ερωτήσεις των μαθητών και θα προσφέρουν συμβουλές τη στιγμή ακριβώς που οι μαθητές χρειάζονται βοήθεια. Τέτοιοι κύκλοι μαθημάτων δημιουργούνται πα συνεχώς και σε όλους τους τομείς. Τα κολέγια και τα πανεπιστήμια, όπως τα γνωρίζουμε σήμερα, σύντομα θα θεωρηθούν απαρχαιωμένα, και το μοναδικό τους δέλεαρ θα είναι οι αθλητικές εκδηλώσεις και τα πάρτι των ομίλων.

Και, φυσικά, αυτού του είδους οι ριζικές αλλαγές δεν θα περιοριστούν στην εκπαίδευση. Τα εμπορικά κέντρα παραμένουν γύρω μας, αλλά σύντομα δεν θα έχουν λόγο ύπαρξης. Για παράδειγμα, όλο και λιγότεροι άνθρωποι πηγαίνουν στα καταστήματα για να αγοράσουν CD. Μέσω του Διαδικτύου μπορούν να ακούσουν δείγματα μουσικής, και με ένα «κλίκ» να παραγγείλουν και να κανονίσουν την παραλαβή του CD που επιθυμούν —και όλα αυτά ενώ κάθονται στο σπίτι τους. Κάθε προϊόν το οποίο δεν χρειάζεται να το πιάσετε στα χέρια σας και να το «ψάξετε» πριν την αγορά του, δεν θα βρίσκει καλύτερο τρόπο πώλησης απ' ότι μέσω του Διαδικτύου. Οι εφημερίδες; Ζουν ακόμη, αλλά σύντομα θα πεθάνουν. Διαλέξτε μια οποιαδήποτε πτυχή της ζωής μας σήμερα, και να είστε σίγουροι ότι θα αλλάξει ριζικά στα επόμενα λίγα χρόνια εξαιτίας του Διαδικτύου. Η ζωή (και οι ανθρώπινες σχέσεις) σε πενήντα χρόνια θα είναι τόσο διαφορετικές, ώστε με δυσκολία μπορούμε να φανταστούμε σήμερα τις κοινωνικές δομές που θα έχουν αναπτυχθεί τότε. Δεν ξέρω βέβαια αν θα είμαστε πιο ευτυχισμένοι, αλλά πάντως θα είμαστε καλύτερα πληροφορημένοι.

—Roger C. Schank, επιστήμονας των υπολογιστών και γνωστακός ψυχολόγος,
διευθυντής του Ινστιτούτου για τις Μαθησιακές
Επιστήμες στο Πανεπιστήμιο του Νορθουέστερν.

Ο προγραμματιζόμενος υπολογιστής

Αν θεωρήσω ότι η επιλογή μου θα πρέπει να είναι μια εφεύρεση η οποία θα έχει τον μεγαλύτερο αντίκτυπο στη ζωή μας για τα επόμενα 2.000 χρόνια (στο κάτω κάτω, το μέλλον είναι που μετράει, όχι το παρελθόν), τότε πιστεύω προσωπικά ότι ο προγραμματιζόμενος υπολογιστής αποτελεί τη σημαντικότερη ανακάλυψη των προηγούμενων 2.000 χρόνων. (Στη λίστα των επιλογών μου δεν περιλαμβάνω ιδέες και έννοιες, μιας και δεν νομίζω ότι μπορούν να χαρακτηριστούν ως εφευρέσεις: υποψιάζομαι ότι η πρόθεση της ερώτησης είναι να διερευνήσει την τεχνολογία και όχι τις ιδέες.) Ενώ η τυπογραφία υπήρξε η επαναστατικότερη εφεύρεση στον καιρό της, πιστεύω ότι οι υπολογιστές είναι αυτοί που θα διέπουν όλα όσα θα κάνουμε τους επόμενους είκοσι αιώνες. Η τεχνητή νοημοσύνη θα αναπτυχθεί σε βάθος, θα κατασκευαστούν οι κβαντικοί υπολογιστές, και προσωπικά είμαι

σύμφωνος με την ιδέα που έχει διατυπωθεί, ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές συνιστούν την επόμενη φάση της εξέλιξης του ανθρώπου. Τη στιγμή που οι ενσυνειδητοί και αυτοπρογραμματιζόμενοι υπολογιστές γίνουν πραγματικότητα, δυσκολεύομαι να φανταστώ ότι η ανθρωπότητα θα μπορέσει να συνεχίσει δίχως να εμπλέξει με κάποιον τρόπο τους υπολογιστές αυτούς στη δική της ανάπτυξη.

Είμαστε δομημένοι βιολογικά, και επί του παρόντος είναι δύσκολο να αλλάξουμε ουσιαστικά τον τρόπο που λειτουργούμε και να παραμείνουμε βιολογικά βιώσιμοι. Εντούτοις, μόλις οι υπολογιστές αποκτήσουν αυτογνωσία και δυνατότητα αυτοπρογραμματισμού, θα αρχίσουν να επέρχονται σημαντικές βελτιώσεις στη λειτουργία τους, με ρυθμό εκθετικό. Θα μπορούσαμε να εμπλέξουμε αυτές τις βελτιώσεις στη δική μας ανάπτυξη με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους: (α) θα μπορούσαμε να προσαρμόσουμε την ίδια τη βιολογία μας ώστε η κυβερνητική να ενσωματώθει στη λειτουργία μας; (β) θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε τη γνώση που αποκτάται από τους υπολογιστές ώστε να βελτιώσουμε τις βιολογικές μας ικανότητες; (γ) θα μπορούσαμε απλά να μεταβιβάσουμε την κληρονομιά της γνώσης μας στους υπολογιστές, να παραμερίσουμε και να τους αφήσουμε να μας καθοδηγήσουν.

Η μοναδική άλλη ανακάλυψη η οποία μπορεί να πλησιάσει σε σπουδαιότητα τους υπολογιστές είναι ο προσδιορισμός της νουκλεοτιδικής αλληλουχίας, καθώς θα οδηγήσει αναμφισβήτητα σε μια νέα αντίληψη αλλά και στη δυνατότητα ελέγχου της γενετικής και της βιολογίας με τρόπο που θα αλλάξει αυτό που εννοούμε σήμερα με τον όρο «ζωή». Κατά μία έννοια, τούτη η ανακάλυψη συνδέεται στενά με την παραπάνω επιχειρηματολογία. Η ικανότητά μας να διαχειριστούμε την ίδια μας τη βιολογία θα παίξει αποφασιστικό ρόλο στην επιβίωσή μας ως είδος, ανεξάρτητα από τις όποιες άλλες εξελίξεις θα λάβουν χώρα.

—Lawrence M. Krauss, καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο Case Western Reserve, στο Οχάιο.

To τηλεοπτικό

Η αρχική μου σκέψη για το πώς να προσδιορίσω τη σπουδαιότητα μιας εφεύρεσης ήταν να φανταστώ τις επιπτώσεις που θα είχε η απουσία της. Έχοντας μόλις παρακολουθήσει για μία ακόμη φορά την ταινία «Μια υπέροχη ζωή», προτίμησα να αφήσω την επεξεργασία των προοπτικών της ιστορίας σε άλλους πιο κατάλληλους γι' αυτό το έργο. Και έτσι, θα ψηφίσω υπέρ της αντανακλαστικής μου απάντησης: το τηλεοπτικό.

Η εφεύρεση του τηλεοπτικού και η επακόλουθη βελτίωση και χρήση του από τον Γαλιλαίο σηματοδότησε τη γέννηση της σύγχρονης επιστημονικής μεθόδου, και έθεσε τις βάσεις για μια δραματική επανεκτίμηση της θέσης μας στο σύμπαν. Μια συσκευή μάς αποκάλυψε ότι στο σύμπαν υπάρχουν πολύ περισσότερα απ' όσα μας είναι άμεσα προστάτια μέσω των αισθήσεών μας. Και αυτές

οι αποκαλύψεις εδραίωσαν στο πέρασμα του χρόνου την άποψή μας για ένα δυναμικό και διαστελλόμενο σύμπαν, μας έδειξαν ότι ο Γαλαξίας μας δεν είναι παρά ένας μόνο ανάμεσα σε αμέτρητους άλλους, και μας εισήγαγαν σε έναν πλούτο εξωτικών αστροφυσικών δομών.

—Brian Greene, καθηγητής φυσικής και μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Columbia.

Η δημοκρατία και η κοινωνική δικαιοσύνη

Χρειάζομαι λίγο χώρο για την απάντησή μου, διότι τα πράγματα είναι ξεκάθαρα. Εφευρέσεις είναι και οι αφηρημένες ιδέες, όχι μόνο οι τεχνολογίες. Οπότε, οι πλέον σημαντικές εφευρέσεις είναι οι ιδέες της δημοκρατίας και της κοινωνικής δικαιοσύνης, και η πίστη στη δυνατότητα ανάπτυξης μιας κοινωνίας απαλλαγμένης από την καταδυνάστευση της τάξης, της φυλής και του κοινωνικού φύλου.

—Steven Rose, νευροβιολόγος, καθηγητής βιολογίας στο Ανοιχτό Πανεπιστήμιο Milton Keynes της Αγγλίας.

Το ινδοαραβικό σύστημα αριθμησης

Η σημαντικότερη εφεύρεση είναι το ινδοαραβικό σύστημα παράστασης των αριθμών: τα σύμβολα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, συν το σύμβολο του μηδενός, μαζί με την πληροφορία θέσης (έτσι ώστε το 111 να σημαίνει «μία εκατοντάδα συν μία δεκάδα συν μία μονάδα»), και την ιδιότητα ότι η προσθήκη ενός μηδενικού στο δεξιό άκρο μιας σειράς ψηφίων πολλαπλασιάζει τον αριθμό με την τιμή της βάσης, το 10. Το εν λόγω σύστημα αριθμησης είναι πλέον παγκόσμιο, και υπόκειται όλων των ποσοτικών επιστημών, των οικονομικών και των μαθηματικών.

—John D. Barrow, καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, στην Αγγλία.

Οι κοινωνικές δομές που ευνοούν τις εφευρέσεις

Πώς είναι δυνατόν να επιλέξουμε την πλέον σημαντική εφεύρεση των τελευταίων 2.000 χρόνων; Τα πραγματικά «μεγάλα» —η γλώσσα, η φωτιά, τα λίθινα εργαλεία, η γεωργία, η τέχνη— συνέβησαν αρκετά νωρίτερα. Και στις τελευταίες δύο χιλιετίες ο κόσμος μας αντίκρισε τόσο πολλές εφευρέσεις που είναι δύσκολο να σκεφτούμε μία η οποία να ξεχωρίζει από τις υπόλοιπες. Η τυπογραφία; Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής; Η ατομική βόρβα; Μετά από τέτοιες σκέψεις, μπαίνει κανείς στον πειρασμό να δώσει μια πνευματώδη απάντηση, και να την καλύψει με ένα δήθεν σοβαρό συλλογισμό.

Εν πάσῃ περιπτώσει, αν οι εφευρέσεις είναι σημαντικές, σήγουρα ήταν ακόμη πο σημαντικό να εφευρεθούν οι κοινωνικές δομές που θα εγγυούνταν μια σταθερή ροή νέων εφευρέσεων. Έχω ακούσει ότι ο Thomas Edison υπήρξε ο πρώτος που μετέτρεψε τις εφευρέσεις σε επιχείρηση. Κάθε μέρα έμπαινε στο εργαστήριό του και ρωτούση: «Ωραία, τι μπορούμε να εφεύρουμε σήμερα;» Άλλα τα

θεμέλια είχαν τεθεί νωρίτερα. Μήπως, λοιπόν το ζητούμενο δεν είναι παρά η εφεύρεση των γραφείων ευρεσιτεχνιών; Ή μήπως πρέπει να πάμε ακόμα παλιότερα, όταν ο Francis Bacon στη Nέα Ατλαντίδα (1627) οραματίζόταν τον τεχνολογικό παράδεισο που προσπαθούμε σήμερα να στήσουμε;

Απαξ λοιπόν και αρχίσαμε να εφευρίσκουμε συστηματικά καθετί που μπορούσαμε να σκεφτούμε, έκτοτε οι μεμονωμένες εφευρέσεις έχασαν τη σπουδαιότητά τους.

—John Baez, μαθηματικός φυσικός στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Ρίβερσαϊντ.

Η κλασική μουσική

Η δική μου επλογή, πιθανόν εκκεντρική αλλά από καρδίας, είναι η δυτική κλασική μουσική, όπως εκφράζεται χαρακτηριστικά από τις συνθέσεις των Μπαχ, Μπετόβεν, Μπραμς και, περισσότερο όλων, του Μότσαρτ. Οι μουσικές συνθέσεις στη δυτική παράδοση αντιπροσωπεύουν έναν απίστευτο άθλο του εγκεφάλου, ο οποίος όχι μόνο αναγνωρίζεται αλλά εκλαμβάνεται και ως πρότυπο και αναπτύσσεται απ' άκρου εις άκρον στη Γη. Οι περισσότερες εφευρέσεις, από την πυρηνική ενέργεια μέχρι τα αντιβιοτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για καλό και για κακό. Η κλασική μουσική, όμως, έχει προσφέρει περισσότερη ευχαρίστηση σε πλείστους ανθρώπους, με πολύ λίγες αρνητικές επιδράσεις, από οποιοδήποτε άλλο ανθρώπινο τεχνούργημα. Μάλιστα, ενώ ουδείς μπορεί να συνθέσει όπως ο Μότσαρτ και πολύ λίγοι μπορούν να παίξουν όπως ο Heifetz ή ο Casals, ο καθένας που ασχολείται μαζί της μπορεί να την αποδώσει μ' έναν αξιόποτο τρόπο. Ακόμη, εκείνοι από εμάς που δεν είναι ικανοί να παίξουν ένα όργανο ή και όσοι καταφέρουν να γράψουν μια παρτιτούρα, μπορούν να προσθέτουν τα δικά τους αποσπάσματα σε μια αρχική σύνθεση, να την παραλλάσσουν και να την αναπτύσσουν.

Επικεντρώθηκα στη δυτική κλασική μουσική επειδή έχει ένα βαθύ και προσωπικό νόημα για μένα. Μια γενικότερη τοποθέτησή μου θα ήταν η «πνευματική καλλιέργεια», η «μόρφωση». Όσοι από εμάς σπουδάσαν, απέκτησαν γνώσεις πάνω στην ιστορία, τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, την τέχνη. Ωστόσο, όλοι μας ξεχνάμε συχνά ότι αυτές οι επιστήμες αναπτύχθηκαν —σύμβολο το σύμβολο, έννοια την έννοια, μέθοδο τη μέθοδο— επί πολλούς αιώνες από αμέτρητους διανοητές. Η μόρφωση είναι αυτό που μας διακρίνει από τους βαρβάρους. Οι άνθρωποι στο Μεσαίωνα είχαν καταλάβει τούτο: ότι κάθε νέο εγγράφματο άτομο έπρεπε να γνωρίζει εξίσου καλά το trivium, τον κύκλο μαθημάτων που περιλαμβανει τη ρητορική, τη γραμματική και τη λογική, και το quadrivium, το οποίο περιλαμβανει την αριθμητική τη γεωμετρία και την αστρονομία μαζί με τη μουσική. Τι ειρωνεία, που το quadrivium έμεινε εκτός μόδας την ίδια στιγμή που η κλασική μουσική τύχαινε της οφειλόμενης αναγνώρισης.

—Howard Gardner, καθηγητής παιδαγωγικής στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ.

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M206

Εσωτερική ταυτότητα. Αποδείξτε ότι σε κάθε αριθμητική πρόσδοτ φυσικών αριθμών υπάρχουν δύο αριθμοί με το ίδιο άθροισμα ψηφίων. (S. Genkin)

M207

Το κοινό σημείο των υψών. Για μια δεδομένη χορδή MN ενός κύκλου, θεωρούμε όλα τα τρίγωνα ABC για τα οποία έχουμε ότι η AB είναι διάμετρος του κύκλου που δεν τέμνει τη MN , και οι πλευρές AC και BC διέρχονται από τα άκρα τής MN . Αποδείξτε ότι τα ύψη όλων αυτών των τριγώνων τα οποία άγονται από την κορυφή C προς την AB συντρέχουν σε ένα σημείο. (E. Kulanin)

M208

Δύο ξεχωριστοί αριθμοί. Δίνονται n πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n , οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ και $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν i και j τέτοια ώστε $x_i x_j \leq -1/n$.

M209

Μεγαλύτερο του τέσσερα. Αποδείξτε ότι, αν το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από το άθροισμά τους, τότε το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο του 4. (N. Vasilyev)

M210

Ακριβώς ένα τέταρτο. Θεωρούμε στη βάση AC του ισοσκελούς τρίγωνου ABC ένα σημείο D τέτοιο ώστε ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ABD να έχει την ίδια ακτίνα με τον κύκλο που εφάπτεται στις προεκτάσεις των τριγώνων BC και BD και στο τμήμα CD (τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του τρίγωνου BCD). Απο-

δείξτε ότι αυτή η ακτίνα ισούται με το $1/4$ του ύψους του τριγώνου που φέρουμε προς ένα από τα σκέλη.

Φυσική

Φ206

Ελαστικοί μεσημβρινοί. Ένα ισχυρό ελαστικό πλέγμα περιβάλλει μια ελαστική μπάλα. Τα νήματα του πλέγματος εκτείνονται κατά μήκος των μεσημβρινών της μπάλας. Τι σχήμα θα λάβει η μπάλα αν αυξηθεί η εσωτερική πίεση της;

Φ207

Κόβοντας σταγόνες. Για να καταφέρουμε να σχηματίσουμε πανομοιότυπες σταγόνες, συνδέουμε έναν τριχοειδή σωλήνα με ένα μεγάλο δοχείο νερού εφοδιασμένο με έμβολο (Σχήμα 1). Όταν το έμβολο κατέρχεται στο δοχείο, το νερό ρέει μέσω του τριχοειδούς σωλήνα. Ένας πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος στερεώνεται στην εξωτερική επιφάνεια του ελεύθερου άκρου του τριχοειδούς σωλήνα και συνδέεται με μια γεννήτρια ήχου χαμηλής συχνότητας, η οποία προκαλεί ταλαντώσεις στο ρεύμα του



Σχήμα 1

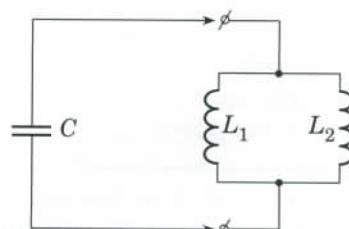
νερού. Για αρκούντως μεγάλα πλάτη ταλάντωσης, η φλέβα κόβεται σε πανομοιότυπες σταγόνες. Προσδιορίστε την ακτίνα αυτών των σταγόνων στην περίπτωση όπου η εσωτερική διάμετρος d του τριχοειδούς σωλήνα είναι $0,2\text{ mm}$, η ταχύτητα εκροής του νερού $v = 2\text{ m/s}$ και η συχνότητα του ήχου $\nu = 1.000\text{ Hz}$. (Y. Chernyshev)

Φ208

Υγρασία σε δεξαμενή υδρογόνου. Ένας κύλινδρος όγκου $V = 2\text{ lt}$ περιέχει υδρογόνο ($m = 2\text{ g}$) και μικρή ποσότητα νερού. Στον κύλινδρο επικρατεί πίεση $P_1 = 17\text{ atm}$. Ο κύλινδρος θερμαίνεται τόσο ώστε η πίεση να αυξηθεί σε $P_2 = 26\text{ atm}$. Πόσο νερό εξαερώνεται; Ποια είναι η αρχική και η τελική θερμοκρασία της διαδικασίας; Υπόδειξη: Ανατρέξτε σε κάποιον πίνακα δεδομένων σχετικά με τις σχέσεις πίεσης-θερμοκρασίας για τους κορεσμένους ατμούς του νερού.

Φ209

Δύο πηνία κι ένας πυκνωτής. Δύο πηνία με συντελεστές αυτεπαγωγής L_1 και L_2 συνδέονται παράλληλα. Βρείτε τις μέγιστες τιμές των ρευμάτων που διέρχονται από τα πηνία εάν τα συνδέσουμε παράλληλα —όπως φαίνεται στο Σχήμα 2— με έναν πυκνωτή χωρητικότητας C φορτισμένο μέχρι τάσης V . (O. Savchenko)



Σχήμα 2

Η συνέχεια στη σελ. 51 ↵

Συνεστραμμένοι δακτύλιοι

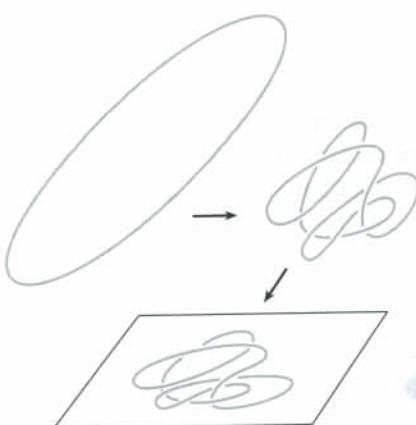
Βρείτε την άκρη του νήματος

$V = 1$

S. Matveyev

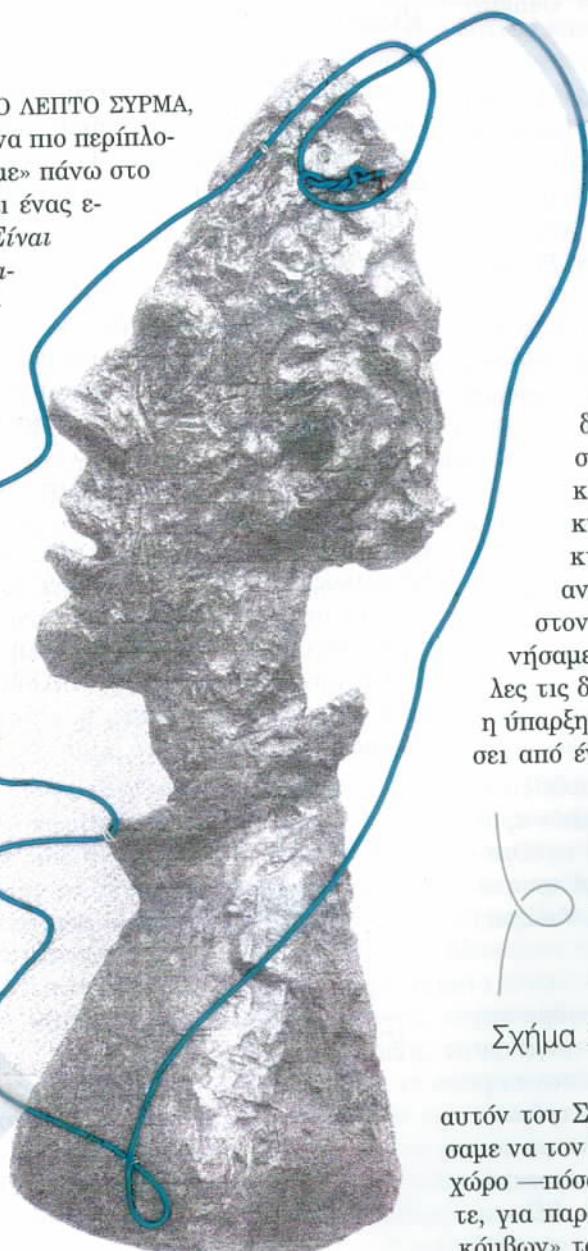
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΚΥΚΛΟ ΑΠΟ ΛΕΠΤΟ ΣΥΡΜΑ, τον καμπυλώνουμε δίνοντάς του ένα πο μερίπλοκο σχήμα και τον «πλακουτώνουμε» πάνω στο στο επίπεδο (Σχήμα 1). Προκύπτει ένας επίπεδος, συνεστραμμένος δακτύλιος. Είναι δυνατόν να ξετυλίξουμε τον συρμάτινο δακτύλιο και να καταλήξουμε ξανά στον κύκλο χωρίς να τον σηκώσουμε από το επίπεδο;

Υποθέτουμε ότι το σύρμα έχει μηδενικό πάχος: συνεπώς, για εκείνα τα σημεία στα οποία ένα τμήμα του σύρματος περνά πάνω από ένα άλλο (τα οποία καλούμε διπλά σημεία), θα θεωρήσουμε ότι και το πάνω τμήμα του σύρματος βρίσκε-



Σχήμα 1

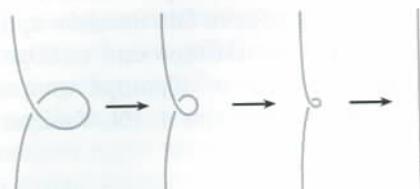
ται στο επίπεδο. Το σύρμα είναι πολύ εύκαμπτο —όχι όμως απείρως εύκαμπτο, οπότε η ακτίνα καμπυλότητας



$R = 0$

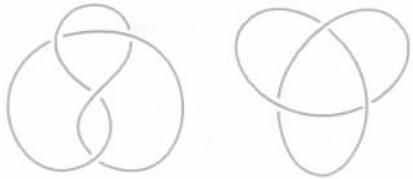
δεν είναι μηδέν: σε περίπτωση που γίνει μηδέν, το σύρμα σπάει. Ειδικότερα, η μέθοδος ευθυγράμμισης των βρόχων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2 απαγορεύεται.

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να ξετυλίξουμε το δακτύλιο στο χώρο. Άλλωστε, ο συνεστραμμένος δακτύλιος προήλθε από έναν κύκλο και, επομένως, αν εκτελέσουμε τις ίδιες πράξεις αντίστροφα θα καταλήξουμε στον αρχικό κύκλο. Αφού ξεκινήσαμε από κύκλο, αποφύγαμε όλες τις δυσκολίες που συνεπάγεται η ύπαρξη κόμβων: αν είχαμε ξεκινήσει από έναν δακτύλιο-κόμβο όπως



Σχήμα 2

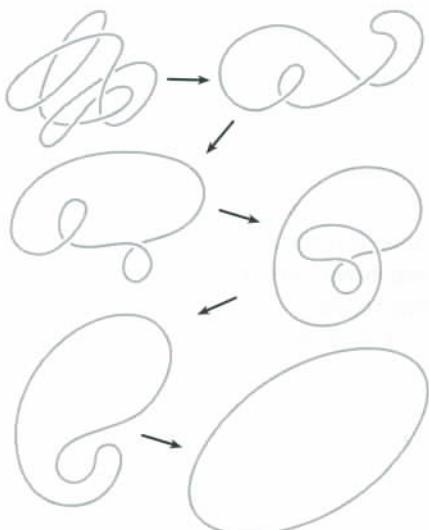
αυτόν του Σχήματος 3, δεν θα μπορούσαμε να τον ξετυλίξουμε ακόμη και στο χώρο —πόσο μάλλον στο επίπεδο. (Δείτε, για παράδειγμα, το άρθρο «Θεωρία κόμβων» του O. Viro, στο τεύχος Ιουλίου/Aυγούστου 1998.)



Σχήμα 3

Πειραματισμοί και προβληματισμοί

Ας αρχίσουμε με τον συρμάτινο δακτύλιο του Σχήματος 1. Αν παίξετε για λίγη ώρα με ένα σύρμα (ή μια κλωστή), θα διαπιστώσετε ότι μπορούμε να τον ξετυλίξουμε (δείτε το Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Δοκιμάστε τώρα να ξετυλίξετε τους δακτυλίους α-ζ του Σχήματος 5.

Ελπίζω να αντιμετωπίσατε με επιτυχία τους δακτυλίους β, ε και ζ. Όμως, η αδυναμία σας να ξετυλίξετε τους δακτυλίους α, γ και δ πρέπει να σας έπεισε ότι υπάρχουν δακτύλιοι που δεν ξετυλίγονται. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας συγκεκριμένος δακτύλιος είναι αδύνατο να ξετυλιχτεί;

Για να αποδείξουν οι μαθηματικοί ότι μια συγκεκριμένη κατασκευή ή διαδικασία είναι αδύνατη, χρησιμοποιούν συχνά την εξής αξιοσημείωτη μέθοδο: Αντιστοιχίζουν σε κάθε κατάσταση του μελετούμενου αντικειμένου έναν αριθμό ο οποίος παραμένει ίδιος σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας (ένας τέτοιος αριθμός καλείται *αναλλοίωτη*). Στη συνέχεια, προσδιορίζουν την αναλλοίωτη για την αρχική και την επιθυμητή κατάσταση του αντικειμένου. Αν προκύψουν διαφορετικές τιμές, είναι αδύνατο να μεταβούμε από την αρχική κατάσταση στην επιθυμητή —άλλωστε, γι' αυτό το λόγο ονομάζουμε τον αριθμό αναλλοίωτη: είναι αδύνατο να αλλάξει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας!

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό σε κάθε δακτύλιο του επιπέδου. Μια πρώτη ιδέα είναι να μετρήσουμε τα διπλά σημεία του δακτυλίου. Δυστυχώς, όμως, όπως μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 4, αυτό το πλήθος δεν αποτελεί αναλλοίωτη. Εντούτοις, η εξέταση του Σχήματος 4 μας αποκαλύπτει ότι τα

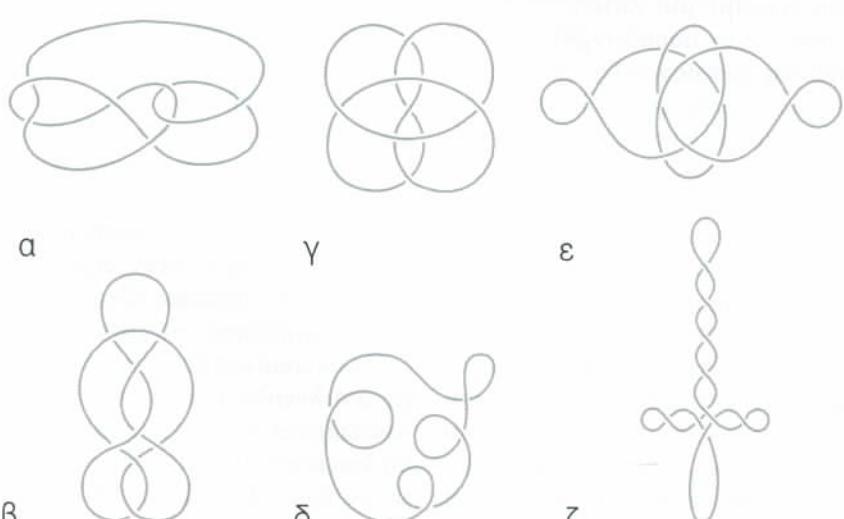
διπλά σημεία εμφανίζονται και εξαφανίζονται κατά ζεύγη. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι η ισοτιμία του πλήθους των διπλών σημείων είναι αναλλοίωτη (με άλλα λόγια, το υπόλοιπο της διαίρεσης του πλήθους των διπλών σημείων διά του 2 είναι μια αναλλοίωτη).

Όπως θα δούμε αργότερα, αυτή η υπόθεση είναι αληθής. Απ' αυτό το γεγονός συνεπάγεται, για παράδειγμα, ότι ο δακτύλιος του Σχήματος 5 δεν μπορεί να ξετυλιχτεί (έχει επτά διπλά σημεία, ενώ ο κύκλος δεν έχει διπλά σημεία —αυτό δεν μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε το δακτύλιο σε κύκλο). Ο δακτύλιος του Σχήματος 5δ έχει τέσσερα διπλά σημεία. Άρα η αναλλοίωτή του έχει μηδενική τιμή, όπως και ο κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί και να ξετυλιχτεί; Όχι, διότι δεν γνωρίζουμε αν η συνθήκη της μηδενικής αναλλοίωτης είναι επαρκής. Επομένως, το ερώτημα αν είναι δυνατό το ξετύλιγμα του δακτυλίου 5δ παραμένει ανοικτό.

Η προηγούμενη ανάλυση πρέπει να σας έπεισε ότι έχει νόημα να αναζητήσουμε αναλλοίωτες. Αυτό ακριβώς θα κάνουμε στη συνέχεια.

Η αναλλοίωτη V

Δίνεται ένας συνεστραμμένος δακτύλιος στο επίπεδο. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο A του δακτυλίου και επιλέγουμε μία από τις δύο δυνατές κατευθύνσεις κίνησης πάνω στο δακτύλιο. Θα μετακινήσουμε με μοναδιαία ταχύτητα ένα σημείο πάνω στο δακτύλιο, ξεκινώντας από το σημείο A και ακολουθώντας την επιλεγμένη κατεύθυνση. Το διάνυσμα της ταχύτητας θα στρέφεται γύρω από το A' και το άκρο του θα κινείται πάνω σ' έναν κύκλο κέντρου A'. Όταν συμπληρώσουμε τη διαδρομή μας κατά μήκος του δακτυλίου και επιστρέψουμε στο A, το διάνυσμα της ταχύτητας επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος περιστροφών του διανύσματος γύρω από το A' θα είναι ακέραιος αριθμός. Θα αντιστοιχίσουμε στις περιστροφές που έγιναν με θετική φορά (αριστερόστροφα) θετικό πρόσημο, και στις περιστροφές που έγι-

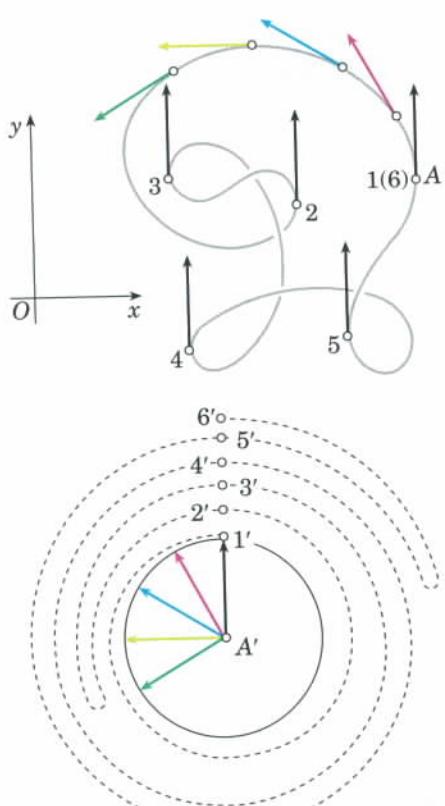


Σχήμα 5

ναν με αρνητική φορά (δεξιόστροφα) αρνητικό πρόσημο.

Παρατηρήστε το Σχήμα 6. Σ' αυτό, το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει μια καμπύλη η οποία παρουσιάζεται ως διακεκομένη και σημειώνεται λίγο πιο μακριά από τον κύκλο για να διακρίνουμε ευκολότερα τι συμβαίνει. Στην πραγματικότητα, η διακεκομένη καμπύλη βρίσκεται πάνω στον κύκλο, και τα σημεία $1'-6'$ συμπίπτουν. Το διάνυσμα της ταχύτητας εκτελεί συνολικά -1 περιστροφές: μία περιστροφή από το σημείο $1'$ έως το σημείο $2'$, καμία από το σημείο $2'$ έως το $3'$, μία αρνητική περιστροφή από το σημείο $3'$ έως το σημείο $4'$, άλλη μία αρνητική περιστροφή από το $4'$ έως το $5'$ και καμία περιστροφή από το $5'$ έως το σημείο $6'$.

Η αναλλοίωτη που σας υποσχεθήκαμε (θα τη συμβολίσουμε με V) ισούται με την απόλυτη τιμή του συνολικού πλήθους περιστροφών του διανύσματος της ταχύτητας. Είναι προφανώς ανεξάρτητη από την επιλογή του αρχικού σημείου A , και επίσης δεν εξαρτάται από την αρχική



Σχήμα 6

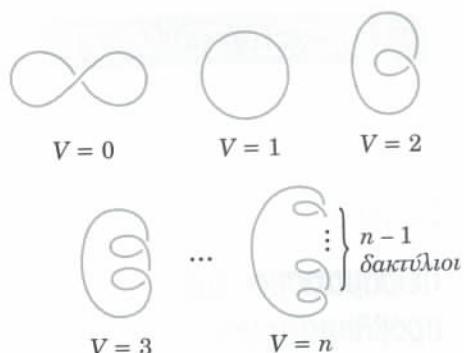
κατεύθυνση. Πράγματι, αν αλλάξουμε φορά, θα αλλάξει απλώς το πρόσημο του συνολικού πλήθους περιστροφών. Για παράδειγμα, η αναλλοίωτη του δακτυλίου στο Σχήμα 6 ισούται με 1.

Θα αιτιολογήσουμε (χωρίς να παραθέσουμε αυστηρή απόδειξη) ότι η V είναι πράγματι αναλλοίωτη. Όταν ξετυλίγεται ο δακτύλιος, η θέση του διανύσματος της ταχύτητας μεταβάλλεται ομαλά, χωρίς ασυνέχειες. Επομένως, και ο αριθμός V πρέπει να αλλάξει κατά συνεχή τρόπο. Όμως, ο V είναι ακέραιος και μπορεί να μετατραπεί σε άλλον ακέραιο μόνο αν εκτελέσει άλμα, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με το κριτήριο της συνέχειας. Άρα, ο V παραμένει αμετάβλητος και είναι πράγματι μια αναλλοίωτη της διαδικασίας του ξετυλίγματος.

Είμαστε πλέον σε θέση να αντιμετωπίσουμε το δακτύλιο του Σχήματος 5δ. Για αυτό το δακτύλιο, $V = 3$ (επαληθεύστε το μόνοι σας!), οπότε δεν μπορούμε να τον ξετυλίξουμε σε κύκλο (διότι για τον κύκλο, $V = 1$).

Αν καταφέρατε να επαληθεύσετε ότι για το δακτύλιο του Σχήματος 5δ είναι $V = 3$, θα διαπιστώσατε ότι στην πράξη δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε το πλήθος των περιστροφών του διανύσματος της ταχύτητας. Στην πραγματικότητα, το εύκολο είναι να κάνουμε λάθος. Όμως, υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος υπολογισμού του V .

Επιλέγουμε μια κατεύθυνση στο επίπεδο —για παράδειγμα, την κατεύθυνση του άξονα Oy (βλ. Σχήμα 6)— και σημαδεύουμε εκείνα τα σημεία του δακτυλίου στα οποία το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παράλληλο και έχει την ίδια κατεύθυνση με τον Oy . Αν το τμήμα του δακτυλίου που περιέχει το σημαδεμένο σημείο βρίσκεται αριστερά απ' αυτό, γράφουμε δίπλα στο σημείο τον αριθμό $+1$, ενώ αν το τμήμα που περιέχει το σημείο βρίσκεται δεξιά του, γράφουμε τον αριθμό -1 . (Αν το τμήμα που περιέχει το σημαδεμένο σημείο βρίσκεται και δεξιά και αριστερά του, δεν γράφουμε κανέναν αριθμό. Αυτό συμβαίνει όταν το διάνυσμα διασχίζει ένα βρόχο και ξαφνικά, στο ση-



Σχήμα 7

μαδεμένο σημείο, αρχίζει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, σχηματίζοντας ένα είδος πεπλατυσμένου S). Η αναλλοίωτη V ισούται με την απόλυτη τιμή του αθροίσματος όλων των αριθμών που έχουμε γράψει.

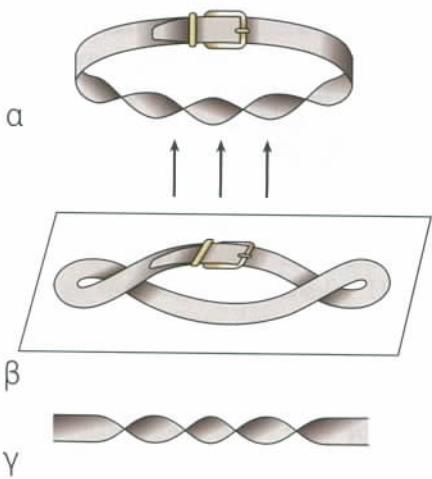
Στο Σχήμα 6, για παράδειγμα, θα γράψουμε το $+1$ δίπλα στα σημεία 1 και 2, και το -1 δίπλα στα σημεία 3, 4 και 5. Άρα, γι' αυτό το δακτύλιο, $V = 1$. Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν ότι η συγκεκριμένη μέθοδος δίνει την τιμή της V για κάθε δακτύλιο.

Στο Σχήμα 7, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n παρουσιάζεται ένας δακτύλιος με αναλλοίωτη V ίση με n . Υπενθυμίζουμε ότι εάν ένας δακτύλιος ξετυλίγεται σε κύκλο, τότε η αναλλοίωτη V του δακτυλίου ισούται με την αναλλοίωτη του κύκλου —δηλαδή με 1.

Η αναλλοίωτη R

Η ισότητα $V = 1$ είναι αναγκαία συνθήκη για να ξετυλίγεται ο δακτύλιος σε κύκλο. Είναι όμως και ικανή; Σε πρώτη σκέψη θεώρησα ότι όντως είναι, αλλά οι αποτυχημένες προσπάθειές μου να ξετυλίξω τη ζώνη μου που ήταν τυλιγμένη όπως στο Σχήμα 8β, με έπεισαν για το αντίθετο και ταυτόχρονα με οδηγησαν στην εξής παρατήρηση: όταν σήκωσα τη ζώνη από το πάτωμα (Σχήμα 8α) έκανε δύο πλήρεις συστροφές!

Ας αντικαταστήσουμε το δακτύλιο με μια λωρίδα που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο έτσι ώστε η ευθεία που τη διατρέχει στο μέσον να συμπίπτει με το δακτύλιο (Σχήμα 9α). Αν ξετυλίξουμε το δακτύλιο στο χώρο (για παράδειγμα, αν τον επαναφέρουμε στην κατάσταση που βρισκόταν πριν

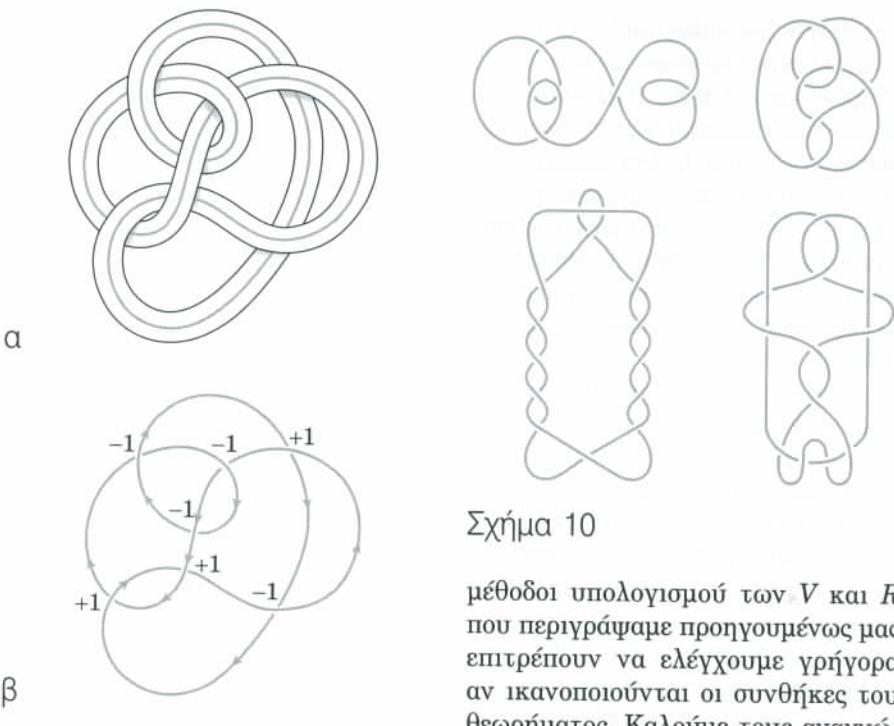


Σχήμα 8

τοποθετηθεί στο επίπεδο), προκύπτει μια συνεστραμμένη λωρίδα. Θα συμβολίζουμε το πλήθος των πλήρων συστροφών της λωρίδας (κατά τις οποίες το «μπροστινό» της μέρος κάνει μία πλήρη στροφή και «βλέπει» πάλι μπροστά) με R . Αυτό το πλήθος αποτελεί τη δεύτερη αναλλοίωτή μας, και για να ξετυλίγεται ο δακτύλιος σε κύκλο πρέπει να ισούται με μηδέν. Ακριβέστερα, το πλήθος των πλήρων συστροφών έχει θετικό πρόσημο όταν η λωρίδα τυλίγεται όπως στο Σχήμα 8a, και αρνητικό όταν τυλίγεται όπως στο Σχήμα 8g (θυμηθείτε τη διαφορά ανάμεσα σε μια δεξιόστροφη και μια αριστερόστροφη βίδα).

Θα αποδείξουμε ότι το R είναι πράγματι αναλλοίωτη —δηλαδή, δεν μεταβάλλεται όταν ο δακτύλιος ξετυλίγεται στο επίπεδο. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ξετύλιγμα του δακτυλίου καθορίζει τη μέθοδο ξετυλίγματος της αντίστοιχης λωρίδας. Όμως, το πλήθος των συστροφών της λωρίδας παραμένει αμετάβλητο, όχι μόνο όταν την ξετυλίγουμε στο επίπεδο, αλλά ακόμα και όταν κινούμαστε στις τρεις διαστάσεις.

Αποδεικνύεται (αλλά δεν θα το κάνουμε στο παρόν άρθρο) ότι η αναλλοίωτη R υπολογίζεται ως εξής: Επιλέγουμε μια κατεύθυνση κίνησης πάνω στο δακτύλιο. Κατόπιν γράφουμε σε κάθε διπλό σημείο τον αριθμό +1, αν το διάνυσμα της ταχύτητας στο κάτω μέρος του δακτυλίου κατευθύνεται προς τα αριστερά του διανύσματος της ταχύτητας στο πάνω



Σχήμα 9

μέρος του δακτυλίου. Διαφορετικά, γράφουμε τον αριθμό -1. Προφανώς, αυτοί οι αριθμοί είναι ανεξάρτητοι από την επιλεγμένη κατεύθυνση. Η αναλλοίωτη R λοιπόν ισούται με το άθροισμα αυτών των αριθμών. Για παράδειγμα, ο δακτύλιος του Σχήματος 9β έχει τρία θετικά και τέσσερα αρνητικά διπλά σημεία. Συνεπώς, η αναλλοίωτη R ισούται με -1. Άρα, ο δακτύλιος αυτός δεν μπορεί να ξετυλίχτει στο επίπεδο.

Αναγκαίες και Ικανές συνθήκες

Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι οι συνθήκες $V = 1$ και $R = 0$ είναι αναγκαίες για να ξετυλίγεται ο δακτύλιος σε κύκλο. Είναι όμως και ικανές; Με άλλα λόγια, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι $V = 1$ και $R = 0$ για να είμαστε βέβαιοι ότι ο δακτύλιος ξετυλίγεται σε κύκλο; Η απάντηση είναι καταφατική.

Θεμελιώδες θεώρημα. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ξετυλίγεται ένας δακτύλιος σε κύκλο, στο επίπεδο, είναι η αναλλοίωτη V να ισούται με 1 και η αναλλοίωτη R να ισούται με 0.*

Το θεώρημα αυτό δίνει πλήρη απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή του άρθρου. Οι απλές

Σχήμα 10

μέθοδοι υπολογισμού των V και R που περιγράψαμε προηγουμένως μας επιτρέπουν να ελέγχουμε γρήγορα αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος. Καλούμε τους αναγνώστες να εφαρμόσουν το θεμελιώδες θεώρημα στους δακτυλίους του Σχήματος 10.

Απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι τα V και R είναι αναλλοίωτες. Επομένως, η αναγκαιότητα της συνθήκης $V = 1$ και $R = 0$ έχει ήδη αποδειχτεί. Για να αποδείξουμε ότι είναι και ικανή, πρέπει να επαληθεύσουμε ότι κάθε δακτύλιος με $V = 1$ και $R = 0$ ξετυλίγεται σε κύκλο στο επίπεδο.

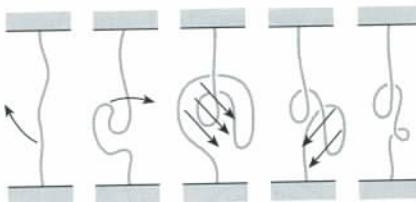
Ας θεωρήσουμε ένα δακτύλιο αυτού του τύπου. Γνωρίζουμε ότι μπορεί να ξετυλίχτει στον τρισδιάστατο χώρο. Συμβολίζουμε ως \tilde{K}_t τη θέση του δακτυλίου κατά τη χρονική στιγμή t της διαδικασίας του ξετυλίγματος. Θα καλούμε τη στιγμή t ιδιάζουσα αν ο δακτύλιος \tilde{K}_t έχει μία ή περισσότερες κατακόρυφες εφαπτόμενες. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν ιδιάζουσες στιγμές. Τότε, ο δακτύλιος είναι δυνατόν να ξετυλίχτει στο επίπεδο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η οροφή του δωματίου στο οποίο βρισκόμαστε ασχολούμενοι με το δακτύλιο είναι παράλληλη με το επίπεδο του δακτυλίου. Ας φανταστούμε ότι η οροφή αρχίζει να χαμηλώνει έως ότου φτάσει στο επίπεδο του δακτυλίου. Κατά τη διάρκεια αυ-

τής της διαδικασίας κάθε δακτύλιος \tilde{K}_t αντιστοιχεί σε έναν συγκεκριμένο επίπεδο δακτύλιο K_t . Η απουσία κάθετων εφαπτομένων μάς εξασφαλίζει ότι οι δακτύλιοι K_t δεν εμφανίζουν πτυχώσεις (σημεία με μηδενική ακτίνα καμπυλότητας). Η οικογένεια των δακτυλίων K_t προσδιορίζει τη ζητούμενη μέθοδο ξετυλίγματος του δεδομένου δακτυλίου σε κύκλο, στο επίπεδο.

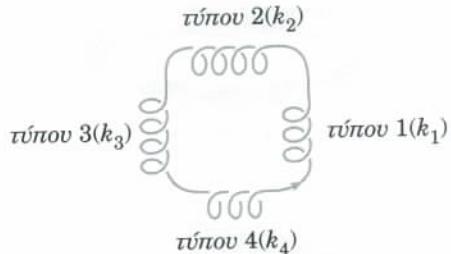
Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του δακτυλίου K_t κατά την ιδιάζουσα χρονική στιγμή $t = t_0$ —δηλαδή, όταν ο δακτύλιος διέρχεται από την κατάσταση K_{t_0} στην οποία έχει κατακόρυφη εφαπτομένη. Μια τυπική εικόνα της διέλευσης από αυτή την κατάσταση παρουσιάζεται στο Σχήμα 11. Διαπιστώνουμε ότι όταν ο δακτύλιος υπόκειται στους μετασχηματισμούς $\tilde{K}_{t_1} \rightarrow \tilde{K}_{t_0} \rightarrow \tilde{K}_{t_2}$ στο χώρο, ο αντίστοιχος επίπεδος δακτύλιος υπόκειται στον απαγορευμένο μετασχηματισμό $K_{t_1} \rightarrow K_{t_0} \rightarrow K_{t_2}$, κατά τον οποίο συμβαίνει μία ρήξη στον K_{t_0} και εμφανίζεται ένας βρόχος στο δακτύλιο K_{t_2} .

Μπορεί να αποδειχτεί (αλλά όχι εδώ) ότι το ξετύλιγμα ενός δακτυλίου στο χώρο μπορεί να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε να εμφανίζεται μόνο πεπερασμένο πλήθος ιδιαζουσών μοναδικών στιγμών, που είναι όλες παρόμοιες —δηλαδή, σε καθεμία απ' αυτές τις στιγμές εμφανίζεται ή εξαφανίζεται μόνο ένας βρόχος.

Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή t_0



Σχήμα 12



Σχήμα 13

εξαφανίζεται ένας βρόχος. Στο επίπεδο είναι αδύνατο να τον καταστρέψουμε, και έτσι τον μικραίνουμε σε πολύ μικρό βρόχο και τον αφήνουμε αμετάβλητο στους επόμενους μετασχηματισμούς (θεωρούμε ότι έχει «παγώσει» στο χώρο).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε μια ιδιάζουσα στιγμή εμφανίζεται ένας βρόχος. Δεν είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε ένα βρόχο μετασχηματίζοντας το δακτύλιο στο επίπεδο, όμως μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο (αμοιβαία εκμηδενιζόμενους) βρόχους, όπως στο Σχήμα 12. Συνεπώς, δημιουργούμε δύο βρόχους, και στη συνέχεια μικραίνουμε τον επιπλέον βρόχο και τον «παγώνουμε».

Αν εξακολουθήσουμε τη διαδικασία του ταυτόχρονου ξετυλίγματος στον τρισδιάστατο χώρο και στην επίπεδη προβολή, θα μετασχηματίσουμε τον επίπεδο δακτύλιο σε έναν κύκλο με πεπερασμένο πλήθος μικρών («παγωμένων») βρόχων. Αυτοί κατατάσσονται σε τέσσερις τύπους, ανάλογα με τη θέση του βρόχου (εσωτερικά ή εξωτερικά του κύκλου) και με τη σειρά που διέρχεται από το διπλό του σημείο (πρώτα η πάνω και μετά η κάτω κλωστή, ή αντίστροφα). Παρατηρούμε επίσης ότι είναι δυνατόν να αλλάξουμε τη σειρά των βρόχων περνώντας τον έναν μέσα από τον άλλο, όπως στο Σχήμα 13.

Αν k_i δηλώνει το πλήθος των βρόχων τύπου i , τότε $V = 1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4$ και $R = k_1 - k_2 + k_3 - k_4$. Αφού $V = 1$ και $R = 0$, έχουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 0, \end{cases}$$

απ' όπου έπειται ότι $k_1 = k_4$ και $k_2 = k_3$. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 12, είναι εύκολο να καταστρέψουμε ένα ζεύγος βρόχων τύπου 1 και 4. Το ίδιο



Σχήμα 14

Σχήμα 11

στες καλούνται να αποδείξουν τις επόμενες προτάσεις.

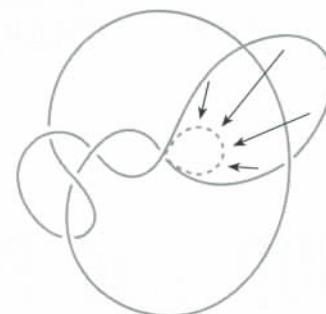
1. Ο αριθμός k_i είναι αναλλοίωτη της διαδικασίας του ξετυλίγματος με αυτοτομές. (Υπόδειξη: Θυμηθείτε τη μέθοδο υπολογισμού του V .)

2. Ο αριθμός R δεν είναι αναλλοίωτη της διαδικασίας του ξετυλίγματος με αυτοτομές. (Υπόδειξη: Πειραματιστείτε με μια ζώνη, αλλάζοντας το πάνω και το κάτω μέρος κοντά σε ένα διπλό σημείο.)

3. Το υπόλοιπο R' της διαίρεσης του R διά του 2 είναι αναλλοίωτη της διαδικασίας του ξετυλίγματος με αυτοτομές. (Υπόδειξη: Με κάθε αυτοτομή, ο αριθμός $+1$ ή -1 που χαρακτηρίζει ένα διπλό σημείο αλλάζει σε -1 και $+1$, αντίστοιχα.)

4. Ο αριθμός R' είναι αναλλοίωτη της διαδικασίας του ξετυλίγματος του δακτυλίου στο επίπεδο —χωρίς αυτοτομές!

Για να προχωρήσουμε, θα χρειαστούμε την έννοια του *απλού βρόχου*: αυτός είναι ένα τμήμα του δακτυλίου που αρχίζει σε ένα διπλό σημείο, καταλήγει στο ίδιο διπλό σημείο και



Σχήμα 15

δεν έχει αυτοτομές (παρόλο που μπορεί να τέμνει άλλα τμήματα του δακτυλίου, όπως στο Σχήμα 15). Προσπαθήστε τώρα να αποδείξετε τις επόμενες προτάσεις.

5. Κάθε επίπεδος δακτύλιος έχει έναν απλό βρόχο.

6. Κάθε απλός βρόχος μπορεί να σμικρυνθεί (με αυτοτομές) σε έναν μικρό βρόχο χωρίς να επηρεαστούν τα άλλα τμήματα του δακτυλίου.

7. Κάθε δακτύλιος μπορεί να μετασχηματιστεί (με αυτοτομές) σε οκτάρι, κύκλο ή σε κύκλο με πεπερασμένο πλήθος μικρών βρόχων στο εσωτερικό του.

8. Κάθε δακτύλιος μετασχηματίζεται (με αυτοτομές) σε οποιονδήποτε άλλο δακτύλιο, αν προσθέσουμε σε κάποιον από τους δύο δακτυλίους ένα πλήθος βρόχων (πόσους ακριβώς;)

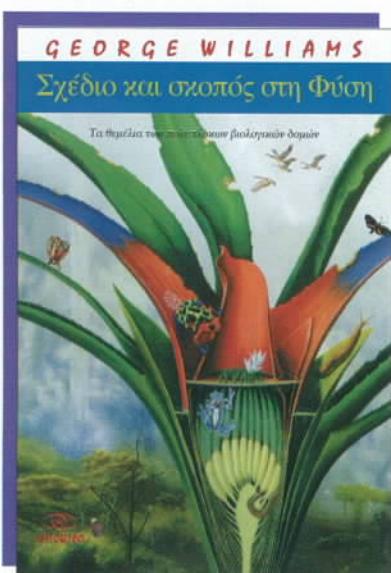
9. (Θεώρημα του Whitney) Ένας βρόχος με αναλλοίωτη V_1 μετασχηματίζεται σε βρόχο με αναλλοίωτη V_2 αν και μόνο αν $V_1 = V_2$.

Ολοκληρώνοντας, παραθέτουμε τρία ακόμα προβλήματα τα οποία σχετίζονται με το αρχικό (που αφορά τη διαδικασία ξετυλίγματος χωρίς αυτοτομές).

10. Για κάθε ζεύγος ακεραίων m και n με περιττό άθροισμα ($m \geq 0$), κατασκευάστε ένα δακτύλιο με αναλλοίωτες $V = m$ και $R = n$. Γιατί δεν υπάρχουν δακτύλιοι με αναλλοίωτες $V = 1$ και $R = 1$;

11. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο του θεωρήματος του Whitney για το ξετύλιγμα δακτυλίων χωρίς αυτοτομές.

12. Αποδείξτε ότι κάθε δακτύλιος στη σφαίρα μπορεί να μετασχηματιστεί (χωρίς αυτοτομές) σε ένα κύκλο ή σε ένα οκτάρι. ◻



254 σελ., 14,5 x 21 εκ., 6.000 δρχ.

• «Ένα ακόμη απολαυστικό βιβλίο από τον Williams —τον εκπρόσωπο του Δαρβίνου επί της Γης.»

—Helena Cronin,
London School of Economics

George Williams

Σχέδιο και σκοπός στη φύση

Μπορεί να θεωρούμε πως ανήκουμε στο πλέον εξελιγμένο είδος του πλανήτη, ωστόσο είναι ο σχεδιασμός του σώματός μας και των λειτουργιών του ο καλύτερος δυνατός; Γιατί διαθέτουμε δύο μόνο μάτια, και μάλιστα στο μέτωπο, ενώ είναι προφανές ότι θα εποπτεύαμε πολύ καλύτερα τον γύρω χώρο με ένα ακόμη μάτι στο πίσω μέρος του κεφαλιού μας; Γιατί έχουμε σχεδιαστεί ώστε να τρώμε με ευχαρίστηση τροφές που περιέχουν ζάχαρη και λιπαρά όταν, όπως αποδεικνύεται, και τα δύο είναι επιβλαβή για την υγεία μας; Γιατί είμαστε τόσο ευάλλωτοι στις ασθένειες; Γιατί, όσο γερνάμε, τα σώματά μας φθείρονται τόσο πολύ; Γιατί συνδέονται το αναπνευστικό και το πεπτικό μας σύστημα και κινδυνεύουμε να πνιγούμε κατά τη διάρκεια του φαγητού; Γιατί κατά τον τοκετό τα βρέφη χρησιμοποιούν το κολπικό πέρασμα διαμέσου της στενής λεκάνης και όχι τον κενό και πλατύ χώρο μεταξύ της λεκάνης, των πλευρών και του στέρνου; Ποιες είναι οι φιλοσοφικές συνεπαγωγές της μοχθηρότητας που επικρατεί στη Μητέρα Φύση; Και ποιες είναι οι σχετικές ηθικές πλάνες τις οποίες συντηρούν πολλές παραδοσιακές θρησκείες;

Στο παρόν βιβλίο, ο George Williams —ένας από τους σημαντικότερους εξελικτικούς βιολόγους της εποχής μας— φωτίζει τα ιδιαίτερα σχεδιαστικά χαρακτηριστικά των ανθρώπινων όντων, τις εντυπωσιακές προσαρμογές με τις οποίες μας έχει προικίσει η εξέλιξη και τους λόγους για τους οποίους εξελιχθήκαμε έτσι όπως έχουμε εξελιχθεί.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

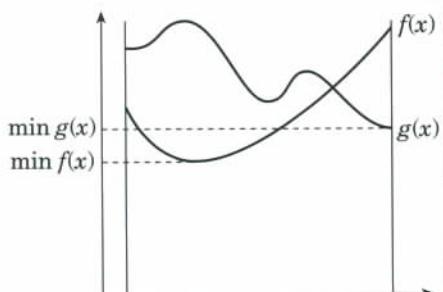
Το άθροισμα των ελαχίστων και το ελάχιστο των αθροισμάτων

R. Alekseyev και L. Kurlyandchik

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΜΕ μια μέθοδο που επιτρέπει την απόδειξη πολλών γνωστών ανισοτήτων. Η βασική ιδέα είναι εξαιρετικά απλή. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, b]$, καθεμία από τις οποίες λαμβάνει το ελάχιστό της σε ένα σημείο του διαστήματος. Στη γενική περίπτωση, τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά (Σχήμα 1). Εφόσον και η $f(x) + g(x)$ λαμβάνει το ελάχιστό της στο $[a, b]$, τότε

$$\min f(x) + \min g(x) \leq \min (f(x) + g(x)).$$

Πράγματι, το ελάχιστο του αθροισμάτος $f(x) + g(x)$ επιτυγχάνεται σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του διαστήματος $[a, b]$. Οι τιμές των $f(x)$ και $g(x)$ στο εν λόγω σημείο δεν μπορεί να είναι μικρότερες από τα αντίστοιχα ελάχιστά τους. Είναι προφανές ότι η ανισότητα γίνεται ιούτη



Σχήμα 1

μόνο όταν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουν ελάχιστο στο ίδιο σημείο.

Στην περίπτωση n συναρτήσεων, με ανάλογες υποθέσεις, έχουμε την ίδια κατάσταση:

$$\min f_1(x) + \dots + \min f_n(x) \leq \min (f_1(x) + \dots + f_n(x)).$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα με τέλεια επαγωγή. Ξεχωρίζου-



με την τελευταία συνάρτηση στο δεξιό μέλος και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \min (f_1(x) + \dots + \min f_n(x)) \\ & \geq \min (f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x)) + \min f_n(x), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.

Επισημαίνουμε ότι μια παρόμοια σχέση ισχύει για τα μέγιστα:

$$\begin{aligned} & \max (f_1(x) + \dots + f_n(x)) \\ & \leq \max f_1(x) + \dots + \max f_n(x). \end{aligned}$$

Ελάχιστα δευτεροβάθμιων συναρτήσεων

Αρχίζουμε με τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + 2bx$, όπου $a > 0$. Θα βρούμε το ελάχιστο τους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης του τετραγώνου:

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2bx \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Επομένως, το ελάχιστο ισούται με

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a}$$

και επιτυγχάνεται στο σημείο

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις n συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1x^2 + 2b_1x, \\ f_2(x) &= a_2x^2 + 2b_2x, \\ &\dots \\ f_n(x) &= a_nx^2 + 2b_nx \end{aligned}$$

και ας εφαρμόσουμε σε αυτές τη βασική ανισότητα. Η συνάρτηση $f_i(x)$ έχει ελάχιστο

$$-\frac{b_i^2}{a_i}$$

στο σημείο

$$x = -\frac{b_i}{a_i}.$$

Το ελάχιστο του αθροίσματος επιτυγχάνεται στο σημείο

$$x = -\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}.$$

και ισούται με

$$-\frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Τελικώς, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + \dots + a_n}$$

(χάριν ευκολίας αλλάξαμε τα πρόσημα στα δύο μέλη της ανισότητας).

Τώρα πλέον μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε αρκετές γνωστές ανισότητες.

Άσκηση 1. Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου να συναγάγετε

(α) την ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$\begin{aligned} & \sqrt{(c_1^2 + \dots + c_n^2)(d_1^2 + \dots + d_n^2)} \\ & \geq c_1d_1 + \dots + c_nd_n. \end{aligned}$$

(β) την ανισότητα μεταξύ τετραγωνικού και αριθμητικού μέσου

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + \dots + b_n^2}{n}} \geq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

(γ) την ανισότητα μεταξύ αριθμητικού και αρμονικού μέσου

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Υποδείξεις: (α) Χρησιμοποιήστε τις αντικαταστάσεις $a_1 = c_1^2, \dots, a_n = c_n^2, b_1 = c_1d_1, \dots, b_n = c_nd_n$. (β) Να θέσετε $a_1 = a_2 = \dots = a_n = n$. (γ) Να θέσετε $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$.

Εκθετικές συναρτήσεις

Σε αυτό το τμήμα του άρθρου, θα εξετάσουμε μια περισσότερο περίπλοκη συνάρτηση, την $f(x) = ae^x - bx - b$, όπου $a > 0$ και $b > 0$.

Άσκηση 2. Βρείτε την ελάχιστη τιμή αυτής της συνάρτησης.

Απάντηση. Η ελάχιστη τιμή είναι

$$-b \ln \frac{b}{a},$$

και επιτυγχάνεται στο σημείο:

$$x = \ln \frac{b}{a}.$$

Επομένως, για τις n συναρτήσεις

$$f_1(x) = a_1e^x - b_1x - b_1,$$

...

$$f_n(x) = a_n e^x - b_n x - b_n,$$

(όπου όλοι οι συντελεστές a_i, b_i είναι θετικοί) προκύπτει η βασική ανισότητα:

$$b_1 \ln \frac{b_1}{a_1} + \dots + b_n \ln \frac{b_n}{a_n}$$

$$\geq (b_1 + \dots + b_n) \ln \frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Επειτα από μερικές αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στην

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}$$

$$\geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)^{b_1 + \dots + b_n}.$$

Άσκηση 3. Από τον προηγούμενο τύπο να συναγάγετε

(α) Την ανισότητα του Cauchy για τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

(β) Την κομψή ανισότητα

$$b_1^{b_1} \cdot \dots \cdot b_n^{b_n} \geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right)^{b_1 + \dots + b_n}.$$

(γ) Την πολύ χρήσιμη ανισότητα

$$c_1 b_1 + \dots + c_n b_n \geq c_1^{b_1} \cdot \dots \cdot c_n^{b_n}$$

αν $b_1 + \dots + b_n = 1$.

Υποδείξεις: (α) Να θέσετε $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1/n$. (β) Να θέσετε $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1/n$. (γ) Να θέσετε

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, c_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Υπάρχουν βεβαίως πολλές άλλες μέθοδοι απόδειξης αυτών των ανισοτήτων, κάθε απόδειξη όμως βασίζεται σε διαφορετική ιδέα. Εδώ όλες οι ανισότητες απόδεικνύονται μέσω μιας ενιαίας μεθόδου. (Μια ακόμη αρκετά γενική μέθοδος απόδειξης ανισοτήτων περιγράφηκε στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 2000, στο άρθρο «Συμμετρικές ανισότητες».)

Συναρτήσεις δύο μεταβλητών και η ανισότητα Hölder

Η βασική αρχή —ότι το άθροισμα των ελαχίστων ενός πλήθους συναρτήσεων δεν υπερβαίνει το ελάχιστο του άθροισματός τους (και ότι το άθροισμα των μεγίστων τους δεν είναι μικρότερο από το μέγιστο του άθροισματός τους)— εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Και εδώ, η αρχή αυτή απόδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Ας θεωρήσουμε την απλούστερη γραμμική συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x, y) = ax + by.$$

Το εντυπωσιακό είναι ότι αυτή η απλή συνάρτηση μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ανισότητες που δεν είναι τετριμένες.

Πρόβλημα. Αποδείξτε τις ανισότητες:

$$(a) \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2}.$$

(β) Αν $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, για κάθε i , και αν $p > 0$ και $q > 0$ ικανοποιούν την $1/p + 1/q = 1$, τότε

$$(a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

(ανισότητα του Hölder).

Λύση. Θεωρούμε τις n συναρτήσεις

$$f_1(x, y) = a_1 x + b_1 y.$$

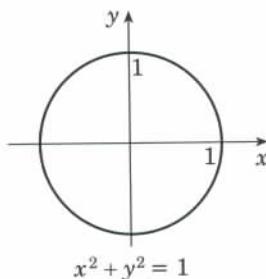
...

$$f_n(x, y) = a_n x + b_n y.$$

Το βασικό ζήτημα είναι να επιλέ-

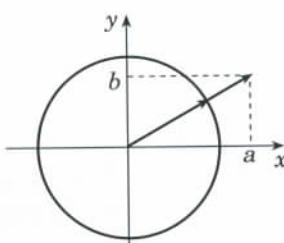
ξουμε κατάλληλα το σύνολο πάνω στο οποίο θα μελετήσουμε αυτές τις συναρτήσεις. Αφού εξετάζουμε συναρτήσεις δύο μεταβλητών ορισμένες στο επίπεδο, μπορούμε να θεωρήσουμε το ελάχιστο τους πάνω σε οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα.

(α) Έστω ένας μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων (Σχήμα 2). Ποιο



Σχήμα 2

είναι το γεωμετρικό νόημα της συνάρτησης $f(x, y) = ax + by$? Προφανώς, είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων (a, b) και (x, y) . Όμως, το εσωτερικό γινόμενο ισούται με το γινόμενο των μήκων των διανυσμάτων επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Το συνημίτονο γίνεται μέγιστο όταν η γωνία είναι μηδέν, ενώ το μήκος του μεταβλητού διανύσματος (x, y) δεν αλλάζει όταν τα άκρα του ανήκουν σε έναν κύκλο. Επομένως, η συνάρτηση $f(x, y)$ παίρνει τη μέγιστη της τιμή για το διάνυσμα



Σχήμα 3

(x_0, y_0) που είναι συγγραμμικό του (a, b) (Σχήμα 3). Αυτό το διάνυσμα ισούται με:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

και το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με:

$$(x_0, y_0) \cdot (a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Επομένως, στην περίπτωση του μοναδιαίου κύκλου, έχουμε

$$\max(ax + by) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε εύκολα την ανισότητα (α). Στο αριστερό της μέλος έχουμε το άθροισμα των μέγιστων τιμών των συναρτήσεων f_1, f_2, \dots, f_n επί του μοναδιαίου κύκλου. Στο δεξιό μέλος έχουμε το μέγιστο του άθροισματος αυτών των συναρτήσεων.

(β) Θεωρούμε το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία (x, y) , με $x, y > 0$, για τα οποία ισχύει:

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Ας βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y) = ax + by$ σε αυτό το σύνολο. Αυτό μπορεί να γίνει αναλυτικά (καλούμε τους αναγνώστες να το προσπαθήσουν), αλλά ένα από τα προηγούμενα αποτελέσματα του άρθρου μάς επιτρέπει να βρούμε μια απλούστερη λύση. Ας εφαρμόσουμε την ανισότητα (γ) της Άσκησης 3:

$$ax + by = \frac{1}{p} \cdot pax + \frac{1}{q} qby \geq (pax)^{\frac{1}{p}} \cdot (qby)^{\frac{1}{q}} = (pa)^{\frac{1}{p}} \cdot (qb)^{\frac{1}{q}}.$$

Επαληθεύστε ότι αυτή η ανισότητα γίνεται ισότητα όταν $x/y = b/a$. Επομένως, η ελάχιστη τιμή της $f(x, y)$ στο σύνολο που θεωρήσαμε είναι

$$(pa)^{\frac{1}{p}} \cdot (qb)^{\frac{1}{q}}.$$

Αν τώρα θέσουμε

$$a = \frac{c^p}{p}$$

και

$$b = \frac{d^q}{q},$$

δηλαδή, αν θεωρήσουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$\frac{c^p}{p} x + \frac{d^q}{q} y,$$

το ελάχιστο της θα είναι cd . Αν θέσουμε σε καθεμία από τις συναρτήσεις f_1, f_2, \dots, f_n τα

$$a_1 = \frac{c_1^p}{p}, b_1 = \frac{d_1^q}{q}, \dots,$$

$$a_n = \frac{c_n^p}{p}, b_n = \frac{d_n^q}{q},$$

προκύπτει η ανισότητα του Hölder!

Θα συγκρίνουμε τώρα τις ανισότητες των Cauchy-Bunyakovsky και του Hölder. Προφανώς, η πρώτη αποτελεί ειδική περίπτωση της δεύτερης, για $p = q = 2$. Επομένως, αν ορίσουμε ως «μήκος» του διανύσματος (a, b) την ποσότητα

$$\|(a, b)\|_p = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}},$$

βρίσκουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δεν υπερβαίνει το γινόμενο των «μήκών» τους.

Αυτή είναι η γεωμετρική ερμηνεία και το νόημα της ανισότητας του Hölder.

Με βάση τη μέθοδο που περιγράψαμε, έχουμε αποδείξει ένα πλήθος ανισοτήτων (ανάμεσά τους ορισμένες κλασικές) χρησιμοποιώντας μόνο ένα μικρό σύνολο συναρτήσεων. Ας αποδείξουμε μερικές ακόμη.

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις επόμενες ανισότητες για θετικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$:

$$(a) \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)}.$$

$$(b) (1 + a_1) \dots (1 + a_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\right)^n$$

(ανισότητα του Huygens).

(γ) Αν $q < 0$ και $1/p + 1/q = 1$, τότε

$$(a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

(η αντίστροφη της ανισότητας Hölder).

(δ) Αν $p > 1$, τότε

$$(a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq ((a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}},$$

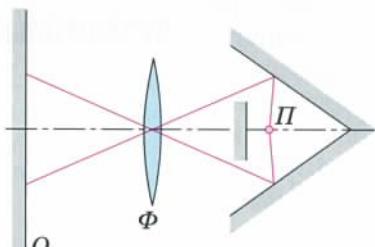
(ανισότητα του Minkowski). Αποδείξτε ότι για $p < 1$ ισχύει η αντίθετη ανισότητα.

Υποδείξεις: (α) Θεωρήστε τη γραμμική συνάρτηση $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ που ορίζεται στο σύνολο των σημείων (x_1, \dots, x_n) για τα οποία ισχύει $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = n$, και χρησιμοποιήστε την ανισότητα μεταξύ αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου για να βρείτε το ελάχιστο. (β) Να θέσετε $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ στην προηγούμενη ανισότητα. (δ) Και πάλι θεωρήστε τη γραμμική συνάρτηση $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ στο σύνολο που ορίζεται από τη συνθήκη $x_1^q + \dots + x_n^q = 1$, όπου ο αριθμός q καθορίζεται από τη σχέση $(1/p) + (1/q) = 1$, και χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Hölder για να βρείτε το ελάχιστο. ◻

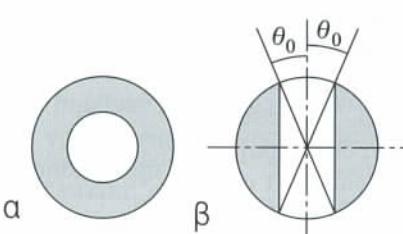
⇒ Συνέχεια από τη σελ. 41

Φ210

Κωνικός ανακλαστήρας. Μια σημειακή φωτεινή πηγή Π κείται πάνω στον άξονα ενός κοίλου κώνου με ανακλαστική εσωτερική επιφάνεια (Σχήμα 3). Στην οθόνη O σχηματίζεται ένα είδωλο της Π από ακτίνες οι οποίες



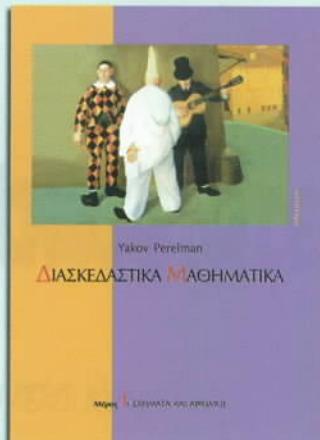
Σχήμα 3



Σχήμα 4

διέρχονται μέσω ενός φακού Φ αφού υποστούν ανάκλαση στην εσωτερική επιφάνεια του κώνου. Ακτίνες που προέρχονται απευθείας από την πηγή δεν φτάνουν στο φακό, καθότι ανακόπτονται από ένα διάφραγμα. Πώς θα τροποποιηθεί το είδωλο αν μπροστά από το φακό τοποθετηθούν τα διαφράγματα που φαίνονται στα Σχήματα 4α και 4β;

KΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Yakov Perelman
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
—Μέρος 1

Το βιβλίο περιλαμβάνει εξαιρετικής ποικιλίας θέματα των στοιχειωδών μαθηματικών: από γρίφους και μαθηματικές σπαζοκεφαλιές, πνευματικές προκλήσεις και μαθηματικές τεχνικές μέχρι προβλήματα απαριθμητικής και μέτρησης.

Καταφανή χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η πρωτοτυπία των θεμάτων του (στοιχείο αναγνωρίσιμο και σήμερα, δεκαετίες μετά τη συγγραφή του), ο γοητευτικός τρόπος παρουσίασής τους και η υπέροχη εικονογράφησή τους.

Ο συγγραφέας έχει καταβάλει κάθε δυνατή προσπάθεια για να κάνει το βιβλίο ζωηρό και διασκεδαστικό, ο αναγνώστης δε,

για να το παρακολουθήσει, δεν χρειάζεται να γνωρίζει πάρα τους κανόνες της αριθμητικής και της στοιχειωδούς γεωμετρίας. Τα προβλήματα συνοδεύονται πάντα από τις λύσεις τους.

• «Ο Perelman γράφει με τρόπο καταπληκτικό, εκλαϊκεύοντας δύσκολα ζητήματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας. Τα βιβλία του είναι ευφυή, τερπνά κι αωφέλιμα.»

—K. Tsiolkovsky (1857-1935), πατέρας της αστροναυτικής

176 σελ., 17.5 × 24 εκ., δίχρωμο, πανόδετο, 5.700 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Ο Cauchy και η τέλεια επαγωγή

Η τέχνη της αναδιατύπωσης ενός προβλήματος

Y. Solovyov

O

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ Αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου τους:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Αυτή η διάσημη ανισότητα, που αποδείχτηκε για πρώτη φορά από τον γάλλο μαθηματικό Cauchy, δημοσιεύτηκε το 1821. Από τότε, θεωρείται μία από τις δυσκολότερες αριθμητικές ανισότητες. Σε αυτά τα 180 χρόνια έχουν βρεθεί μερικές δεκάδες αποδείξεις της. Η απόδειξη του ίδιου του Cauchy καταλάμβανε αρκετές σελίδες πολύπλοκων υπολογισμών.

Στη σελίδα 49 είδαμε μια απόδειξη της. Τώρα σας προτείνω να μάθετε την απλούστερη απόδειξη που γνωρίζω. Πιστεύω ότι είναι και κομψή και διδακτική. Ωστόσο, χρειάζεται πρώτα να αναδιατυπώσουμε την εν λόγω ανισότητα.

Ποιος είναι ο σκοπός της αναδιατύπωσης ενός προβλήματος; Οι πεπειραμένοι μαθηματικοί γνωρίζουν ότι μπορεί να αποβεί εξαιρετικά χρήσιμη. Οι απλές αποδείξεις πολύπλοκων θεωρημάτων αποτελούνται συχνά από μια αλυσίδα αναδιατυπώσεων.

Με την πρώτη ματιά, η n -οστή ρίζα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης δείχνει επίφοβη. Ας διαιρέ-

σουμε και τα δύο μέλη με αυτή τη ρίζα. Τότε, το δεξιό μέλος θα γίνει 1 και στο αριστερό θα έχουμε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Παρατηρούμε ότι $y_1 y_2 \dots y_n = 1$.

Αναδιατύπωση

Έστω ότι δίνονται οι συνθήκες:

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0, \quad y_1 \dots y_n = 1.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq 1. \quad (*)$$

Ας θυμηθούμε τη μέθοδο της τελειας επαγωγής. Θα αποδείξουμε την ανισότητα σταδιακά, αυξάνοντας κάθε φορά το n κατά 1. Για $n = 1$, η ανισότητα είναι προφανής (καθαρή ισότητα). Θα υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να την αποδείξουμε για ένα συγκεκριμένο n , και θα προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε για $n + 1$.

Το επαγωγικό βίνα

Πρέπει να αποδείξουμε ότι, αν

$$z_1 > 0, \dots, z_n > 0, \quad z_{n+1} > 0, \quad z_1 \dots z_n z_{n+1} = 1,$$

τότε $z_1 + \dots + z_n + z_{n+1} \geq n + 1$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η ανισότητα (*) ισχύει για κάθε κατάλληλο σύνολο n αριθμών. Έστω $y_1 = z_1, \dots, y_{n-1} = z_{n-1}, y_n = z_n z_{n+1}$. Τότε, ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0, \quad y_1 \dots y_n = 1,$$

H συνέχεια στη σελ. 66 ⇨

Απειροστικός λογισμός και ανισότητες

Kai μία ακόμη απόδειξη της ανισότητας του Cauchy

V. Ovsienko

ΟHENRI POINCARÉ ΕΙΠΕ ΚΑΠΟΤΕ ΟΤΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ είναι ένας τρόπος να κάνεις την ίδια δήλωση για τελείως διαφορετικά πράγματα. Αυτό αληθεύει απολύτως για τον απειροστικό λογισμό, ο οποίος είναι ένα ειδος κλειδιού που όταν βρίσκεται στα χέρια ενός ικανού λύτη προβλημάτων μπορεί να ανοίξει πολλές πόρτες.

Θα εξετάσουμε τρία διαφορετικά προβλήματα και θα τα λύσουμε με την ίδια μέθοδο. Η μέθοδος βασίζεται σε ένα πασίγνωστο γεγονός: Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι θετική, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα (και αντιθέτως, αν η παράγωγος είναι αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα).

Ανισότητες που αφορούν ημίτονα και συνημίτονα

Στο σχολείο, η απόδειξη των ανισοτήτων

$$\eta mx < x, \quad \text{συν}x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

οι οποίες ισχύουν για $x > 0$ (Σχήμα 1), γίνεται παραδοσιακά με γεωμετρικά μέσα. Ωστόσο, η αναλυτική απόδειξη είναι απλούστερη και δεν απαιτεί ιδιαίτερη επινοητικότητα.

Ας θεωρήσουμε την πρώτη ανισότητα. Αφού $\eta mx \leq 1$, αρκεί να εργαστούμε στο διάστημα $(0, 1]$. Οι συναρτήσεις $y_1(x) = \eta mx$ και $y_2(x) = x$ συμπίπτουν στο μηδέν. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η δεύτερη συνάρτηση αυξάνεται ταχύτερα από την πρώτη για $0 < x \leq 1$ (με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξουμε ότι $y(x) = x - \eta mx$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση). Όμως, η παράγωγος $y'(x) = 1 - \text{συν}x$ είναι γνήσια θετική στο εν λόγω διάστημα. Άρα, η ανισότητα αποδείχτηκε για όλα τα $x > 0$.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα, εργαζόμαστε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Η συνάρτηση

$$y(x) = \text{συν}x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

ισούται με μηδέν όταν $x = 0$. Η παράγωγός της είναι $y'(x) = -\eta mx + x$. Συνεπώς, $y'(x) > 0$ για $x > 0$ (λόγω της πρώτης ανισότητας). Άρα, η $y(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση και, επομένως, θετική.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι, για $x > 0$,

$$(a) \eta mx > x - \frac{x^3}{6},$$

$$(b) \text{συν}x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Υπόδειξη: Εργαστείτε όπως στις παραπάνω αποδείξεις. Μετά τις παραγωγίσεις, χρησιμοποιήστε τις προηγούμενες ανισότητες.

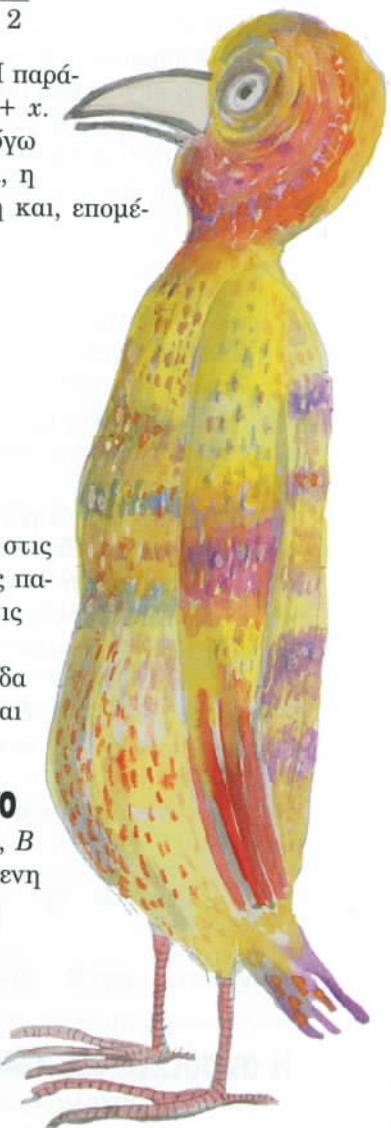
2. Προεκτείνετε την αλυσίδα των ανισοτήτων για τα ηmx και $\text{συν}x$.

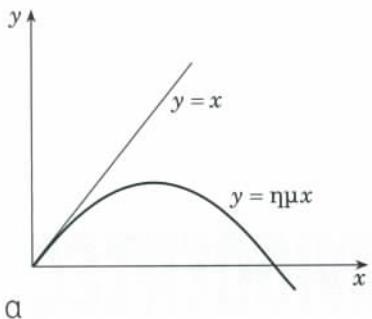
Ανισότητες σε ένα τρίγωνο

Σε ένα τρίγωνο με γωνίες A, B και Γ (Σχήμα 2) ισχύει η επόμενη ανισότητα:

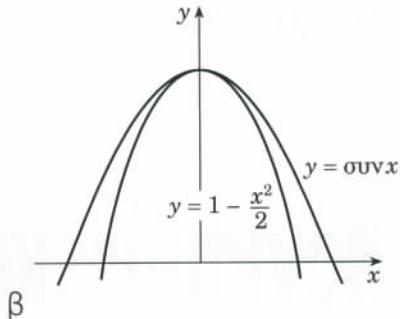
$$\eta mA + \eta mB + \eta m\Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ιδού μια απόδειξη. Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι η ανισότητα ισχύει αν το τρίγωνο εί-

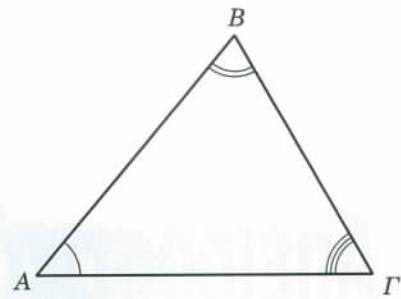




Σχήμα 1



β



Σχήμα 2

ναι ισόπλευρο ($A = B = \Gamma = 60^\circ$) —σε αυτή την περίπτωση γίνεται ισότητα.

Έστω τώρα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με γωνίες $A = 60^\circ + x$ και $B = \Gamma = 60^\circ - x/2$, όπου $-60^\circ < x < 120^\circ$. Τότε, η παράσταση $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$ είναι συνάρτηση του x :

$$f(x) = \eta\mu(60^\circ + x) + 2\eta\mu(60^\circ - x/2).$$

Η παράγωγός της είναι $f'(x) = \operatorname{συν}(60^\circ + x) - \operatorname{συν}(60^\circ - x/2)$. Είναι προφανές ότι $f'(x) > 0$, για $-60^\circ < x < 0$, και $f'(x) < 0$, για $0 < x < 120^\circ$. Επομένως, το μέγιστο της $f(x)$ είναι στο σημείο $x = 0$, ενώ όσο το x απομακρύνεται από το μηδέν η συνάρτηση παίρνει όλο και μικρότερες τιμές.

Έστω τώρα ότι η γωνία A είναι σταθερή και ότι οι γωνίες B και Γ μεταβάλλονται: $B = \delta - x$ και $\Gamma = \delta + x$. Και αυτή τη φορά, η δεδομένη παράσταση είναι συνάρτηση του x :

$$f(x) = \eta\mu(\delta - x) + \eta\mu(\delta + x) + \eta\mu A.$$

Η παράγωγός της είναι $f'(x) = \operatorname{συν}(\delta + x) - \operatorname{συν}(\delta - x)$. Η $f'(x)$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός για αρνητικά x και μικρότερη του μηδενός όταν το x είναι θετικό. Με άλλα λόγια, η παράσταση $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$ είναι τόσο μικρότερη όσο περισσότερο διαφέρει το εξεταζόμενο τρίγωνο από το ισοσκελές.

Συνεπώς, η ανισότητα αποδείχτηκε, διότι κάθε τρίγωνο μπορεί να προκύψει από ένα ισόπλευρο τρίγωνο αλλάζοντας πρώτα τη γωνία A και στη συνέχεια τις γωνίες B και Γ . Αποδείξαμε ότι έπειτα από μια τέτοια αλλαγή, η τιμή της παράστασης $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma$ πάντοτε μειώνεται.

Άσκηση 3. Αν A , B και Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου, αποδείξτε τις ανισότητες:

$$(a) \operatorname{συν}A + \operatorname{συν}B + \operatorname{συν}\Gamma \leq \frac{3}{2},$$

$$(\beta) \eta\mu A \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$(\gamma) \operatorname{συν}A \cdot \operatorname{συν}B \cdot \operatorname{συν}\Gamma \leq \frac{1}{8}.$$

γεωμετρικού τους μέσου:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Αυτή ονομάζεται *ανισότητα του Cauchy*. Θα την αποδείξουμε με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως —δηλαδή, υπολογίζοντας την παράγωγο μιας συνάρτησης.

Θα ξεκινήσουμε με την απλή περίπτωση όπου $n = 2$. Η ανισότητα αυτή μπορεί βεβαίως να αποδειχτεί με διάφορα γεωμετρικά μέσα (μερικά από τα οποία είναι ιδιαίτερα κομψά), αλλά εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τον απειροστικό λογισμό. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, έστω ότι $a \leq b$. Τότε $b = a + x$, όπου x μη αρνητικός αριθμός. Η παράσταση

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}$$

είναι συνάρτηση του x :

$$f(x) = \frac{2a + x}{2} - \sqrt{a(a + x)}.$$

Για $x = 0$, $f(x) = 0$, και για $x > 0$, η παράγωγος

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{a+x}} > 0.$$

Επομένως, η $f(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση, ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος του γεωμετρικού μέσου, και η διαφορά μεταξύ τους είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά $b - a = x$.

Θα αποδείξουμε τώρα την ανισότητα του Cauchy στη γενική περίπτωση. Στην πραγματικότητα, θα επαναλάβουμε την απόδειξη για την περίπτωση $n = 2$. Χρειαζόμαστε μόνο την παράγωγο της συνάρτησης

$$\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}.$$

Αυτή η παράγωγος μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε εγχειρίδιο απειροστικού λογισμού, και ισούται με

$$\left(x^{\frac{k}{n}} \right)' = \frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}.$$

Η ανισότητα του Cauchy

Για κάθε σύνολο a_1, \dots, a_n μη αρνητικών αριθμών 1-οχύει η εξής ανισότητα μεταξύ του αριθμητικού και του

Έστω, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Είναι προφανές ότι, αν $a_1 = \dots = a_n$, η ανισότητα γίνεται ισότητα. Ας θεωρήσουμε n ίσους αριθμούς και ας τους αυξήσουμε έναν-έναν αρχίζοντας από τον δεύτερο. Η διαδικασία αυτή απαιτεί $(n - 1)$ βήματα. Στο πρώτο βήμα, έχουμε

$$a_1, \underbrace{a_1 + z, \dots, a_1 + z}_{n-1},$$

όπου $a_1 + z = a_2$.

Στο δεύτερο βήμα, έχουμε

$$a_1, a_2, \underbrace{a_2 + y, \dots, a_2 + y}_{n-2},$$

όπου $a_2 + y = a_3$.

Τελικά, καταλήγουμε στο δεδομένο σύνολο των αριθμών a_1, a_2, \dots, a_n .

Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε βήμα η διαφορά μεταξύ του αριθμητικού και του γεωμετρικού μέσου αυξάνει. Συνεπώς, δεν θα αποδείξουμε μόνο την ανισότητα Cauchy, αλλά θα βρούμε και τη «δυναμική» της. Στο m -οστό βήμα, έχουμε το επόμενο σύνολο αριθμών:

$$a_1, \dots, a_m, \underbrace{a_m + x, \dots, a_m + x}_{n-m}.$$

Θεωρούμε την παράσταση

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

ως συνάρτηση του x :

$$f(x) = \frac{a_1 + \dots + a_m(n - m + 1) + (n - m)x}{n} - \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_m(a_m + x)^{n-m}}.$$

Η παράγωγος αυτής της συνάρτησης υπολογίζεται εύκολα:

$$f'(x) = \frac{n-m}{n} - \frac{n-m}{n} \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_m}{(a_m + x)^m}}.$$

Είναι προφανές ότι $f'(x) > 0$, για $x > 0$. Πράγματι, το υπόρριζο είναι μικρότερο του 1:

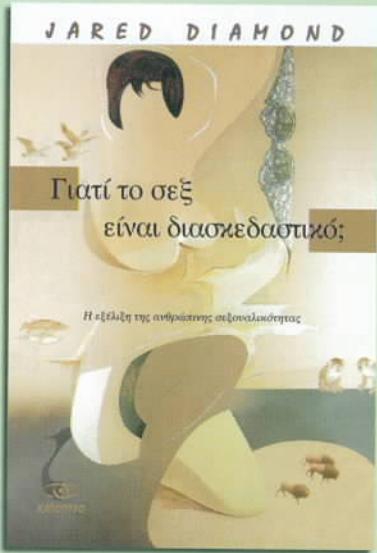
$$\frac{a_1 a_2 \dots a_m}{(a_m + x)^m} = \frac{a_1}{a_m + x} \cdot \frac{a_2}{a_m + x} \cdot \dots \cdot \frac{a_m}{a_m + x} < 1.$$

Επομένως, η ανισότητα του Cauchy αποδείχτηκε.

Στο παρόν τεύχος μπορείτε να βρείτε άλλες δύο αποδείξεις αυτής της ανισότητας, στα άρθρα «Ο Cauchy και η τέλεια επαγωγή» και «Το άθροισμα των ελαχίστων και τό ελάχιστο των αθροισμάτων». Συγκρίνετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα όλων αυτών των αποδείξεων.

Q

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Jared Diamond

Γιατί το σεξ είναι διασκεδαστικό;

Η εξέλιξη της ανθρώπινης σεξουαλικότητας

Γνωρίζετε ότι το ζώο με την πιο αλλόκοτη σεξουαλική συμπεριφορά είναι ο άνθρωπος; Γιατί; Είμαστε το μόνο κοινωνικό είδος που επιμένουμε να κάνουμε έρωτα ιδιωτικά, όχι σε κοινή θέα. Κάνουμε σεξ οποιαδήποτε στιγμή, ακόμη κι αν το θηλυκό αδυνατεί να γονιμοποιηθεί (λόγου χάρη, όταν κυνοφορεί, ανάμεσα στους γονιμους κύκλους του ή μετά την εμμηνόπαυση). Η γυναίκα αγνοεί τον ακριβή χρόνο γονιμότητάς της και δεν τον δημοσιοποιεί στους άνδρες εκπέμποντας μυρωδιές ή αλλάζοντας χρώματα σε περιοχές του σώματός της.

Γιατί διαφέρουμε τόσο ριζικά από τους εξαιρετικά κοντινούς συγγενείς μας, τους ανθρωποειδείς πιθήκους; Γιατί απ' όλα τα θηλαστικά η εμμηνόπαυση εμφανίζεται μόνο στις γυναίκες; Γιατί οι άνθρωποι συγκαταλέγονται στα λίγα θηλαστικά όπου το αρσενικό συχνά ή συνήθως μένει δίπλα στο θηλυκό για να το βοηθήσει στην ανατροφή των παιδιών; Άλλα και γιατί το ανδρικό πέρος είναι τόσο ανώφελα μεγάλο;

Τις απαντήσεις σ' αυτά και πολλά άλλα ερωτήματα σχετικά με το πώς έδρασαν οι εξελικτικές δυνάμεις στους μακρινούς προγόνους μας ώστε να διαφοροπιθούμε σεξουαλικά τόσο πολύ απ' αυτούς, θα τις βρείτε σε τούτο το κατατλητικό βιβλίο ενός από τους διασημότερους επαίνοντες του χώρου της φυσιολογίας και της εξελικτικής βιολογίας.

- «Ένα σπουδαίο βιβλίο από έναν απ' τους παγκοσμίως εξέχοντες φιλοσόφους στο χώρο της βιολογίας.»

—Roger Short, καθηγητής φυσιολογίας

220 σελ., 14,5 × 21 εκ., 6.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ

Μια καλή θεωρία

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

HΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΣΑΣΤΙΖΕΙ ΚΑΙ ΣΥνάμα σαγηνεύει τον ανθρώπινο νου. Όλοι μας τείνουμε να την αντιμετωπίζουμε σαν μια διαδοχή από ανεξήγητα θαύματα. Η γέννηση ενός ανθρώπινου όντος αποτελεί ασφαλώς μια πράξη δημιουργίας. Το πρώτο στοιχειώδες διανόημα που μορφώνει στο νου του ένα μικρό παιδί είναι μια άλλη πράξη δημιουργίας. Μιας λοιπόν και οι ίδιοι —άλλος με μεγαλύτερη κι άλλος με μικρότερη πρωτοτυπία— δημιουργούμε σε κάθε στιγμή του βίου μας, τρέφουμε βαθύ θαυμασμό για όλα εκείνα τα άτομα που κατορθώνουν να επεκτείνουν και να αναπτύξουν περαιτέρω το σώμα των γνώσεων και των αντιλήψεών μας. Καθ' όλη τη μακραίωνη πορεία που διήνυσε ο πολιτισμός μας, αγωνιστήκαμε και συνεχίζουμε να αγωνιζόμαστε για να κατανοήσουμε τη δημιουργία του κόσμου, πλάθοντας ιστορίες και θεωρίες σχετικά με το πώς έλαβαν ύπαρξη όλα όσα αντιλαμβανόμαστε γύρω μας. «Ἐν αρχῇ εποίησεν ο Θεός ουρανόν και γην», λέει μια ιστορία. Η θεωρία της Μεγάλης Ἐκρηκτης προβάλλει ως ακόμη μία τέτοια ιστορία. Και η θέση «το μη είναι δεν υπήρχε, ούτε και το είναι» που διατυπώνεται στις Ουπανισάδες συνιστά μια διαφορετική προσπάθεια να φωτιστεί το ίδιο πάντα αίνιγμα.

Ο ζωγράφος, ο συγγραφέας και ο συνθέτης μοιράζονται μαζί μας τις προσωπικές τους κοσμοαντιλήψεις και μας προσφέρουν την ευκαιρία να ρίξουμε μια φευγαλέα ματιά στη σκέ-

«Στο έργο μου, πάσχισα πάντοτε να ενώσω το αληθινό με το ωραίο· όποτε όμως χρειάστηκε να επιλέξω το ένα ή το άλλο, συνήθως προτίμος το ωραίο.»

—Hermann Weyl

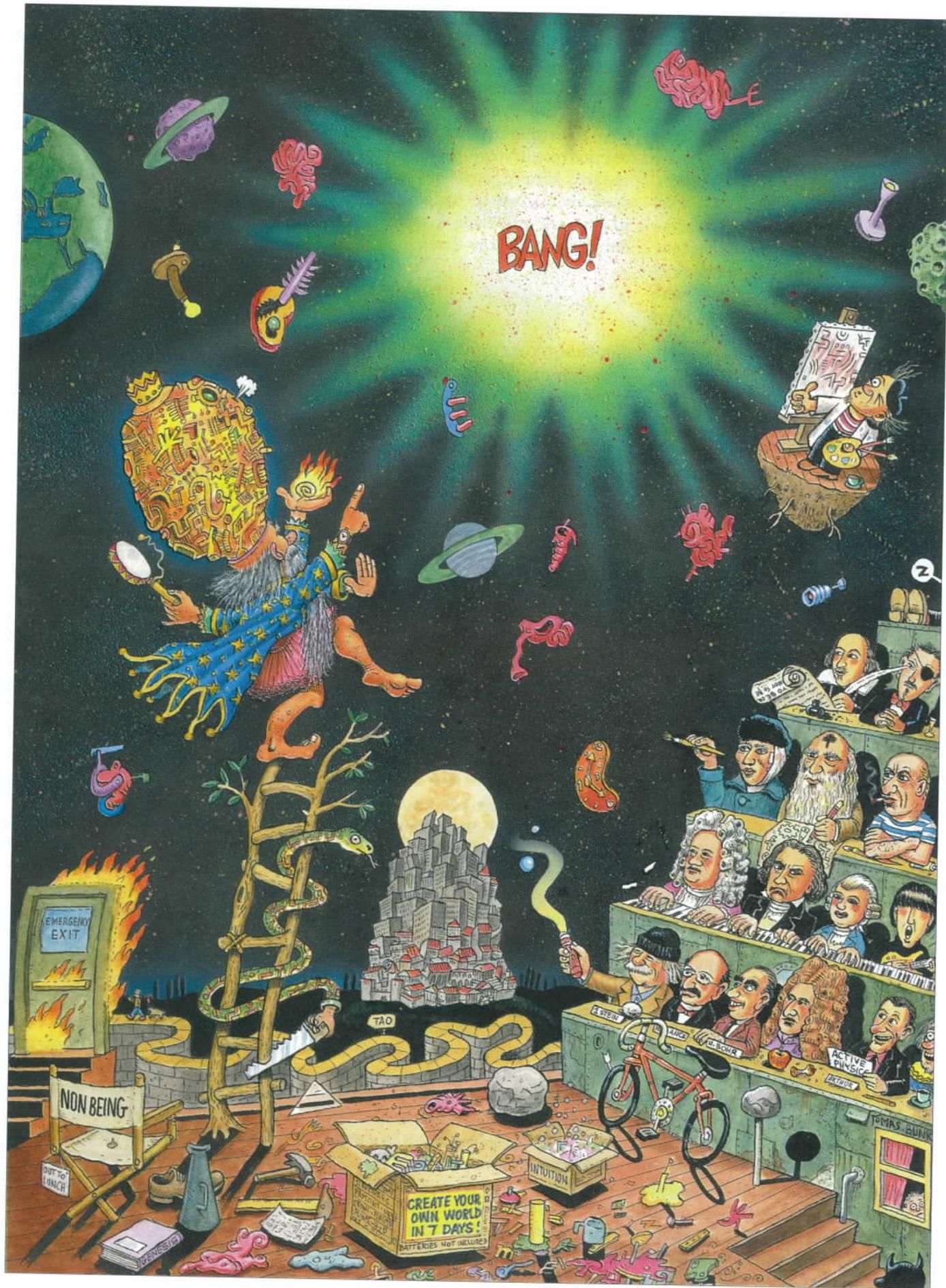
ψη τους. Ο επιστήμονας οφείλει επίσης να δημιουργήσει την προσωπική του κοσμοαντιληφτή. Ο επιστήμονας, ωστόσο, τελεί υπό την πίεση ενός βαρύτατου περιορισμού. Όσο γόνιμη φαντασία και αν διαθέτει, η δημιουργία του πρέπει να βρίσκεται σε αρμονία με τις μετρήσεις του φυσικού κόσμου.

Οι κορυφαίοι επιστήμονες δημιουργούν πρωτότυπες προσωπικές εποπτείες και μας βοηθούν να αντικρίσουμε τον κόσμο μέσα από τα δικά τους «γυαλιά». Στο παράθεμα που διαλέξαμε ως μότο του άρθρου, ο Weyl περιγράφει το πώς η ενόραση των επιστημόνων καθοδηγεί το έργο τους. Οι μεγάλοι επιστήμονες διαθέτουν τέτοια απαραμιλλή διαίσθηση ώστε, ακόμη και όταν συλλαμβάνουν έναν κόσμο διαφορετικό από εκείνον που ξέρουμε, συχνά ανακαλύπτουμε ότι ο «πραγματικός» κόσμος ενσωματώνει όψεις των εποπτειών τους, οπότε αναγκαζόμαστε εκ των υστέρων να αναγνωρίσουμε πως η προη-

γούμενη άποψη της κοινωνίας παρέμενε κοντόφθαλμη. Φυσικά, αφού περάσουν αιώνες, αυτή η εποπτεία βελτιώνεται περαιτέρω με τη βοήθεια ενός νέου ζεύγους διορθωτικών φακών, οι οποίοι έρχονται να ξεδιαλύνουν ακόμη περισσότερο τη σύγχυση.

Πώς ξεχωρίζουμε μια καλή θεωρία; Κατ' αρχάς, πρέπει να εξηγεί όλα όσα εξηγούσε επιτυχώς η κρατούσα ανταγωνιστική θεωρία. Πρέπει, επίσης, να μπορεί να εξηγήσει και μερικά φαινόμενα για τα οποία η κρατούσα θεωρία αδυνατεί να αρθρώσει ικανοποιητικό λόγο. Όταν η θεωρία είναι ικανή να προβλέψει κάτι που κανείς δεν έχει παρατηρήσει έως τότε, εάν δε στη συνέχεια αυτό το κάτι ανακαλυφθεί, τότε αντιλαμβανόμαστε ότι βρισκόμαστε ενώπιον μιας εξαίρετης θεωρίας.

Μια τέτοια εξαίρετη θεωρία υπήρξε η νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας. Διακηρύσσοντας ο Νεύτων ότι κάθε μάζα έλκει κάθε άλλη μάζα με μια δύναμη αντιστρόφως ανάλογη προς την απόσταση που τις χωρίζει, κατόρθωσε να εξηγήσει την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Την κίνηση αυτή την είχε ήδη περιγράψει αρκετά ικανοποιητικά ο Kepler, όμως η νευτώνεια σύνθεση πέτυχε κάτι σπουδαιότερο. Κατάφερε να εξηγήσει γιατί ο λόγος του τετραγώνου της τροχιακής περιόδου προς τον κύβο της απόστασης είναι μια σταθερά κοινή για όλους τους πλανήτες που περιφέρονται γύρω από



τον Ήλιο. Ο Νεύτων μάς προσέφερε μια μέθοδο για να «ζυγίσουμε» τον Ήλιο. Κατόρθωσε επίσης να εξηγήσει την κίνηση των παλιρροιών. Ποια υπήρξε η πρόβλεψη-έκπληξη της νευτώνειας θεωρίας; Πολύ αργότερα από το θάνατο του Νεύτωνα, στην τροχιά του Ποσειδώνα διαπιστώθηκαν κάποιες ανωμαλίες. Αν ευσταθούσε η νευτώνεια θεωρία, οι ανωμαλίες αυτές έπρεπε να αποτελούν ενδείξεις για την ύπαρξη κάποιου άγνωστου ώς τότε πλανήτη. Η ανακάλυψη του Ουρανού προσέφερε ισχυρότατη στήριξη στη νευτώνεια θεωρία της βαρυτικής έλξης.

Η θεωρία της βαρύτητας του Αϊνστάιν έθεσε τέρμα στη διακοσιετή θριαμβευτική πορεία του νευτώνειου μοντέλου. Η ίδια της στρέβλωσης του χωροχρονικού συνεχούς που εισηγήθηκε ο Αϊνστάιν στάθηκε ικανή να εξηγήσει την πλανητική κίνηση με την ίδια επιτυχία όπως και η νευτώνεια θεωρία. Η δημιουργία του Αϊνστάιν, ωστόσο, κατάφερε επίσης να εξηγήσει και τη μετάπτωση της τροχιάς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο. Το φαινόμενο της μετάπτωσης ήταν γνωστό από καιρό, αλλά παρέμενε ανεξήγητο στο πλαίσιο της νευτώνειας θεωρίας. Ο Αϊνστάιν κατόρθωσε να ρίξει φως σ' αυτό το αίνιγμα. Τι το άγνωστο ώς τότε προέβλεψε ο Αϊνστάιν; Προέβλεψε την καμπύλωση που υφίστανται οι ακτίνες του φωτός όταν διέρχονται πλησίον μιας μεγάλης μάζας —μια καμπύλωση που υπερέβαινε εκείνη την οποία θα ανέμενε κανείς στηριζόμενος στη νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας και στην αρχή της ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας ($E = mc^2$), την οποία είχε εισαγάγει λίγα χρόνια νωρίτερα ο Αϊνστάιν. Όταν η αποστολή του Arthur Eddington παρατήρησε την ηλιακή έκλειψη του 1919, διαπίστωσε πως ο Αϊνστάιν είχε όντως προβλέψει ένα φαινόμενο το οποίο ουδείς άλλος είχε διανοθεί.

Ο Niels Bohr και όλοι οι συνεργάτες του γνώριζαν πολύ καλά ότι το φάσμα του υδρογόνου ήταν διακριτό. Ο Rydberg, μάλιστα, είχε ήδη ανακάλυψε έναν τύπο που περιέγραφε μαθηματικώς τα μήκη κύματος του εκπεμπόμενου φωτός. Εντούτοις, η

θεωρία του Bohr για τις τροχιές του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα αποδείχτηκε πολύ γονιμότερη και αποτελεσματικότερη από τον εμπειρικό τύπο του Rydberg. Ο Bohr εισήγαγε το αίτημα ότι τα ηλεκτρόνια είναι υποχρεωμένα να περιφέρονται σε τροχιές τέτοιες ώστε η στροφορμή τους να ισούται με ακέραια πολλαπλάσια της σταθεράς h του Planck διαιρεμένης διά του 2π :

$$mv r = \frac{n\hbar}{2\pi}.$$

Συνδυάζοντας τούτη την αρχή με την ιδέα ότι τα ηλεκτρόνια διαγράφουν κυκλικές τροχιές υπό την επίδραση μιας ελεκτρικής ηλεκτρικής δύναμης Coulomb

$$\frac{mv^2}{r} = k_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

ο Bohr κατόρθωσε να προσδιορίσει τόσο τις ακτίνες όλων των δυνατών τροχιών όσο και τις ενεργειακές στάθμες που αντιστοιχούν σ' αυτές. Οι ενεργειακές στάθμες περιγράφονται ευσύνοπτα μέσω της ελάχιστης ενέργειας που αντιστοιχούσε στη στενότερη τροχιά:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2},$$

όπου με E_1 συμβολίζουμε την ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης, η οποία ισούται με $-13,6$ eV, ενώ n είναι ο ακέραιος που χαρακτηρίζει την κάθε τροχιά.

Ο Bohr πέτυχε να εξηγήσει το φάσμα του υδρογόνου διατυπώνοντας ένα δεύτερο αίτημα, σύμφωνα με το οποίο κατά τη μεταπήδηση των ηλεκτρονίων από μια ενεργειακή στάθμη σε κάποιαν άλλη χαμηλότερη εκπέμπονται φωτόνια με ενέργεια ίση προς τη διαφορά των ενεργειών των δύο σταθμών. Επομένως, στην περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο μεταπέδα από τη στάθμη με $n = 3$ στη στάθμη με $n = 2$, έχουμε

$$E_3 - E_2 = h\nu,$$

όπου $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s η σταθερά του Planck και ν η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτός.

Το ορατό φάσμα του υδρογόνου οφειλόταν στα άλματα του ηλεκτρονίου από τις στάθμες με $n = 3, 4$ και 5 στη στάθμη με $n = 2$. Τι θα έπρεπε να αναμένεται, ωστόσο, στην εύλογη περίπτωση όπου τα ηλεκτρόνια θα μπορούσαν να μεταπηδήσουν από υψηλότερες στάθμες στη θεμελιώδη στάθμη, σ' εκείνη δηλαδή που αντιστοιχούσε σε $n = 1$; Στηριζόμενος στη θεωρία του, ο Bohr υπολόγισε αυτές τις συχνότητες του φωτός —επρόκειτο για συχνότητες που εμπίπτουν στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος. Περιττεύει δε να πούμε πως όταν διερευνήθηκε και η υπεριώδης περιοχή, οι προβλέψεις του Bohr για τις συχνότητες επαληθεύτηκαν πανηγυρικά.

Ο Bohr προέβλεψε επίσης ότι το φάσμα του υδρογόνου περιλαμβάνει και άλλες συχνότητες, οι οποίες εκπέμπονται όταν τα ηλεκτρόνια μεταπηδούν στη στάθμη με $n = 3$. Η ύπαρξη τούτων των υπέρυθρων συχνοτήτων, με τις προβλεψείσες τιμές, επαληθεύτηκε επίσης. Ορισμένες τους ήταν ήδη γνωστές. Άλλες πάλι όχι. Οι συχνότητες, ωστόσο, που αντιστοιχούν σε άλματα προς τις στάθμες με $n = 4$ και 5 δεν είχαν παρατηρηθεί ποτέ ώς τότε. Βλέπετε, λόγω της ειδικής κατασκευής των ματιών μας, η εικόνα που σχηματίζουμε εμείς οι άνθρωποι για τον κόσμο περιορίζεται στο ορατό φάσμα. Ο Bohr, με τη βοήθεια της θαυμάσιας θεωρίας του, μας προσέφερε το μέσο για να διεισδύσουμε στον αόρατο κόσμο.

Τι άλλο απροσδόκητο μας αποκαλύπτει η θεωρία του Bohr; Ο Bohr κατόρθωσε να θέσει τις βάσεις για την κατανόηση του περιοδικού πίνακα και να προβλέψει τις χημικές ιδιότητες του στοιχείου με ατομικό αριθμό 72, που η θέση του στον πίνακα παρέμενε έως τότε κενή. Η ανακάλυψη του εν λόγω στοιχείου (ονομάστηκε αργότερα Bohr) έγινε μόλις μερικές ώρες προτού απονεμηθεί στον Bohr το βραβείο Νόμπελ.

Το πρώτο πρόβλημα του διαγωνισμού μας για το τρέχον τεύχος αντλεί στοιχεία από τις θεωρίες του Νεύτωνα και του Bohr.

1. Τούτο το πρόβλημα προέρχεται από ένα υπέροχο, παρότι ισχνό σε όγκο, βιβλίο το οποίο επιμελήθηκε ο N. Thompson και φέρει τον τίτλο *Thinking Like a Physicist*. Ένας μικρός φυσικός δορυφόρος, μάζας m και ακτίνας a , περιφέρεται γύρω από έναν πλανήτη κρατώντας συνεχώς στραμμένη προς αυτόν την ίδια όψη του. Αποδείξτε ότι, αν ο δορυφόρος πλησιάσει τον πλανήτη σε απόσταση μικρότερη από

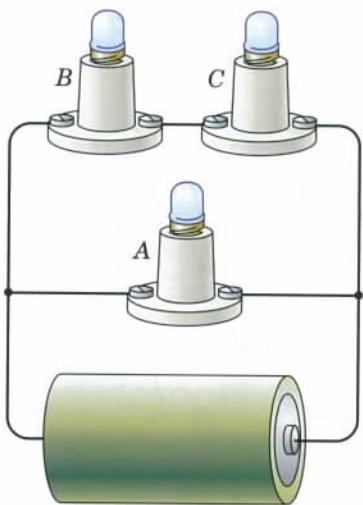
$$r_c = a^3 \sqrt{\frac{3M}{m}},$$

οι ελεύθεροι βράχοι που κείνται στην επιφάνειά του θα αρχίσουν να ανυψώνονται.

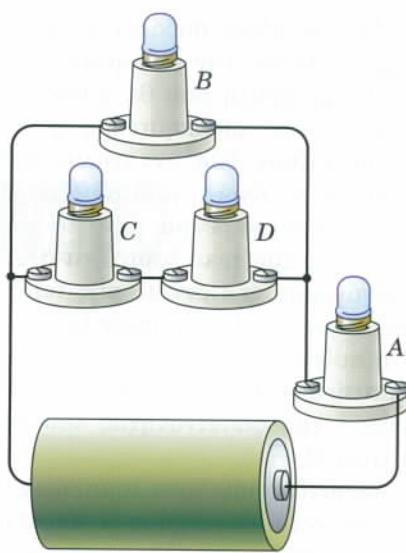
2. Το παρόν πρόβλημα τέθηκε πρώτη φορά στην 7η Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, η οποία διοργανώθηκε το 1974 στη Βαρσοβία. Ένα άτομο υδρογόνου στη θεμελιώδη στάθμη του συγκρούεται με ένα άλλο άτομο υδρογόνου που ηρεμεί και βρίσκεται επίσης στη θεμελιώδη στάθμη του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή ταχύτητα ώστε η κρούση να έχει ανελαστικό χαρακτήρα; Στην περίπτωση όπου η ταχύτητα υπερβαίνει τούτη την ελάχιστη τιμή, εκπέμπεται ένα φωτόνιο το οποίο παρατηρείται είτε στην κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας του πρώτου ατόμου είτε στην αντίθετη. Πόσο διαφέρουν οι συχνότητες αυτών των φωτονίων από τη συχνότητα που θα είχαν αν εκπέμπονταν από ένα άτομο σε ηρεμία; Δίνονται η ενέργεια ιονισμού του, $E = 13,6 \text{ eV} = 2,18 \times 10^{-18} \text{ J}$ και η μάζα του ατόμου του υδρογόνου, $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Μπαταρίες και λαμπτήρες

Στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 2000 θέσαμε μια σειρά ερωτημάτων τα οποία περιστρέφονταν γύρω από μερικούς πανομοιότυπους λαμπτήρες που συνδέονται με τους πόλους μιας ιδανικής μπαταρίας. Στο Σχήμα 1, εντονότερα φωτοβολεί ο λαμπτήρας A : ποι συγκεκριμένα, έχει την πρότυπη φωτεινότητα επειδή συνδέεται με τους πόλους της μπαταρίας μέσω της δικής του ιδιαίτερης διαδρομής. Οι λαμπτήρες B και



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σ φωτοβολούν το ίδιο έντονα, επειδή είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Λάμπουν αμυδρότερα από το λαμπτήρα A επειδή η διαδρομή τους παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση. Σημειώτεον ότι αν επρόκειτο για πραγματικούς λαμπτήρες που δεν υπακούουν στο νόμο του Ohm, το ρεύμα το οποίο θα τους διέρρεε δεν θα ισούταν με το μισό εκείνου που διαρρέει το λαμπτήρα A .

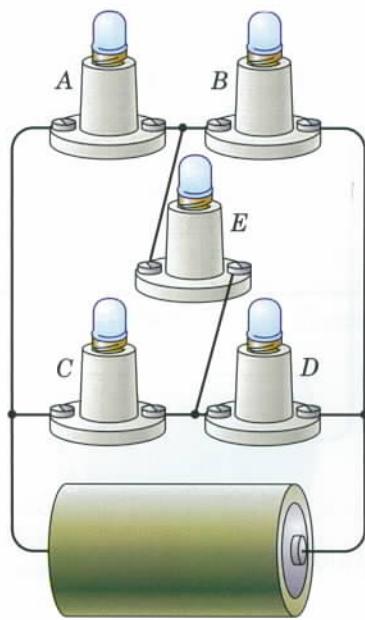
Περνάμε τώρα στα ερωτήματα που αφορούν την αφαίρεση ή τη βραχυκύκλωση διάφορων λαμπτήρων. (1) Αν αφαιρεθεί από τη βάση του ο λαμπτήρα A , οι δύο άλλοι λαμπτήρες θα εξακολουθήσουν να φωτοβολούν με την ίδια ένταση, επειδή συνδέονται με την μπαταρία μέσω της δικής τους, ανεξάρτητης διαδρομής. Σημειώτεον ότι η μπαταρία υποτίθεται ιδανική —δηλαδή μπορεί να παράσχει οσοδήποτε ρεύμα ενδέχεται να απαιτήσει το κύκλωμα. (2) Αν αφαιρεθεί από τη βάση του ο λαμπτήρας C , ο λαμπτήρας B θα σβήσει, διότι διακόπτεται η διαδρομή του προς την μπαταρία. Αντίθετα, ο λαμπτήρας A θα παραμένει ανεπηρέαστος. (3) Αν βραχυκυκλώσουμε λαμπτήρα A ενώνοντας με σύρμα τους ακροδέκτες του, τότε θα σβήσουν όλοι οι λαμπτήρες, δεδομένου ότι με την ενέργεια μας βραχυκυκλώνουμε ταυτόχρονα και τη διαδρομή μέσω των λαμπτήρων B και C . (4) Αν βραχυκυκλώθει ο λαμπτήρας C , προφανώς

οφήνει. Ο λαμπτήρας A παραμένει ανεπηρέαστος. Από την άλλη, ο λαμπτήρας B γίνεται φωτεινότερος, διότι η αντίσταση της διαδρομής του μειώνεται. Για την ακρίβεια, μάλιστα, φωτοβολεί εξίσου έντονα με τον A , διότι οι δύο τους βρίσκονται πλέον συνδεδεμένοι παράλληλα.

Στο Σχήμα 2, εντονότερα φωτοβολεί ο λαμπτήρας A , διότι απ' αυτόν περνά όλο το ρεύμα της μπαταρίας. Οι αμυδρότεροι είναι οι λαμπτήρες C και D , ενώ ο λαμπτήρας B παρουσιάζει ενδιάμεση φωτεινότητα, διότι η διαδρομή του έχει μικρότερη αντίσταση από εκείνη των C και D . (1) Αν αφαιρέσουμε το λαμπτήρα A , τότε διακόπτεται η διαδρομή που συνδέει τους υπόλοιπους τρεις λαμπτήρες με την μπαταρία, με αποτέλεσμα να σβήσουν όλοι τους. (2) Αν αφαιρέσουμε το λαμπτήρα C , προκαλούμε το σβήσιμο του λαμπτήρα D , καθότι η διαδρομή του διακόπτεται. Ταυτόχρονα θα μειωθεί και η φωτεινότητα του λαμπτήρα A , δεδομένου ότι η κατάργηση της μίας από τις δύο παράλληλες διαδρομές έχει ως συνέπεια να αυξήθει η αντίσταση της διαδρομής του. Εφόσον οι λαμπτήρες A και B συνδέονται πλέον σε σειρά, προφανώς θα φωτοβολούν με ίση ένταση. (4) Η βραχυκυκλώση του λαμπτήρα C έχει ως συνέπεια να μειωθεί η αντίσταση της διαδρομής του λαμπτήρα A , οπότε η φωτοβολία του θα ενισχυθεί. Οι λαμπτήρες B και D

συνδέονται πλέον παράλληλα, και επομένως έχουν την ίδια φωτεινότητα. Τη μεταβολή που θα υποστεί η φωτεινότητα του λαμπτήρα *B* την προσδιορίζουν δύο ανταγωνιστικοί παράγοντες. Ενώ η μπαταρία παρέχει περισσότερο ρεύμα, μόνο το μισό απ' αυτό διαρρέει το λαμπτήρα *B*. Αν εισαγάγουμε την έννοια της τάσης, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η αύξηση της φωτεινότητας του λαμπτήρα *A* απαιτεί αντιστοίχως τη μείωση της φωτεινότητας του λαμπτήρα *B*.

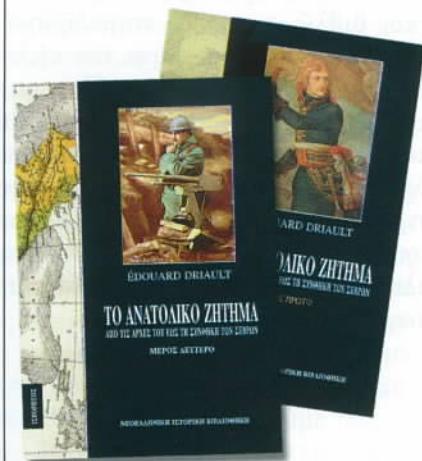
Αν συνδέσουμε τους λαμπτήρες όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, παρατηρούμε αμέσως ότι όλοι τους έχουν την ίδια φωτεινότητα εκτός από τον *E*, ο οποίος παραμένει σβηστός. Επικαλούμενος κανείς τη συμμετρία του κυκλώματος, μπορεί να καταδείξει ότι ο λαμπτήρας *E* όντως δεν πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα. (1) Αν αφαιρεθεί ο λαμπτήρας *A*, το κύκλωμα γίνεται ταυτόσημο με εκείνο του Σχήματος 2. Η αρχική συμμετρία καταστρέφεται, και έτσι ο λαμπτήρας *E* αρχίζει να φωτοβολεί. Η αντίσταση του κυκλώματος αυξάνεται, με αποτέλεσμα η παροχή ρεύματος από την μπαταρία να πέσει. Τώρα, όμως, όλο το ρεύμα περνά υποχρεωτικά από το λαμπτήρα *C*. Ο τελευταίος αυτός παράγοντας υπερισχύει, και έτσι η φωτοβολία του λαμπτήρα *C* ενισχύεται. Οι λαμπτήρες *B* και *D*, αντίθετα, γίνονται αμυδρότεροι. (2) Η αφαίρεση του λαμπτήρα *E* από τη βάση του δεν έχει απολύτως καμία επίπτωση, καθόσον στο αρχικό κύκλωμα ούτως ή άλλως δεν διαρρέεται καθόλου από ρεύμα. (3) Η αφαίρεση των λαμπτήρων *A* και *E* προκαλεί το σβήσιμο του λαμπτήρα *B*. Οι λαμπτήρες *C* και *D* δεν επηρεάζονται καθόλου. (4) Αν αφαιρέσουμε τους λαμπτήρες *A* και *D*, μας μένουν τρεις λαμπτήρες συνδεδεμένοι σε σειρά. Ο λαμπτήρας *E* θα ανάψει, ενώ οι *B* και *C* θα γίνουν αμυδρότεροι. (5) Με τη βραχυκύκλωση του λαμπτήρα *A*, ο λαμπτήρας *B* αποκτά άμεση διαδρομή προς την μπαταρία. Συνεπώς, η φωτεινότητά του θα αυξηθεί και θα γίνει ίση με την πρότυπη. Οι λαμπτήρες *C* και *E* συνδέονται πλέον παράλληλα, οπότε ο λαμπτήρας *E* θα ανάψει. Ο λα-



Σχήμα 3

μπτήρας *C*, που προηγουμένως συνδεόταν σε σειρά με έναν ακόμη λαμπτήρα (τότε ο *E* μπορούσε να αγνοηθεί τελείως), συνδέεται πλέον παράλληλα με το λαπτήρα *E*, και ο συνδυασμός αυτός σε σειρά με το λαμπτήρα *D*. Τούτο σημαίνει ότι η φωτοβολία του λαμπτήρα *C* θα εξασθενήσει. Από την άλλη, η αντίσταση της διαδρομής του λαμπτήρα *D* μειώνεται —η αντίσταση ενός λαμπτήρα αντικαθίσταται από την αντίσταση δύο λαμπτήρων συνδεδεμένων παράλληλα—, οπότε ο λαμπτήρας *D* θα φωτοβολεί εντονότερα. (6) Η βραχυκύκλωση του λαμπτήρα *E* δεν επηρεάζει τη φωτεινότητα των υπόλοιπων τριών λαμπτήρων, καθόσον αυτός ο κλάδος δεν διαρρέεται από ρεύμα. (7) Η ταυτόχρονη βραχυκύκλωση των λαμπτήρων *C* και *E* έχει ως αποτέλεσμα να βραχυκυκλωθεί και ο λαμπτήρας *A*. Επομένως, και οι τρεις προαναφερόμενοι λαμπτήρες σβήνουν. Ο καθένας από τους δύο υπολειπόμενους λαμπτήρες διαθέτει πλέον και μια ανεξάρτητη διαδρομή προς την μπαταρία, οπότε η φωτοβολία τους θα ενισχυθεί και θα αποκτήσουν την πρότυπη φωτεινότητα. (8) Αν βραχυκυκλώσουμε τους λαμπτήρες *A* και *D*, μένουμε με τρεις λαμπτήρες συνδεδεμένους παράλληλα, οπότε ο καθένας τους θα έχει την πρότυπη φωτεινότητα.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Éduard Driault

ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του
έως τη Συνθήκη των Σεβρών

Ο Éduard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας στη Σορβόνη, δημοσίευσε συμπληρωμένο το μνημιώδες έργο του *To Anatolikό Ζήτημα* το 1921. Από τότε το βιβλίο του θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση των βαθύτερων αιτίων που προκαλεσαν, και εξακολουθούν να προκαλούν, εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και των κρατών της Βαλκανικής, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη. Αξιο προσοχής είναι ότι το βιβλίο μελετά το συγκρουσιακό πρότυπο που ορίζει τις σχέσεις των Μεγάλων Δυνάμεων, με όλες τις εναλλαγές τους κατά τις διάφορες ιστορικές περιόδους, αλλά και τη δυναμική που αναπτύσσεται στο διεθνές πολιτικό πεδίο. Ενδιαφέρει ιδιαίτερα το σύγχρονο αναγνώστη, διότι στις σελίδες του εξηγούνται σημερινές καταστάσεις και προβλήματα της Βαλκανικής χερσονήσου και των λαών της: τέλος, ερμηνεύεται με τρόπο διαφωτιστικό και η σημερινή ελληνοτουρκική αντιπαράθεση.

Τόμος Α': 527 σελ., Α/Μ, 14 × 21 εκ.,
7.500 δρχ.

Τόμος Β': 440 σελ., Α/Μ, 14 × 21 εκ.,
7.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΣΤΟΡΗΤΙΚΗΣ / κάτοπτρο

Τι συμβαίνει στο σύνορο

Ψάχνοντας για μαργαριτάρια στο βυθό του Αιγαίου

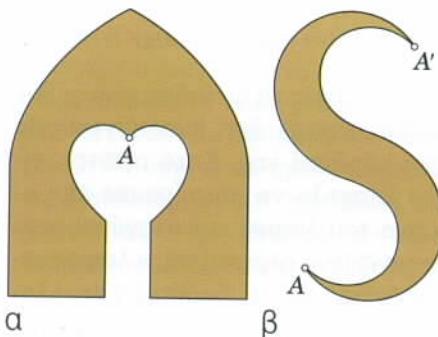
A. Borovoy και Y. Klimov

ΣΤΗ ΘΕΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΛΥΚΕΙΑΚΗΣ φυσικής, τα φαινόμενα τα οποία παρουσιάζονται στη συνοριακή επιφάνεια που χωρίζει ενα υγρό από κάποιο άλλο μέσο δεν προσελκύουν παρά ελάχιστη μόνο προσοχή. Εντούτοις, η επιφανειακή τάση, η διαφροχή και η τριχοειδική δράση αποτελούν την υποκείμενη βάση στην οποία στηρίζονται πλήθος εξαιρετικά ενδιαφέροντα πειράματα και παρατηρήσεις, ορισμένα γνωστά από παλιά και άλλα που ανακαλύφθηκαν μόλις πρόσφατα —άλλοτε ιδιαίτερα πολύπλοκα και άλλοτε απλούστατα. Ιδού λοιπόν το θέμα με το οποίο θα καταπαστούμε στο παρόν άρθρο. Θα ξεκινήσουμε με μια διάσημη επίδειξη, η οποία ωστόσο πραγματοποιείται πολύ εύκολα.

Χάρτινα «ταχύπλοα» και έγχρωμοι κύκλοι

Πάρτε ένα φύλλο χαρτί και κόψτε μια «βάρκα» όπως εκείνη που φαίνεται στο Σχήμα 1a. Τοποθετήστε μια σταγόνα πυκνού σαπωνοδιαλύματος ή ένα κομματάκι σαπουνιού πάνω στο σημείο A. Στη συνέχεια, ακουμπήστε τη βάρκα στην επιφάνεια του νερού που έχετε συγκεντρώσει σε μια λεκάνη. Όπως θα διαπιστώσετε, η βάρκα θα ξεκινήσει αμέσως να πλέει προς τα εμπρός.

Αντί για βάρκα, μπορείτε να φτιάξετε μια έλικα σαν το σιγμοειδές α-



Σχήμα 1

ντικείμενο που εικονίζεται στο Σχήμα 1b. Τοποθετήστε σαπούνι στα σημεία A και A'. Προς ποια κατεύθυνση θα περιστραφεί η έλικα;

Το επόμενο πειράμα απαιτεί κάποια εξάσκηση, αλλά οι προσπάθειές σας θα επιβραβευθούν με μια όμορφη επίδειξη. Πάρτε ένα δοχείο με διαυγές, καθαρό νερό και αγγίξτε την επιφάνεια του με μια πένα γεμάτη με μαύρη μελάνη. Η επαφή αυτή θα δημιουργήσει μια σκούρα κηλίδα που απλώνεται στην επιφάνεια του νερού. Στη συνέχεια, πάρτε μια ράβδο που την έχετε τρίψει με σαπούνι, ή και απλά ένα κομμάτι σαπούνι, και αγγίξτε μ' αυτήν το κέντρο της κηλίδας —η συνοχή της θα καταστραφεί και θα μετατραπεί σε έναν λεπτό δακτύλιο. Αγγίξτε και πάλι το κέντρο του δακτυλίου με την πένα (τούτη τη φορά θα μπορούσατε να την έχετε γεμίσει με μελάνη διαφορετικού χρώματος), και κατόπιν ξαναχρησι-

μοποιήστε την τριμμένη με σαπούνι ράβδο. Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένας σχηματισμός από ομόκεντρους δακτυλίους διαφορετικών χρωμάτων (Σχήμα 2). Μάλιστα, αν χαμηλώσετε προσεκτικά ένα κομμάτι στυπόχαρτο ώσπου να ακουμπήσει στο υγρό καθ' όλη την επιφάνειά του, θα πετύχετε να μεταφέρετε την εικόνα στο στυπόχαρτο.

Το πέιραμα που μόλις περιγράφαμε δεν έμεινε χωρίς πρακτική εφαρμογή —αποτελεί τη βασική ιδέα μιας παραδοσιακής τεχνικής που χρησιμοποιείται στην Ιαπωνία για την παραγωγή χαρτιού διακοσμημένου με μια καταπληκτική ποικιλία υπέροχων σχεδίων.

Μπορούμε εύκολα να εξηγήσουμε τι συμβαίνει σ' αυτά τα πειράματα αν φανταστούμε την επιφάνεια του νερού σαν ένα τεντωμένο υμένιο (υγρή μεμβράνη). Ο πρώτος που προέβαλε τούτο το μοντέλο υπήρξε ο διάσημος άγγλος φυσικός Thomas Young. Τον



Σχήμα 2

Δεκέμβριο του 1804, δημοσίευσε μια εργασία που εξηγούσε την τριχοειδική δράση χρησιμοποιώντας ένα τεντωμένο υμένιο ως μοντέλο της επιφάνειας των υγρών. Το συγκεκριμένο μοντέλο σύντομα επιβεβαιώθηκε από άλλα πειράματα και έγινε καθολικά αποδεκτό.

Συνεπώς, η επιφάνεια του αμιγούς, καθαρού νερού είναι ένα τεντωμένο υμένιο. Η επιφάνεια του νερού που περιέχει εν διαλύσει σαπούνι ή μελάνη είναι επίσης ένα υμένιο, μόνο που χαρακτηρίζεται από μικρότερη ελαστικότητα. Το καθαρό νερό επιδεικνύει μεγαλύτερη «επιθυμία» να συρρικνωθεί απ' ό, τι ένα υμένιο αποτελούμενο από διάλυμα σαπουνιού ή μελάνης: ως εκ τούτου, έλκει τη συνοριακή ακμή των άλλων υμενίων, τραβώντας προς το μέρος του τη «βάρκα» ή τον μελανωμένο δακτύλιο.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να προσδιορίσουμε πειραματικά το βαθμό «ελαστικότητας» που χαρακτηρίζει τα επιφανειακά υμένια. Πρόκειται για ένα μέγεθος που είναι γνωστό ως συντελεστής επιφανειακής τάσης, και το οποίο συνήθως παριστάνεται με το ελληνικό γράμμα σ . Μια από τις απλούστερες μεθόδους στηρίζεται στη διαδικασία σχηματισμού σταγόνων στο κατώτερο άκρο ενός κατακόρυφου στενού σωλήνα. Πάρτε ένα σταγονόμετρο με στενό ρύγχος και γεμίστε το με νερό. Πιέστε το προσεκτικά ώσπου να εμφανιστεί στο άκρο του μια σταγόνα και παρατηρήστε πώς αυτή μεγαλώνει και αλλάζει σχήμα. Τελικά, η σταγόνα αποσπάται από το σταγονόμετρο και πέφτει (Σχήμα 3).

Προσέξτε ότι η σταγόνα αποσπάται από το σταγονόμετρο μόνο όταν αποκτήσει αρκετά μεγάλο μέγεθος. Όσο η σταγόνα παραμένει μικρή, η

επιφανειακή τάση τη συγκρατεί στο ρύγχος του σταγονομέτρου. Κατά τη στιγμή της απόσπασης, το βάρος mg της σταγόνας γίνεται ακριβώς ίσο με τη δύναμη της επιφανειακής τάσης F . Ή, όπως θα έγραφε το σχολικό σας εγχειρίδιο,

$$mg = 2\pi r \sigma,$$

όπου με r συμβολίζουμε την ακτίνα του «λαιμού» της σταγόνας μόλις προτού απόσπαστεί από το σταγονόμετρο.

Μετρώντας, ας πούμε, 100 σταγόνες και προσδιορίζοντας την ολική τους μάζα $M = 100m$ με τη βοήθεια ενός ζυγού, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή επιφανειακής τάσης τού υπό μελέτη υγρού:

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{Mg}{200\pi r}.$$

Δυστυχώς, η μέθοδος που μόλις παρουσιάσαμε δεν διακρίνεται για την ακρίβειά της. Κατά πρώτον, είναι δύσκολο να μετρήσουμε την ακτίνα του λαιμού της σταγόνας (στα οργανωμένα εργαστήρια, ο λαιμός μεγεθύνεται με τη βοήθεια κατάλληλων οπτικών διατάξεων και προβάλλεται σε μια οθόνη, όπου και πραγματοποιούνται οι απαιτούμενες μετρήσεις). Κατά δεύτερον, η πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τη διαδικασία της απόσπασης μιας υγρής σταγόνας δεν γίνεται αντιληπτή αν τη φανταστούμε ως απλή ρήξη του λαιμού. Για παράδειγμα, ταυτόχρονα με την αρχική μεγάλη σταγόνα σχηματίζεται ακόμη ένα μικρό σταγονίδιο. Επιπλέον, σε ένα πραγματικό πείραμα παρεισφέρουν πάντοτε και άλλες πηγές σφαλμάτων.

Παρά ταύτα, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει τίποτε περισσότερο από το να μάθουμε την τάξη μεγέθους του σ ή από το να συγκρίνουμε ποιοτικά την επιφανειακή τάση του καθαρού νερού με εκείνη ενός σαπωνοδιαλύματος, τότε αρκεί να υποθέσουμε την ακτίνα του λαιμού της απόσπωμενης σταγόνας ίση με την εσωτερική ακτίνα του ρύγχους του σταγονομέτρου. Την τελευταία μπορούμε να τη βοήθεια ενός βαθμονομημένου σύρ-

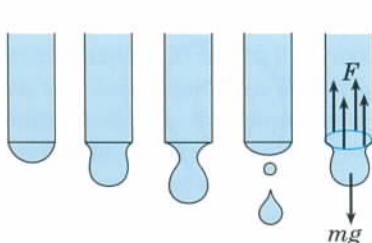
ματος που εφαρμόζει ακριβώς στο άνοιγμα του σταγονομέτρου.

Για να δώσουμε στον αναγνώστη τη δυνατότητα να κάνει μερικές χρήσιμες συγκρίσεις, ας παραθέσουμε τις τιμές τού συντελεστή επιφανειακής τάσης σ για ορισμένα υγρά: για το νερό στους 20°C , $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$; για διάλυμα νερού και σαπουνιού, $\sigma = 0,04 \text{ N/m}$; για το ελαιόλαδο, $\sigma = 0,033 \text{ N/m}$; για την κηροζίνη, $\sigma = 0,026 \text{ N/m}$; και τέλος για τον υδράργυρο, ο σ στον αέρα μειώνεται βαθμιαία από $0,5$ σε $0,4 \text{ N/m}$.

Κυματισμός και πώς να τον εξασθενίσουμε

Είναι ενδιαφέρον ότι οι δυνάμεις της επιφανειακής τάσης ευθύνονται για τα λεγόμενα τριχοειδικά κύματα (δηλαδή, για τον ελαφρό κυματισμό πάνω στην επιφάνεια του νερού). Πρόκειται για κύματα που μπορούν να παρατηρηθούν με τη βοήθεια του προηγούμενου σταγονομέτρου. Γεμίστε ένα μπολ με νερό, φέρτε το σταγονόμετρο κοντά στην επιφάνεια, και αφήστε τις σταγόνες να πέσουν στο νερό. Τα ταχέως διαδιδόμενα κατά την ακτινική διεύθυνση ομόκεντρα κύματα που θα παρατηρήσετε δεν είναι τίποτε άλλο παρά κύματα επιφανειακής τάσης. (Γενικά μιλώντας, ο μηχανισμός σχηματισμού και διάδοσης κυμάτων πάνω στην επιφάνεια του νερού κάθε άλλο παρά απλός πρέπει να θεωρείται. Πρόκειται για ένα έργο όπου τους πρωταγωνιστικούς ρόλους τούς παίζουν η δύναμη της βαρύτητας και η επιφανειακή τάση. Παρά ταύτα, το μοντέλο του ελαστικού υμενίου αποδεικνύεται επαρκές για την εξήγηση των ρυτιδώσεων που δημιουργούνται πάνω στην υδατινή επιφάνεια.)

Σύμφωνα με μια παλιά ιστορία, στα αρχαία χρόνια οι αλιείς μαργαριτάριών, που βουτούσαν για μαργαριτάρια στο βυθό του Αιγαίου πελάγους, προτού καταδυθούν αποθήκευαν στο στόμα τους μια γουλιά ελαιόλαδου. Όταν έφταναν στο βυθό, απελευθέρωνταν το ελαιόλαδο, το οποίο ανέβαινε στην επιφάνεια και σταματούσε τοπικά τον κυματισμό, δημιουργώντας κατ' αυτό τον τρόπο ένα



Σχήμα 3

διαφανές «παράθυρο» που άφηνε το ηλιακό φως να κατεβεί ώς τα βάθη της θάλασσας. Έτσι, οι δύτες διευκολύνονταν στο έργο της αναζήτησης των μαργαριτοφόρων οστράκων στο βυθό.

Ιδού μία ακόμη ενδιαφέρουσα παρατήρηση. «Όταν επικρατεί νησεμία, στη λεία επιφάνεια της θάλασσας είναι δυνατόν να παρατηρηθούν ευκρινώς ορισμένες μορφές που μοιάζουν με σχήματα μουαρέ», έγραφε ο διακεκριμένος ρώσος γεωφυσικός V.V. Shuleikin. «Αν κανείς κοιτάξει προσεκτικά, είναι εύκολο να δει ότι οι ρυτιδώσεις εμφανίζονται μέσα στο περίγραμμα ενός φωτεινότερου φόντου, και ότι οι φωτεινές κηλίδες και ταινίες που διακρίνονται πάνω σ' αυτό το φόντο αντιστοιχούν σε περιοχές της θαλάσσιας επιφάνειας όπου οι ρυτιδώσεις είναι εξασθενημένες.» Ο Shuleikin και οι συνεργάτες του διεξήγαγαν πειράματα όπου μετρήθηκε ο συντελεστής επιφανειακής τάσης με τη μέθοδο της αποκόλλησης κώνου. Αυτά τα πειράματα έδειξαν ότι όπου υπήρχε κυματισμός, ο συντελεστής επιφανειακής τάσης ισούνταν με εκείνον του καθαρού νερού. Αντίθετα, ο ίδιος συντελεστής βρέθηκε σημαντικά μικρότερος στην περιοχή των φωτεινών κηλίδων. Οι πειραματιστές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι ρυτιδώσεις στη θαλάσσια επιφάνεια εξασθενούν όταν αυτή καλύπτεται από ένα υμένιο λαδιού ή κάποιας άλλης ουσίας. Ωστόσο, η θεωρητική εξήγηση τουτου του περίεργου φαινομένου δεν ήταν καθόλου απλό θέμα.

Όπως έδειξαν μελέτες που διεξήχθησαν στη συνέχεια, τα επιφανειακά υμένια, ενώ προσφέρονται ως αποτελεσματικό μέσο μόνο για την εξασθένιση των μικρών κυμάτων (δηλαδή, κυματισμών μικρού μήκους κύματος), μπορούν επίσης να εμποδίζουν το σχηματισμό αφρού στις κορυφές των μεγάλων κυμάτων όταν επικρατεί θυελλώδης καιρός. Τούτη η μάλλον περιορισμένη βοήθεια μπορεί, όπως υπογράμμισε ο Shuleikin, να αποβεί ζωτικής σημασίας για τη σωτηρία ανθρώπινων ζωών σε ένα ναυάγιο: «Στην πράξη εκείνο που έχει σημασία είναι να τιθασεύσουμε

μόνο τις αφριομένες κορυφές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν μια μεγάλη απειλή για το πλοίο και ακόμη μεγαλύτερη για τις σωσίβιες λέμβους που ρίχνονται στη θάλασσα.»

Τι σχήμα έχει μια σταγόνα;

Η απάντηση σ' αυτό το φαινομενικά απλό ερώτημα εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες. Αν το σχήμα της σταγόνας καθοριζόταν αποκλειστικά και μόνο από τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης, οι σταγόνες θα προσλάμβαναν τη μορφή που θα τους εξασφάλιζε το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν επιφανείας. Όποιος έχει μελετήσει φυσική γνωρίζει για ποια μορφή μιλάμε —πρόκειται για τη σφαίρα. Άλλα η βαρύτητα της Γης «παραμορφώνει» τούτο το ιδανικό σχήμα, οπότε σε πολλές περιπτώσεις οι σταγόνες εμφανίζονται επιμηκυμένες και διογκωμένες προς τα κάτω, ενώ μόνο οι πολύ μικρές σταγόνες διατηρούν το σφαιρικό τους σχήμα. Τι θα συμβεί αν προσπαθήσουμε να εξουδετερώσουμε τη δράση της βαρύτητας —ή, ορθότερα, αν εξουδετερώσουμε τη δράση της βαρύτητας μέσω κάποιας άλλης δύναμης;

Το 1843, ο βέλγος φυσικός Joseph Plateau πραγματοποίησε ένα ευφύεστα πείραμα, το οποίο δεν άργησε να εισαχθεί σε σχεδόν κάθε σχολικό εγχειρίδιο φέροντας το όνομα του ανθρώπου που το επινόησε. Ο Plateau βρήκε ποια συγκέντρωση πρέπει να έχει η αιθυλική αλκοόλη σε ένα υδατικό διάλυμα ώστε η πυκνότητα του διαλύματος να γίνεται ίση με εκείνη του ελαιολάδου. Κατόπιν πρόσθεσε μια ποσότητα ελαιολάδου στο μείγμα και επέτυχε να δημιουργήσει μια σφαιρική σταγόνα. Η εξήγηση του αποτέλεσματος ήταν προφανής: η άνωση εξουδετερώνει τη δύναμη της βαρύτητας, ενώ το σφαιρικό σχήμα της σταγόνας οφείλεται αποκλειστικά στην επιφανειακή τάση.

Έχει ενδιαφέρον ότι, όταν επικρατούν συνθήκες έλλειψης βαρύτητας, μπορεί κανείς να δημιουργήσει μεγάλες σφαίρες από οποιοδήποτε υγρό. Τέτοιες σταγόνες παρατηρήθηκαν στο Διάστημα κατά τη διεξαγωγή πειραμάτων ηλεκτροσυγκόλλησης. Επρόκειτο για σταγόνες που αποτε-

λούνταν από τετηγμένο μέταλλο.

Μπορείτε να αναπαραγάγετε τα πειράματα του Plateau στο σπίτι σας χρησιμοποιώντας καστορέλαιο και νερό. Το καστορέλαιο έχει πυκνότητα ελαφρώς μικρότερη από εκείνη του νερού, οπότε αν ρίξετε νερό μέσα σ' αυτό, θα παρατηρήσετε ότι σχηματίζονται σφαιρικές σταγόνες νερού που βυθίζονται αργά. Μάλιστα, μπορείτε να χρωματίσετε τις σταγόνες με νερομπογιές έτσι ώστε να πετύχετε μια υπέροχη εικόνα πολύχρωμων σφαιρών μέσα στο ποτήρι με το καστορέλαιο.

Ένα δυσκολότερο αλλά ακόμη θεαματικότερο πείραμα είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί αν χρησιμοποιήσουμε υγρή εποξειδική ρητίνη και αλατούχο διάλυμα. Ρίξτε επιτραπέζιο αλάτι σ' ένα δοχείο γεμάτο με νερό. Έπειτα από λίγο, το αλάτι θα διαχυθεί προς τα πάνω δημιουργώντας ένα διάλυμα του οποίου η συγκέντρωση μειώνεται καθ' ύψος. Κατά συνέπεια, τα ανώτερα στρώματα του διαλύματος θα έχουν μικρότερη πυκνότητα από τα κατώτερα. Σε ένα τέτοιο διάλυμα μεταβλητής πυκνότητας, οι σταγόνες εποξειδικής ρητίνης κατέρχονται μέχρι ορισμένου βάθους όπου και παραμένουν αιωρούμενες. Τις σταγόνες αυτές μπορείτε να τις χρωματίσετε με όποια μέθοδο θέλετε.

Το ίκνος μιας ξηραμένης σταγόνας

Ένα μυστηριώδες (εκ πρώτης όψεως τουλάχιστον) φαινόμενο παρουσιάζεται όταν ξηραίνεται μια σταγόνα από κάποιο διάλυμα. Πρόκειται για απλούστατο πείραμα. Τοποθετήστε μερικές σταγόνες πολύ πυκνού αλατούχου διαλύματος σε ένα γυάλινο πιάτο και αφήστε τες να ξεραθούν. Όπως αναμένεται, στη θέση των σταγόνων θα απομείνουν τελικά λευκές κηλίδες αλατού. Το περίεργο έγκειται στο ότι το αλάτι δεν επικάθηται στην επιφάνεια του πιάτου ομοιόμορφα, αλλά κατανέμεται σε ένα σύνολο εναλλασσόμενων δακτυλίων. Τούτη η ιδιόμορφη συμπεριφορά πρέπει να αποδοθεί στη διαλείπουσα, «νευρική» φύση της διαδικασίας ξήρανσης. ◻

Η τριγωνομετρία του Πτολεμαίου

«Και τον όλον ουρανόν αρμονίαν είναι και αριθμόν.»

—Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 985β

V. Zatakavai

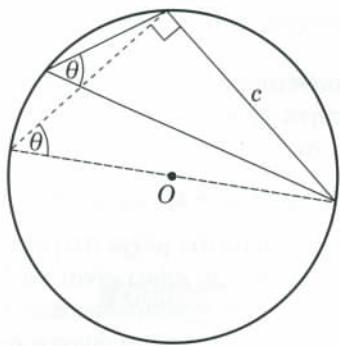
ΠΙΝ 2.000 ΠΕΡΙΠΟΥ ΧΡΟΝΙΑ, ΟΙ αρχαίοι Έλληνες επισήμαναν, κατά τις αστρονομικές τους παρατηρήσεις, ότι το μήκος της χορδής ενός κύκλου εξαρτάται από το γωνιακό μέτρο του αντίστοιχου τόξου. Ο έλληνας αστρονόμος Πτολεμαίος μέτρησε το μήκος μιας χορδής στην οποία έβαινε δεδομένη επίκεντρη γωνία, μετά υπολόγισε το λόγο αυτού του μήκους προς την ακτίνα

του κύκλου και κατασκεύασε έναν πίνακα. Αν η εγγεγραμμένη γωνία εσούται με θ , και το μήκος του τόξου είναι c , τότε $c = 2R\eta\mu\theta$ (βλ. Σχήμα 1). Επομένως, ο Πτολεμαίος κατασκεύασε ουσιαστικά έναν πίνακα των $\eta\mu\theta$, για $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

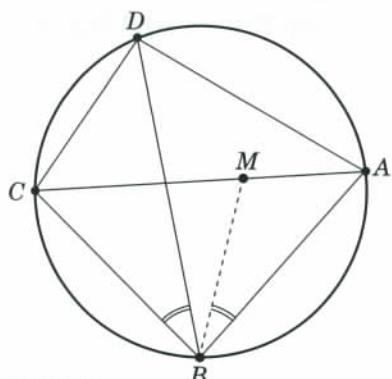
Ο Πτολεμαίος επεξέτεινε τον πίνακά του και για χορδές αμβλειών γωνιών. Για παράδειγμα, αν ήθελε το

μήκος της AC (Σχήμα 2), υπολόγιζε πρώτα το μήκος της BC και στη συνέχεια, επομένωντας ότι η AB είναι διάμετρος, χρησιμοποιούσε το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσει

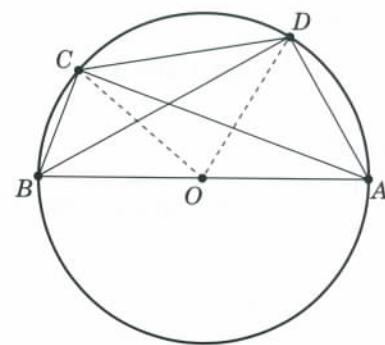




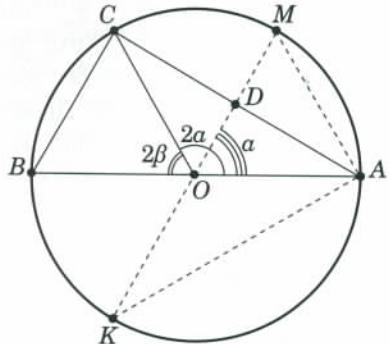
Σχήμα 1



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 2

την AC . Εφόσον $AC = 2R\eta\mu a$ και $BC = 2R\eta\mu b$, αυτή η διαδικασία είναι 1-σοδύναμη με τη χρήση της σχέσης $\eta\mu^2 a + \sigma\nu^2 a = 1$.

Ένα άλλο επίτευγμα του Πτολεμαίου ήταν το θεώρημα που φέρει σήμερα το όνομά του —το θεώρημα του Πτολεμαίου.

Θεώρημα. Το γινόμενο των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του (Σχήμα 3).

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σημείο M της διαγωνίου AC τέτοιο ώστε $\angle ABM = \angle CBD$. Αφού οι $\angle CDB$ και $\angle MAB$ είναι και οι δύο εγγεγραμμένες στον κύκλο και βαίνουν στο τόξο BC , έχουμε $\angle CDB = \angle MAB$. Συνεπώς, τα τρίγωνα BCD και ABM είναι όμοια. Οπότε,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AM},$$

και, επομένως,

$$AB \cdot CD = AM \cdot BD. \quad (1)$$

Έχουμε από την αρχική κατασκευή ότι $\angle ABD = \angle MBC$. Επίσης, $\angle BCM = \angle ADB$ (και οι δύο είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο AB). Άρα, τα τρίγωνα ABD και MBC είναι όμοια. Οπότε έχουμε:

$$\frac{AD}{CM} = \frac{BD}{BC},$$

και

$$AD \cdot BC = BD \cdot CM. \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= BD(AM + CM) = BD \cdot AC, \end{aligned}$$

δηλαδή τη σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου για να συναγάγουμε ένα πλήθος τριγωνομετρικών τύπων.

Ας θεωρήσουμε διάμετρο AB ενός κύκλου και ας επιλέξουμε δύο σημεία C και D πάνω στο ένα από τα οριζόμενα ημικύκλια (Σχήμα 4). Έστω $\angle AOC = 2a$ και $\angle AOD = 2\beta$. Τότε, $AC = 2R\eta\mu a$, $AD = 2R\eta\mu b$, $BC = 2R\sigma\nu a$, $BD = 2R\sigma\nu b$ και $CD = 2R\eta\mu(a - \beta)$.

Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου και αν λάβουμε υπόψη ότι $AB = 2R$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 2R \cdot 2R\eta\mu(a - \beta) + 2R\sigma\nu a \cdot 2R\eta\mu b \\ = 2R\eta\mu a \cdot 2R\sigma\nu b, \end{aligned}$$

ή

$$\eta\mu(a - \beta) = \eta\mu\sigma\nu b - \sigma\nu\eta\mu b.$$

Καλούμε τους αναγνώστες να αποδείξουν τον ανάλογο τύπο για το $\eta\mu(a + \beta)$. (Υπόδειξη: εγγράψτε το τετράπλευρο σε έναν κύκλο έτσι ώστε η διαγώνιος του να είναι διάμετρος.)

Έχουμε επομένως αποδείξει δύο σημαντικούς τριγωνομετρικούς τύπους:

$$\begin{aligned} \eta\mu(a - \beta) &= \eta\mu\sigma\nu b - \sigma\nu\eta\mu b, \\ \eta\mu(a + \beta) &= \eta\mu\sigma\nu b + \sigma\nu\eta\mu b. \end{aligned}$$

Αν τους προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ο τύπος

$$\eta\mu(a - \beta) + \eta\mu(a + \beta) = 2\eta\mu\sigma\nu b,$$

ή

$$\eta\mu\sigma\nu b =$$

$$\frac{1}{2} [\eta\mu(a - \beta) + \eta\mu(a + \beta)]. \quad (3)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τους τύπους για το συνημίτονο του αθροίσματος (και της διαφοράς) δύο γωνιών (προσπαθήστε να τους βρείτε μόνοι σας), καταλήγουμε σε δύο επιπλέον τύπους:

$$\text{συνασυν}\beta =$$

$$\frac{1}{2} [\text{συν}(a - \beta) + \text{συν}(a + \beta)], \quad (4)$$

$$\text{ημαημ}\beta =$$

$$\frac{1}{2} [\text{συν}(a - \beta) - \text{συν}(a + \beta)]. \quad (5)$$

Οι τύποι (3), (4) και (5) καλούνται τύποι μετατροπής γινομένων σε αθροίσματα. Βάσει αυτών μπορούμε να αποδείξουμε, με αλλαγή μεταβλητών, αντίστοιχους τύπους μετατροπής αθροισμάτων σε γινόμενα.

Θέτουμε $a = (x + y)/2$ και $\beta = (x - y)/2$, και αντικαθιστούμε στον τύπο 3. Παίρνουμε:

$$2\eta\mu \frac{x+y}{2} \text{συν} \frac{x-y}{2} = \\ \eta\mu x + \text{συν}y.$$

Παρομοίως, μπορούμε να βρούμε τύπους που εκφράζουν τα $\eta\mu x - \eta\mu y$, $\text{συν}x + \text{συν}y$ και $\text{συν}x - \text{συν}y$ ως γινόμενα. Αυτοί οι τύποι είναι πολύ χρήσιμοι στην απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε, χωρίς τη βοήθεια πινάκων ή αριθμομηχανής, την τιμή της παράστασης

$$\frac{1}{2\eta\mu 10^\circ} - 2\eta\mu 70^\circ.$$

Λύση. Η δεδομένη παράσταση είναι ίση με

$$\frac{1 - 4\eta\mu 70^\circ \eta\mu 10^\circ}{2\eta\mu 10^\circ} = \\ \frac{1 - 2(\text{συν}60^\circ - \text{συν}80^\circ)}{2\eta\mu 10^\circ} = \\ \frac{2\text{συν}80^\circ}{2\eta\mu 10^\circ} = 1.$$

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε, χωρίς τη βοήθεια πινάκων ή αριθμομηχανής, την τιμή της παράστασης $16\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ \eta\mu 60^\circ \eta\mu 80^\circ$.

Λύση. Αν χρησιμοποιήσουμε τις πασίγνωστες τιμές του $\eta\mu 60^\circ$ και $\text{συν}60^\circ$, βρίσκουμε ότι η δεδομένη παράσταση ισούται με

$$16\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu 80^\circ$$

$$= 4\sqrt{3}(\text{συν}20^\circ - \text{συν}60^\circ) \eta\mu 80^\circ$$

$$= 4\sqrt{3} \left(\text{συν}20^\circ \eta\mu 80^\circ - \frac{1}{2} \eta\mu 80^\circ \right)$$

$$= 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} (\eta\mu 100^\circ + \eta\mu 60^\circ) - \frac{1}{2} \eta\mu 80^\circ \right)$$

$$= 2\sqrt{3} \left(\eta\mu 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu 80^\circ \right) = 3.$$

Παράδειγμα 3. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$4\eta\mu 2x \eta\mu 5x \eta\mu 7x = \eta\mu 4x.$$

Λύση. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$4\eta\mu 2x \eta\mu 5x \eta\mu 7x - 2\eta\mu 2x \text{συν}2x = 0, \\ \text{δηλαδή}$$

$$2\eta\mu 2x(2\eta\mu 5x \eta\mu 7x - \text{συν}2x) = 0.$$

Όμως,

$$2\eta\mu 5x \eta\mu 7x = \text{συν}2x - \text{συν}12x,$$

οπότε τελικά $\eta\mu 2x = 0$, δηλαδή

$$x = \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ή $\text{συν}12x = 0$, δηλαδή

$$x = \frac{\pi}{24} (2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ιδού μερικές ασκήσεις ακόμη για ασκηση.

1. Υπολογίστε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε πίνακες ή αριθμομηχανής, την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$(a) \frac{1}{2\text{συν}20^\circ} - 2\eta\mu 50^\circ,$$

$$(b) \text{συν}10^\circ \eta\mu 20^\circ \text{συν}50^\circ,$$

$$(c) \text{εφ}20^\circ \text{εφ}40^\circ \text{εφ}60^\circ \text{εφ}80^\circ.$$

2. Να επιλυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$(a) 2\text{συν}2x \eta\mu x + \eta\mu 2x \text{συν}x = \eta\mu 4x \text{συν}x,$$

$$(b) \eta\mu 2x \eta\mu x + \text{συν}^2x = \eta\mu 5x \eta\mu 4x + \text{συν}^24x,$$

$$(c) 4\eta\mu x \eta\mu 2x \eta\mu 3x = \eta\mu 4x.$$

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 52

και υποθέτουμε ότι έχει αποδειχτεί η ανισότητα $y_1 + \dots + y_n \geq n$. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \cdot z_{n+1} \geq n. \quad (**)$$

Επομένως με ότι μέχρι στιγμής το μόνο που έχουμε κάνει είναι να δώσουμε μια σειρά αναδιατυπώσεων του προβλήματος. Πού είναι όμως η απόδειξη; Ιδού:

Αναδιατάσσουμε, αν είναι απαραίτητο, τους αριθμούς z_1, \dots, z_{n+1} έτσι ώστε $z_n > 1$ και $z_{n+1} < 1$. Αυτό προφανώς είναι δυνατόν όταν δεν ισχύνται όλα τα z_i με τη μονάδα. Προσθέτουμε τώρα το 1 και στα δύο μέλη της ανισότητας (**) και αυξάνουμε το αριστερό μέλος αντικαθιστώντας το $z_n \cdot z_{n+1} + 1$ με το αθροισμα $z_n + z_{n+1}$. Για να δικαιολογήσουμε αυτή την αντικατάσταση, πρέπει να αποδείξουμε ότι $z_n + z_{n+1} \geq z_n \cdot z_{n+1} + 1$, ή ότι $z_n + z_{n+1} - z_n \cdot z_{n+1} - 1 \geq 0$. Παραγοντοποιούμε το αριστερό μέλος της ανισότητας και έχουμε:

$$z_n(1 - z_{n+1}) - (1 - z_{n+1}) \\ = (z_n - 1)(1 - z_{n+1}) \geq 0.$$

Αυτή η ανισότητα είναι σίγουρα αληθής, αφού $z_n > 1$ και $z_{n+1} < 1$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Εανακοιτάξτε μία ακόμη φορά την απόδειξή μας. Το μοναδικό μη τετριμένο βήμα σε αυτήν ήταν η επιλογή των αριθμών z_n και z_{n+1} . Όλα τα άλλα συνιστούσαν χρήση τελειας επαγωγής και μια αλυσίδα αναδιατύπώσεων. ◻



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

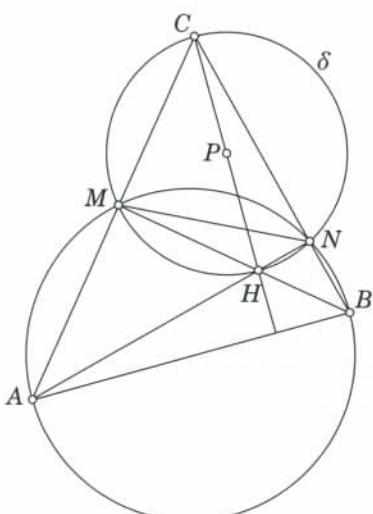
M206

Έστω a ο πρώτος όρος της προόδου και d η διαφορά της. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d > 0$. Τότε, όλοι οι όροι της μορφής $a + 10^n d$, όπου το n είναι αρκετά μεγάλος αριθμός (τέτοιος ώστε $10^n > a$), έχουν το ίδιο άθροισμα ψηφίων, ίσο με το άθροισμα των ψηφίων των αριθμών a και d .

Με παρόμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η πρόταση δεν αληθεύει μόνο στην περίπτωση της δεκαδικής αναπαράστασης, αλλά και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε άλλη βάση για την αναπαράσταση των αριθμών της ακολουθίας.

M207

Τα σημεία M και N είναι τα ίχνη των υψών του τριγώνου ABC που φέρουμε από τις κορυφές B και A , αντίστοιχα. Επομένως, το τρίτο ύψος του τριγώνου διέρχεται από το σημείο τομής τους, H . Επιπλέον, τα σημεία C , M , N και H ανήκουν στον ίδιο κύκλο δ με διάμετρο CH , διότι $\angle CMH = \angle CNH = 90^\circ$. Έστω P το κέντρο αυτού του κύκλου. Παρατη-



Σχήμα 1

ρούμε ότι, καθώς η διάμετρος AB περιστρέφεται, το μέτρο της γωνίας C παραμένει σταθερό. Πράγματι, είναι ίσο με το ήμισυ της διαφοράς των τόξων MN και AB , τα οποία έχουν σταθερό μέτρο (Σχήμα 1). Αφού η χορδή MN δεν αλλάζει, ο κύκλος δ (πάνω στον οποίο κινείται το σημείο C και το αντιδιαμετρικό του σημείο H) και το κέντρο του P παραμένουν τα ίδια. Η διάμετρος CH , η οποία είναι τμήμα του εν λόγω ύψους, περιστρέφεται απλώς γύρω από το σημείο P .

M208

Πρώτα θεωρούμε την ακραία περίπτωση που οι δεδομένοι αριθμοί παίρνουν μόνο δύο διαφορετικές τιμές: k από αυτούς είναι ίσοι με $a < 0$ και οι υπόλοιποι $(n - k)$ είναι ίσοι με $b > 0$. Τότε, $ka + (n - k)b = 0$. Άρα, $ka = -(n - k)b$ και $ka^2 + (n - k)b^2 = -(n - k)ab - kab = 1$, από όπου βρίσκουμε $ab = -1/n$. Αν λάβουμε $x_i = a$, $x_j = b$, ικανοποιούμε τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Θα προσπαθήσουμε να αναγάγουμε τη γενική περίπτωση στην προηγούμενη, «απομακρύνοντας τις μεταβλητές». Παρατηρούμε ότι, αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος των αριθμών u, v ($u < v$) με τους $u - t, v + t$ ($t > 0$), το άθροισμά τους δεν μεταβάλλεται ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους αυξάνεται:

$$(u - t)^2 + (v + t)^2 = u^2 + v^2 + 2t(v - u) + t^2.$$

Έστω $a < 0$ ο ελάχιστος και $b > 0$ ο μέγιστος από τους δοθέντες αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n . Αν αυτό το σύνολο περιέχει δύο αριθμούς διαφορετικούς από τους a και b , τους απομακρύνουμε χωρίς να αλλάξουμε το άθροισμά τους, κάνοντας τον έναν από αυτούς ίσο με έναν από τους ακραίους αριθμούς a ή b . Αν το σκεφτείτε λίγο, θα διαπιστώσετε ότι έπειτα από αρκετές τέτοιες πράξεις προκύπτει έ-

να σύνολο n αριθμών οι οποίοι (εκτός από έναν που θα τον ονομάσουμε c) είναι όλοι ίσοι με a ή b .

Έχουμε λοιπόν αντικαταστήσει το αρχικό σύνολο αριθμών $\{x_i\}$ με ένα νέο σύνολο αριθμών οι οποίοι, με μία εξαίρεση, είναι ίσοι με a ή b . Ας υποθέσουμε ότι k απ' αυτούς τους νέους αριθμούς είναι ίσοι με a , και $m = n - k - 1$ είναι ίσοι με b . Το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν και το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται τουλάχιστον με 1:

$$\begin{aligned} ka + c + mb &= 0, \\ ka^2 + c^2 + mb^2 &= -(c + mb)a + c^2 - (ka + c)b \geq 1. \end{aligned}$$

Αφού $a \leq c < b$, έχουμε $ca - c^2 + cb - ab = (c - a)(c - b) > 0$.

Αν προσθέσουμε την τελευταία ανισότητα στην προηγούμενη, καταλήγουμε στην επιθυμητή ανισότητα

$$\begin{aligned} -(m + k + 1)ab &= -nab > 1, \\ \text{η} \\ ab &< -1/n. \end{aligned}$$

Επομένως, οι a και b ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Από αυτή την απόδειξη συμπεραίνουμε επίσης ότι η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο στην αρχική ακραία περίπτωση.

Υπάρχει επίσης και μια άμεση, αν και κάπως τεχνητή, αλγεβρική λύση του προβλήματος.

Για κάθε i ($1 \leq i \leq n$), έχουμε

$$(x_i - a)(x_i - b) \leq 0.$$

Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις ανισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - (a + b)\sum_{i=1}^n x_i + nab \leq 0. \quad (1)$$

Όμως,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \text{ και } \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

και άρα η ανισότητα (1) γίνεται:

$$nab \leq -1.$$

M209

Αυτό το πρόβλημα έχει πολλές διαφορετικές λύσεις οι οποίες βασίζονται στις επόμενες απλές ανισότητες μεταξύ δύο θετικών αριθμών:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2xy, \\ \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}. \end{aligned}$$

Παρουσιάζουμε τέσσερις από τις λύσεις. Κάθε αναγνώστης μπορεί να διαλέξει αυτή που θεωρεί περισσότερο ελκυστική.

1. Η συνθήκη $ab > a + b$ μπορεί να γραφεί ως

$$(a-1)(b-1) > 1.$$

Οι παραστάσεις και στις δύο παρενθέσεις πρέπει να είναι θετικές (πράγματι, αν $0 < a < 1$ και $0 < b < 1$, τότε $(a-1)(b-1) < 1$). Άρα, από την ανισότητα για τον γεωμετρικό και τον αριθμητικό μέσο των αριθμών $a-1$ και $b-1$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a-1+b-1 \\ \geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)} > 2, \end{aligned}$$

από όπου έχουμε $a+b > 4$.

2. Η δεδομένη συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι ο αρμονικός μέσος των a και b είναι μεγαλύτερος του 2:

$$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b} > 2.$$

Όμως, ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αρμονικού μέσου:

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b},$$

αφού $(a-b)^2 \geq 0$. Επομένως,

$$a+b > 4.$$

3. Αν διαιρέσουμε τη δεδομένη συνθήκη διά a και b , αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$a > \frac{a}{b} + 1, \quad b > \frac{b}{a} + 1,$$

από όπου έχουμε:

$$a+b > \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4.$$

4. Μπορούμε να προσθέσουμε μία ακόμη ανισότητα αριστερά της δεδομένης:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab > a+b.$$

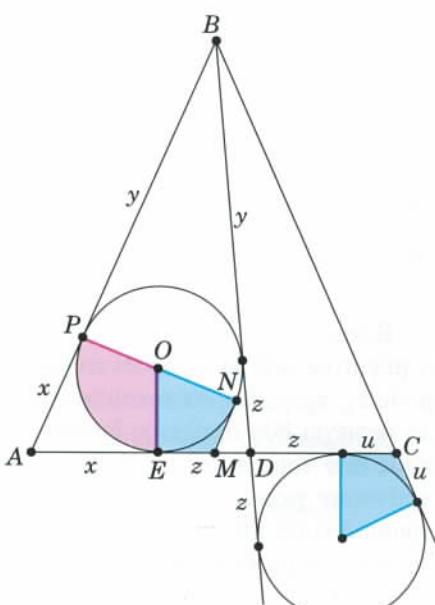
Τότε, αν $S = a+b$, έχουμε $S^2/4 > S$. Συνεπώς, $S^2 > 4S$, οπότε (αφού $S > 0$) $S > 4$.

M210

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι δύο εφαπτόμενες που φέρουμε σε έναν κύκλο από το ίδιο σημείο είναι ίσες, και συμβολίζουμε τα διάφορα ευθύγραμμα τμήματα όπως στο Σχήμα 2. (Χρησιμοποιούμε επίσης το γεγονός ότι οι εφαπτόμενες που φέρουμε από το σημείο D προς τους δύο ίσους κύκλους σχηματίζουν ίσες γωνίες και, επομένως, όλες αυτές οι εφαπτόμενες είναι ίσες.) Αν θεωρήσουμε την ισότητα των εφαπτομένων που φέρουμε από το σημείο B προς τον πιο απομακρυσμένο κύκλο και λάβουμε υπόψη ότι $BC = AB = x + y$, καταλήγουμε στην

$$y + 2z = y + x + u,$$

από όπου βρίσκουμε



Σχήμα 2

$$x + u = 2z. \quad (1)$$

Μπορούμε πλέον να ολοκληρώσουμε τη λύση κάνοντας απλές πράξεις και χρησιμοποιώντας τους τύπους που εκφράζουν το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει της ημιπεριμέτρου τ και της ακτίνας ρ του γεγεγραμμένου κύκλου: $E = \rho\tau$, και συναρτήσει της ημιπεριμέτρου και της ακτίνας ρ_a του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφαπτεται στην πλευρά a , είναι $E = \rho_a(\tau - a)$. Αν h είναι το ύψος που φέρουμε προς ένα από τα σκέλη του τριγώνου ABC και r είναι η ακτίνα των ίσων κύκλων, τότε το εμβαδόν S_{ABC} είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} h \cdot \frac{x+y}{2} &= S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} \\ &= r(x+y+z) \\ &\quad + r\left(y+z+\frac{x+u}{2}-z-u\right) \\ &= r\left(x+y+\frac{x+u}{2}+y+\frac{x+u}{2}-u\right) \\ &= r(2x+2y). \end{aligned}$$

Έπειτα ότι $r = h/4$.

Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται και γεωμετρικά, με τη βοήθεια της εξίσωσης (1). Μπορούμε να στριφγυρίσουμε το μπλε τετράπλευρο με κορυφή C (Σχήμα 2) και να το τοποθετήσουμε με τέτοιον τρόπο ώστε να συμπέσει το C με το E , και επίσης να συμπέσουν οι πλευρές που σχηματίζονται από τις ακτίνες των δύο κύκλων. Τότε, $EM = u$ και $AM = x+u$. Όμως, $MC = (z-u)+z+u = 2z = x+u$ και, επομένως, το M είναι μέσο της AC . Λόγω κατασκευής, η $\angle EMN$ είναι παραπληρωματική της $\angle BAC$ και, άρα, η MN είναι παράλληλη της AB . Αφού η MN είναι κάθετη στην ακτίνα ON (πάλι λόγω κατασκευής), εφαπτεται στον κύκλο, και εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα σημεία N , O και P είναι συγγραμμικά. Γνωρίζουμε ότι μια ευθεία όπως η MN , που διέρχεται από το μέσο της πλευράς ενός τριγώνου ABC και είναι παράλληλη προς την πλευρά του AB , θα διχοτομεί οποιαδήποτε ευθεία φέρουμε από το C προς την AB . Επομένως, διχοτομεί το ύψος που φέρουμε από την C προς την AB , και

το PN ισούται με το ήμισυ αυτού του ύψους. Έπειτα, όπως και προηγουμένως, δτι $r = h/4$.

Φυσική

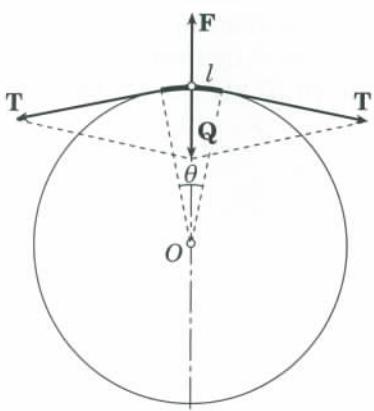
Φ206

Ας θεωρήσουμε ένα από τα νήματα του πλέγματος και ας επιλέξουμε ένα μικρό τμήμα του με μήκος l (Σχήμα 3). Έστω ότι συμβολίζουμε την τάση του ελαστικού νήματος με T . Τότε, η συνισταμένη δύναμη \mathbf{Q} η οποία ασκείται στο τμήμα που εξετάζουμε έχει μέτρο $2T\mu(\theta/2)$. Αν ισχύει $l \ll R$, όπου με R παριστάνουμε την ακτίνα καμπυλότητας του επλεγέντος τμήματος, τότε μπορούμε να γράψουμε $\theta = l/R \ll 1$, οπότε οι εκφράσεις μας λαμβάνουν την απλουστευμένη μορφή

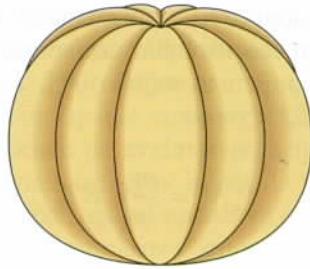
$$\mu\mu(\theta/2) = \theta/2 \text{ και } Q = (l/R)T.$$

Εφόσον το τμήμα μας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, το άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω του θα ισούται με μηδέν. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η μπάλα θα ασκεί στο νήμα μια δύναμη $\mathbf{F} = -\mathbf{Q}$. Άρα, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, το νήμα πρέπει να ασκεί στην μπάλα μια δύναμη ίσου μέτρου που κατευθύνεται προς το κέντρο της.

Προφανώς, κάθε κύκλος της μπάλας παραλληλος προς τον «ισημερινό» της τέμνεται από το ίδιο πλήθος N νημάτων («μεσημβρινών»). Η περιφέρεια ενός τέτοιου κύκλου ακτίνας $r = R\sin\varphi$ (όπου φ είναι η γωνία την οποία σχηματίζει η ακτίνα



Σχήμα 3



Σχήμα 4

της μπάλας με το ισημερινό επίπεδο που άγεται προς κάποιο σημείο του κύκλου) έχει μήκος $2\pi r = 2\pi R\sin\varphi$. Συνεπώς, ένα μικρό τμήμα του σφαιρικού περιβλήματος εμβαδού $l \times l$ καλύπτεται από

$$n = \frac{N}{2\pi R\sin\varphi} l$$

το πλήθος νήματα. Έτσι, η πίεση που αναπτύσσει το ελαστικό πλέγμα και η οποία εφαρμόζεται στο ελαστικό περιβλήμα δίνεται από την έκφραση:

$$P = n \frac{Q}{l^2} = \frac{NT}{2\pi R^2 \sin\varphi}.$$

Αν το περιβλήμα της μπάλας διατηρούσε το σφαιρικό σχήμα του, η πίεση θα μεγάλωνε όσο θα αυξανόταν η γωνία φ . Ωστόσο, σύμφωνα με το νόμο του Pascal, η πίεση λαμβάνει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο στο εσωτερικό της μπάλας. Επομένως, το περιβλήμα αποκλείεται να είναι σφαιρικό: Η ισημερινή του διάμετρος πρέπει να υπερβαίνει την πολική (κατακόρυφη) διάμετρό του. Η ακτίνα καμπυλότητας των μεσημβρινών μειώνεται προς τον ισημερινό και αυξάνεται προς τους πόλους κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιείται η σχέση $R^2 \sin\varphi = \text{σταθερά}$. Ως εκ τούτου, η μπάλα παίρνει ένα σχήμα όμοιο με της κολοκύθας (Σχήμα 4). Είναι άραγε πιθανόν η μορφή μιας πραγματικής κολοκύθας να καθορίζεται από ένα παρεμφερές φαινόμενο —δομικές «χορδές στήριξης» εκτεινόμενες κατά μήκος των μεσημβρινών;

Φ207

Λόγω της επιδρασης των μηχανικών (ηχητικών) ταλαντώσεων, το ρεύμα του νερού που εξέρχεται από τον τριχοειδή σωλήνα θα είναι ελα-

φρώς «πλισαρισμένο». Ούτως ή άλλως, η φλέβα θα παρουσίαζε μια παρόμοια, μολονότι λιγότερο έντονη, παραμόρφωση ακόμη και αν έλειπε ο πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος, δεδομένου ότι η επιφάνειά της θα διαταρασσόταν από το χείλος του τριχοειδούς σωλήνα. Φυσικά, η επίδραση του χείλους καθίσταται εντονότερη όταν αυτό ταλαντώνεται λόγω του δονούμενου πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου. Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι η φλέβα διαταράσσεται νωρίτερα απ' ότι στην περίπτωση όπου θα έλειπε το πιεζοηλεκτρικό στοιχείο. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, το πλάτος της κυματοειδούς παραμόρφωσης της παράπλευρης επιφάνειας της φλέβας πρέπει να θεωρείται μικρό σε σχέση με την ακτίνα του, και έτσι θα υποθέσουμε πως η φλέβα έχει σχήμα κατά προσέγγιση κυλινδρικό και η ακτίνα της διατομής της ισούται με την εσωτερική ακτίνα του τριχοειδούς σωλήνα.

Φαίνεται φυσικό να υποθέσουμε ότι ο όγκος κάθε σταγόνας καθορίζεται από την ποσότητα του νερού που εκρέει από τον τριχοειδή σωλήνα στη διάρκεια μίας περιόδου της ηχητικής ταλάντωσης:

$$\frac{\pi d^2}{4} vT = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $T = 1/v$, καταλήγουμε στην έκφραση

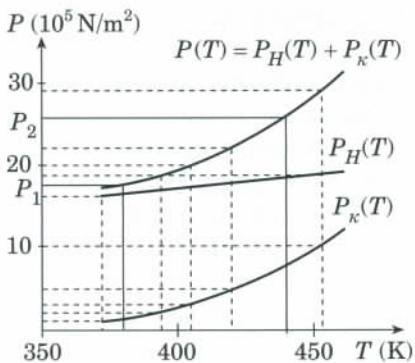
$$R^3 = \frac{3}{16} \frac{vd^2}{v} = \frac{3}{16} d^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{16} \frac{vd^2}{v}} = 0,25 \text{ mm.}$$

Φ208

Η γραφική λύση αποτελεί τον συντομότερο δρόμο για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος. Η ολική πίεση $P(T)$ στο εσωτερικό του κυλίνδρου ισούται με το άθροισμα της πίεσης του κορεσμένου ατμού $P_\kappa(T)$ και της πίεσης του υδρογόνου $P_H(T)$. Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων,



Σχήμα 5

$$\begin{aligned} P_H(T) &= \frac{m_H}{\mu_H V} RT \\ &= \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ kg})(8,31 \text{ J/K} \cdot \text{mol})}{(2 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol})(2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)} T \\ &= (4,15 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \text{K})T. \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε την $P_H(T)$ σε δύο θερμοκρασίες. Για παράδειγμα, $P_H \approx 15,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ για $T = 373 \text{ K}$ και $P_H \approx 18,8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ για $T = 453 \text{ K}$. Στη συνέχεια χαράζουμε το γράφημα της $P_H(T)$ συναρτήσει της T όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα σχετικά με την πίεση της τάσης των κορεσμένων ατμών του νερού, παριστούμε γραφικά τη συνάρτηση $P_k(T)$. Προσθέτοντας τις συναρτήσεις $P_H(T)$ και $P_k(T)$, παίρνουμε την εξάρτηση $P(T)$ της ολικής πίεσης μέσα στον κύλινδρο από τη θερμοκρασία. Με τη βοήθεια του τελευταίου γραφήματος, προσδιορίζουμε αμέσως την αρχική και την τελική θερμοκρασία της διαδικασίας: η τιμή $P_1 = 17 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ δίνει $T_1 \approx 380 \text{ K}$, ενώ η $P_2 = 26 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ αντιστοιχεί στην $T_2 \approx 440 \text{ K}$.

Ας βρούμε τώρα τη μάζα του νερού που εξαερώνεται. Υποθέτοντας τον ατμό ιδανικό αέριο, από τις καμπύλες του Σχήματος 5 βρίσκουμε τις τιμές της αρχικής και τις τελικής πίεσης του, που τις συμβολίζουμε αντίστοιχα με P_{k1} και P_{k2} . Για $T_1 \approx 380 \text{ K}$, η πίεση του υδρογόνου ισούται με $P_{H1} \approx 15,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, οπότε:

$$P_{k1} = P_1 - P_{H1} \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Ομοίως, για $T_2 = 440 \text{ K}$, $P_{H2} \approx 18 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, οπότε:

$$P_{k2} = P_2 - P_{H2} \approx 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων για τους υδρατμούς στα σημεία (P_{k1}, T_1) και (P_{k2}, T_2) , έχουμε

$$P_{k1}V = \frac{m_{a1}}{\mu_a} RT_1$$

και

$$P_{k2}V = \frac{m_{a2}}{\mu_a} RT_2,$$

όπου με m_{a1} και m_{a2} συμβολίζουμε αντίστοιχα την αρχική και την τελική μάζα ατμού μέσα στον κύλινδρο. Από αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε τη μάζα του νερού που εξαερώθηκε:

$$\begin{aligned} \Delta m_a &= m_{a2} - m_{a1} \\ &= \frac{\mu_a V}{R} \left(\frac{P_{k2}}{T_2} - \frac{P_{k1}}{T_1} \right) \\ &= \frac{(18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol})(2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)}{8,31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}} \\ &\quad \times \left(\frac{8}{440} - \frac{1,5}{380} \right) \times 10^5 \frac{\text{N/m}^2}{\text{K}} \\ &\approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Φ209

Εφόσον τα πηνία συνδέονται παράλληλα, οι τάσεις στα άκρα τους είναι ίσες: $V_{L_1} = V_{L_2}$. Ωστόσο, οι συγκεκριμένες τάσεις δίνονται αντίστοιχα από τις εκφράσεις

$$V_{L_1} = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \text{και} \quad V_{L_2} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Κατά συνέπεια, ισχύει

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}. \quad (1)$$

Αρχικά, όμως, κανένα από τα δύο πηνία δεν διαρρέοταν από ρεύμα, και έτσι βάσει της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι σε κάθε χρονική στιγμή ικανοποιείται η ισότητα

$$L_1 I_1 = L_2 I_2. \quad (2)$$

Η τελευταία σχέση μάς λέει ότι και τα δύο ρεύματα λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους ταυτόχρονα.

Προφανώς, τα I_1 και I_2 γίνονται μέγιστα όταν ο πυκνωτής μείνει ε-

ντελώς αφόρτιστος. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας επιβάλλει να ικανοποιείται εκείνη τη στιγμή η εξίσωση:

$$\frac{CV^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}. \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) ως προς I_1 και I_2 , καταλήγουμε στις εκφράσεις:

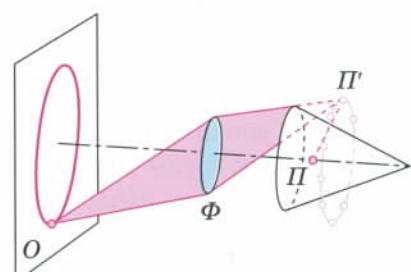
$$I_1 = V \sqrt{\frac{L_2 C}{L_1(L_1 + L_2)}} \quad (4)$$

και

$$I_2 = V \sqrt{\frac{L_1 C}{L_2(L_1 + L_2)}}. \quad (5)$$

Φ210

Οι ακτίνες που υφίστανται μία μόνο ανάκλαση στην εσωτερική επιφάνεια του κώνου ακολουθούν τις ίδιες τροχιές όπως αν είχαν εκπεμφθεί από ένα συνεχές φανταστικόν σημειακών πηγών οι οποίες κείνται πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Καθεμία από τις εν λόγω φανταστικές πηγές είναι συμμετρική της σημειακής πηγής Π ως προς την αντίστοιχη γενέτειρα του κώνου. Το είδωλο του της κυκλικής πηγής που σχηματίζεται πάνω στην οθόνη έχει προφανώς μορφή δακτυλίου (Σχήμα 6). Η καίρια παρατήρηση, ωστόσο, έγκειται στο ότι η δέσμη των ακτίνων που κατευθύνονται από κάθε σημείο της πηγής προς το φακό είναι επίπεδη: Δεν διέρχεται από όλη την επιφάνεια του φακού αλλά αποκλειστικά και μόνο από μια συγκεκριμένη διάμετρό του (για παράδειγμα, οι τροχιές όλων των ακτίνων που εκπέμπονται από την πηγή Π' κείνται στο κατακόρυ-

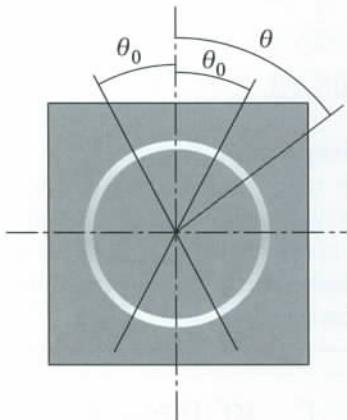


Σχήμα 6

φο επίπεδο). Άρα, η εξασθένηση που υφίσταται μια τέτοια δέσμη ακτίνων εξαρτάται από το σχήμα και τον προσανατολισμό του διαφράγματος.

Προφανώς, το συμμετρικό διάφραγμα που φαίνεται στο Σχήμα 4α (σελ. 51) θα προκαλέσει την ίδια εξασθένηση στις δέσμες που εκπέμπονται από όλες τις φανταστικές πηγές. Στην προκειμένη περίπτωση, λοιπόν, η φωτεινότητα του δακτυλίου πάνω στην οθόνη θα μειωθεί ομοιόμορφα.

Αντίθετα, το διάφραγμα που φαίνεται στο Σχήμα 4β (σελ. 51) επιτρέπει να περάσουν χωρίς την παραμικρή εξασθένηση όλες οι δέσμες ακτίνων που τα επίπεδά τους σχηματίζουν με το κατακόρυφο επίπεδο γωνίες $\theta < \theta_0$. Κατά συνέπεια, η φωτεινότητα του ανώτερου και του κατώτερου τμήματος του δακτυλίου που αντιστοιχούν σ' αυτές τις γωνίες θα παραμείνει αμεταβλητή. Απεναντίας, το διάφραγμα ανακόπτει εν μέρει τις ακτίνες των υπόλοιπων δεσμών, και μάλιστα όσο πιο κοντά από το οριζόντιο επίπεδο περνούν οι ακτίνες τόσο μεγαλύτερη εξασθένηση υφίστανται. Ως εκ τούτου, η φωτεινότητα των πλευρικών περιοχών του δακτυλίου τείνει να μειώνεται όσο αυξάνεται η γωνία θ από $\theta = \theta_0$ έως $\theta = \pi/2$. Το είδωλο θα έχει μια μορφή όμοια με εκείνη του Σχήματος 7. Προφανώς, το είδωλο θα παρουσιάζει συμμετρία τόσο ως προς τον κατακόρυφο όσο και ως προς τον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 7

Σπαζοκεφαλίες

Σ206

Ας υποθέσουμε ότι και οι τρεις

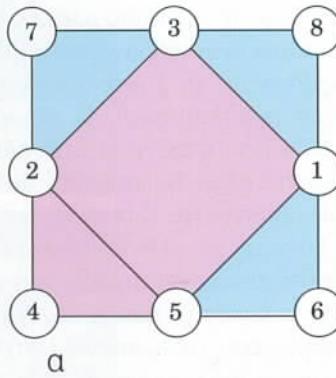
μνηστήρες απέτυχαν να λύσουν το πρόβλημα και εκδιώχθηκαν κακήν κακώς. Τους βάζουμε στη γραμμή και τους ζητάμε να επιστρέψουν τα δαμάσκηνα με αντίστροφη σειρά απ' αυτή που τα είχαν πάρει. Ο τρίτος μνηστήρας πρέπει πρώτα να επιστρέψει τα 3 «επιπλέον» δαμάσκηνα. Τότε θα υπάρχουν 3 δαμάσκηνα στο καλάθι, που θα πρέπει να είναι τα μισά από όσα απέμεναν αφότου ο δεύτερος μνηστήρας πήρε τα δικά του. Ο τρίτος, λοιπόν, μνηστήρας πήρε τα άλλα μισά (δηλαδή 3 δαμάσκηνα) και, επομένως, πρέπει να τα επιστρέψει και αυτά.

Τώρα υπάρχουν 6 δαμάσκηνα στο καλάθι, και ο δεύτερος μνηστήρας πρέπει να επιστρέψει πρώτα το 1 «επιπλέον» δαμάσκηνο. Έτσι έχουμε 7 δαμάσκηνα, που είναι τα μισά απ' όσα είχε δει στο καλάθι ο μνηστήρας αυτός όταν είχε έρθει η σειρά του. Τώρα, πρέπει να επιστρέψει τα άλλα μισά, δηλαδή 7 δαμάσκηνα.

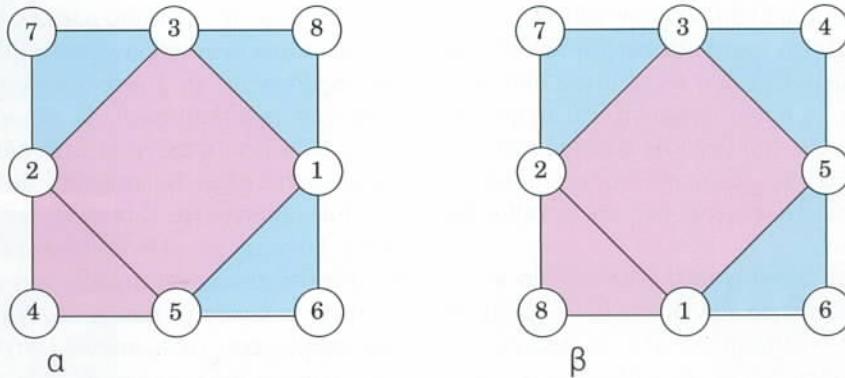
Έχουμε πλέον 14 δαμάσκηνα στο καλάθι. Ο πρώτος μνηστήρας πρέπει, όπως και οι άλλοι, να επιστρέψει πρώτα το 1 «επιπλέον» δαμάσκηνο. Τώρα έχουμε 15 δαμάσκηνα στο καλάθι. Όταν ο ίδιος επιστρέψει τα άλλα 15, θα έχουμε 30. Τόσα ακριβώς ήταν τα δαμάσκηνα στην αρχή της ιστορίας.

Σ207

Από την πρώτη συνθήκη έπειται ότι ο Άραμις πήρε την τέταρτη θέση. Από τη δεύτερη συνθήκη έπειται τώρα ότι ο Πόρθος ήταν δεύτερος, και από την τελευταία συνθήκη ότι ο ντ' Αρτανιάν ήταν πρώτος και ο Άθως τρίτος.



Σχήμα 8



Σχήμα 8

Σ208

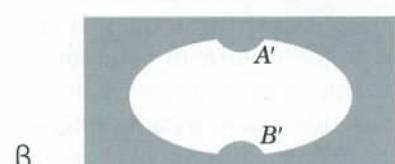
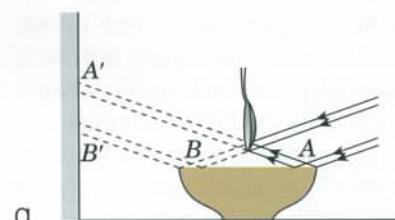
Υπάρχουν δύο λύσεις (δείτε το Σχήμα 8).

Σ209

Παρατηρούμε ότι $D \leq 3$ και επίσης ότι το D είναι άρτιο. Συνεπώς, $D = 2$. Άρα, το R ισούται είτε με 3 είτε με 8. Όμως, το R δεν μπορεί να είναι 8, διότι σε αυτή την περίπτωση το $4I$ θα έληγε στο ψηφίο 5 —γεγονός αδύνατο. Επομένως, $R = 3$. Έχουμε πλέον $I = 8$, και τελικά $B = 6$ και $O = 7$.

Σ210

Οι διαδρομές των ακτίνων παρουσιάζονται στο Σχήμα 9α. Το κουτάλι, όπως βλέπετε, εμποδίζει να φτάσουν στον τοίχο μερικές από τις ακτίνες που πέφτουν στη μία πλευρά της επιφάνειας και μερικές απ' αυτές που αντανακλώνται στην άλλη πλευρά της. Επομένως, στον φωτεινό κύκλο που προβάλλεται στον τοίχο θα εμφανίζονται ταυτόχρονα δύο

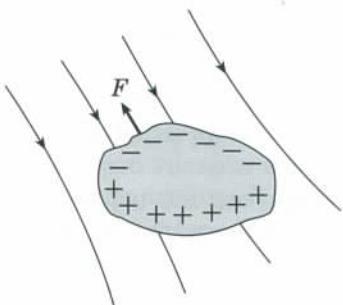


Σχήμα 9

σκιερές μύτες —μία στην πάνω πλευρά του και μία στην κάτω (βλ. Σχήμα 9β). Όσο το κουτάλι θα πλησιάζει στην επιφάνεια, οι δύο μύτες θα μεγαλώνουν, οπότε τελικά θα ενωθούν.

Καθειδόσκοπο

1. Εφόσον το χαρτί ανήκει στα διηλεκτρικά υλικά, στην επιφάνεια του θα εμφανιστούν φορτία εκ πολώσεως. Το πεδίο έχει μεγαλύτερη ένταση σε κοντά στην κτένα, οπότε η έλξη προς την κτένα υπεριοχύει της άπωσης απ' αυτήν (Σχήμα 10). Αντίθετα,



Σχήμα 10

σε ένα πολωμένο διηλεκτρικό που βρίσκεται τοποθετημένο στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς ασκούνται ίσες και αντίθετες δυνάμεις.

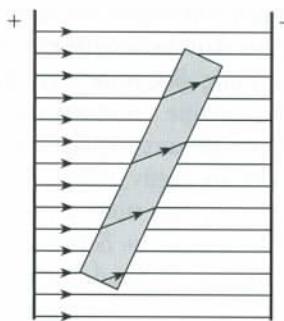
2. Σε αντίθεση με τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, τα φορτία στα διηλεκτρικά είναι δέσμια.

3. Τα πεδία στον αέρα και στο διηλεκτρικό έχουν ίση ένταση. Η εξασθένηση που υφίσταται το πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό λόγω της πόλωσης του τελευταίου αντισταθμίζεται από μια αύξηση της πυκνότητας φορτίου στο κατώτερο μέρος των οπλισμών.

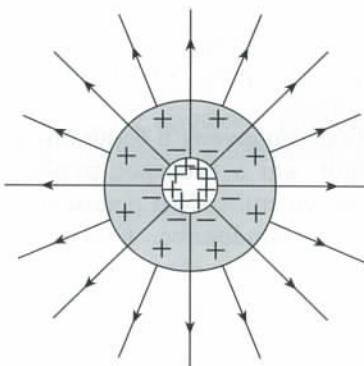
4. Η πολύ μεγάλη χωρητικότητα των ηλεκτρολυτικών πυκνωτών οφείλεται στην εξαιρετική λεπτότητα του μονωτικού στρώματος από οξείδιο το οποίο σχηματίζεται στην επιφάνεια της θετικής πλάκας και που παίζει το ρόλο του διηλεκτρικού.

5. Τα φορτία δεν θα μεταβάλλονται.

6. Τόσο η κατεύθυνση όσο και η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών θα μεταβληθούν στο εσωτερικό της ράβδου λόγω της πόλωσης του διηλεκτρικού (Σχήμα 11).



Σχήμα 11



Σχήμα 12

7. Βλ. το Σχήμα 12. Όταν διασχίζουμε το σύνορο του διηλεκτρικού, το πλήθος των δυναμικών γραμμών μεταβάλλεται απότομα λόγω της παρουσίας επιφανειακών φορτίων εκ πολώσεως.

8. Όταν οι μεταλλικές σφαίρες εμβυθιστούν στο διηλεκτρικό, η διαφορά δυναμικού και, ως εκ τούτου, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσά τους παραμένει αμετάβλητη. Τούτο επιτυγχάνεται με την αύξηση του φορτίου των σφαιρών κατά έναν παράγοντα ϵ , όπου με ϵ συμβολίζουμε τη σχετική διηλεκτρική σταθερά του υγρού. Συνεπώς, η ελεκτική δύναμη μεταξύ των σφαιρών θα αυξηθεί κατά έναν παράγοντα ϵ .

9. Το φορτίο της κάθε πλάκας θα αυξηθεί κατά έναν παράγοντα ϵ (βλ., για παράδειγμα, τη λύση του προηγούμενου προβλήματος). Η ένταση του πεδίου που παράγεται από κάθε πλάκα στον αέρα θα αυξηθεί κατά τον ίδιο παράγοντα. Συνεπώς, η ελεκτική δύναμη μεταξύ των πλακών θα αυξηθεί κατά έναν παράγοντα ϵ^2 .

10. Ο πυκνωτής που λειτουργεί υπό υψηλότερη τάση απαιτεί παχύτερο στρώμα διηλεκτρικού, κάτι το οποίο μειώνει τη χωρητικότητά του.

Έτοι, καθίσταται αναγκαία η αύξηση του εμβαδού των οπλισμών του προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισότητα των χωρητικοτήτων. Και οι δύο αυτοί λόγοι οδηγούν στην αύξηση του όγκου του πυκνωτή που λειτουργεί υπό υψηλότερη τάση.

11. $\epsilon = 2$.

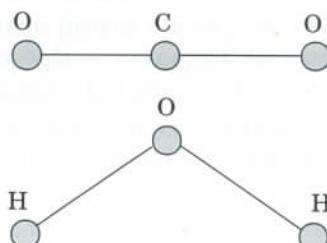
12. Η ενέργεια θα μειωθεί κατά έναν παράγοντα ϵ .

13. Οι διπολικές ροπές των διηλεκτρικών προσανατολίζονται στο ηλεκτρικό πεδίο με ορισμένη χρονική υστέρηση.

14. Τα μέταλλα ανακλούν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύτερα από τα διηλεκτρικά.

15. Βεβαίως και αλληλεπιδρούν, επειδή όταν το άτομο βρεθεί εντός του πεδίου που παράγει το ηλεκτρόνιο, ο ατομικός πυρήνας και το ηλεκτρονικό νέφος υφίστανται μια σχετική μετατόπιση. Ο μεν πυρήνας —ο οποίος έλκεται από το ηλεκτρόνιο— μετατοπίζεται στην κατεύθυνση του εξωτερικού πεδίου, το δε ηλεκτρονικό νέφος —που απωθείται— στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση. Ως εκ τούτου, το άτομο αποκτά διπολική ροπή.

16. Βλ. Σχήμα 13.



Σχήμα 13

Μικροπειραματισμοί

Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται κοντά στους πόλους μιας μπαταρίας είναι πάρα πολύ ασθενές ώστε να προκαλέσει αισθητή πόλωση στα διηλεκτρικά.

Γ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το πιο ενημερωμένο φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο, τώρα και στα ξενόγλωσσα
Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,
Τηλ.-Fax: 3628492

ΒΙΒΛΙΟΓΩΝΙΑ

Μόνο για συνδρομητές

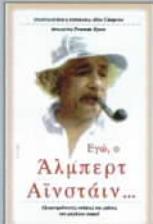
Προνόμιο
έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και τηλεφωνήστε ή ταχυδρομήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 6 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 1.200 δρ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

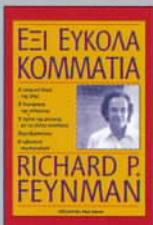
Η προσφορά δεν ισχύει:
— για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)
— για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
— αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 30 Απριλίου 2001
— αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

(Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.)

* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.



Alice Calaprice
Εγώ, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν
Αξιομημόνετες σκέψεις και ρήσεις του μεγάλου σοφού
Πανόδετο
Σελ.: 270, 6.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.600 δρχ.



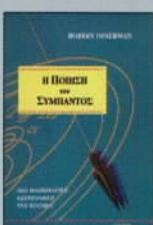
Richard P. Feynman
ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ
Τέξι εύκολα κομμάτια
Ανθολόγηση από τις διαλέξεις
Πανόδετο
Σελ.: 200, 6.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.400 δρχ.



Brian Bolt
Μαθηματικές σπαζοκεφαλιές —3
Πανόδετο
Σελ.: 176, 5.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.500 δρχ.



Kip S. Thorne
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ ΛΑΖΑΡΙΔΗ ΣΤΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (τόμ. 1 και 2)
Πανόδετα
Συν. σελ.: 640, 14.400 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 10.100 δρχ.



Robert Osserman
Η ΠΟΙΗΣΗ του Σύμπαντος
Μια μαθηματική εξερεύνηση του Κόσμου μας
Πανόδετο
Σελ.: 224, 6.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.400 δρχ.



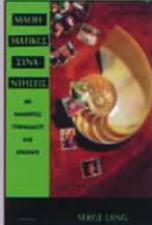
Daniel Hillis
Οι υπολογιστές στο παρόν και το μέλλον
Σελ.: 222, 6.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.200 δρχ.



Francis Crick
Μια εκπληκτική υπόθεση
Η επιστημονική αναζήτηση της ψυχής
Σελ.: 444, 7.400 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 5.200 δρχ.



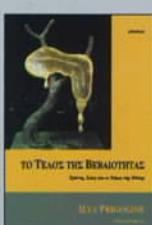
Vladimir Tikhomirov
Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα
Από τους αρχαίους γεωμέτρες στη θεωρία των βέλτιστων ελέγχου
Σελ.: 212, 7.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.900 δρχ.



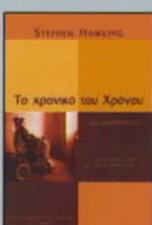
Serge Lang
Μαθηματικές συναντήσεις με μαθητές γυμνασίου και λυκείου
Σελ.: 228, 5.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.850 δρχ.



Richard P. Feynman
Το νόημα των πραγμάτων
Σκέψεις ενός πολύτη επιστήμονα
Πανόδετο
Σελ.: 142, 4.800 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.350 δρχ.



Ilya Prigogine
Το τέλος της βεβαιότητας
Χρόνος, χάος και οι νόμοι της φύσης
Σελ.: 232, 5.900 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.100 δρχ.



Stephen Hawking
Το χρονικό του Χρόνου
—Εικονογραφημένο
Από τη Μεγάλη Έκρηχη ως τις μαύρες τρύπες
Σελ.: 256, 8.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 5.600 δρχ.

Το περιοδικό «ΘΕΜΑΤΑ στην Εκπαίδευση» στοχεύει μέσα από τη διεπιστημονική προσέγγιση που νιοθετεί να ανοίξει διαύλους επικοινωνίας ανάμεσα στις επιστημονικές κοινότητες των θεματικών περιοχών τις οποίες καλύπτει με σκοπό την πολύπλευρη προσέγγιση των προβλημάτων της εκπαίδευσης. Το περιοδικό είναι τριμηνιαίο. Τα άρθρα του δημοσιεύονται στην Ελληνική ή την Αγγλική γλώσσα μετά από κρίση και αναφέρονται σε θέματα που ενδιαφέρουν τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, καθώς και τους ερευνητές των αντίστοιχων θεματικών περιοχών. Στόχος του περιοδικού είναι η κοινοποίηση στον αναγνώστη πρωτότυπων ερευνητικών εργασιών και κριτικών θεωρήσεων. Το περιοδικό δημοσιεύει επίσης βιβλιοκριτικές, ανακοινώσεις Συνεδρίων, Ημερίδων και γενικώς νέα που ενδιαφέρουν τις αντίστοιχες επιστημονικές κοινότητες.

Στις σελίδες του περιοδικού παρουσιάζονται εργασίες από τις εξής θεματικές περιοχές:

- Εκπαιδευτική Τεχνολογία
- Διδακτική Μαθηματικών
- Ιστορίας & Φιλοσοφίας της Επιστήμης και των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση
- Διδακτική των Φυσικών Επιστημών

Συντακτική ομάδα

T. A. Mikropoulos

Technology Educational

C. Skordouli

SHistory & Philosophy of Science and Mathematics in Education

E. Koleza

Mathematics Education

A. Katsikis

Science Education(Biology, Geography, Ecology)

A. Jimoyiannis

Science Education (Physics, Chemistry, Informatics)

Σύμβουλοι Έκδοσης

M. Ahtee (U. Jyvaskyla, Finland), A. Arcavi (Weizmann Inst., Israel), A. Baltas (NTUA, Athens, Greece), G. L. Baron (INRP, France), J. Bliss (U. Sussex, UK), A. Boufi (U. Athens, Greece), Th. Christides (U. Thessaly, Greece), A. Dimitrakopoulou (Aegean U., Greece), C. Dupuis (U. Strasbourg, France), J. Fauvel (Open U., UK), G. Filippou (U. Cyprus), E. Flogaiti (U. Athens, Greece), M. Fort (INFM, France), F. Furinghetti (U. Genova, Italy), A. Georgopoulos (U. Thessaloniki, Greece), M. Grigoriadou (U. Athens, Greece), V. Hatzinikita (Aegean U., Greece), J. B. Haversath (U. Giessen, Germany), F. Kalavassis (Aegean U., Greece), V. Kalfas (U. Crete, Greece), N. Klaoudatos (U. Athens, Greece), P. Kokkotas (U. Athens, Greece), V. Komis (U. Patras, Greece), V. Koulaidis (U. Patras, Greece), C. Laborde (U. Grenoble/CNRS, France), S. Lerman (U. SouthBank, UK), P. Machamer (U. Pittsburgh, USA), J. Mamona (U. Macedonia, Greece), G. Maragos (U. Ioannina, Greece), J-L Martinand (ENS Cachan, France), M. R. Matthews (U. NSW, Australia), T. McGuire (U. Pittsburgh, USA), P. Mihaelidis (U. Crete, Greece), M. Niss (U. Roskilde, Denmark), E. Ntziachristos (U. Athens, Greece), K. Ouzounis (U. Thrace, Greece), V. Pantelidis (East Carolina U., USA), E. Papademetriou (U. Ioannina, Greece), V. Papademetriou (U. Thessaly, Greece), E. Pehkonen (U. Turku, Finland), P. Pintelas (U. Patras, Greece), A. Plotnitsky (U. Purdue, USA), J. Porfirio (U. Setubal, Portugal), D. Potari (U. Patras, Greece), A. Raptis (U. Athens, Greece), K. Ravanis (U. Patras, Greece), I. Robottom (Deakin U., Australia), S. Rowlands (U. Plymouth, UK), Ch. Sakonidis (U. Thrace, Greece), H. Schrettenbrunner (U. Nuremberg, Germany), J. Searle (U. Edinburgh, UK), I. Selwood (U. Birmingham, UK), M. K. Siu (U. Hong-Kong), J. Solomon (Open U., UK), Ch. Solomonidou (U. Thessaly, Greece), H. Stavridou (U. Thessaly, Greece), J. Thomas (Open U., UK), S. Tsinorema (U. Crete, Greece), C. Tzanakis (U. Crete, Greece), M. Vicentini (U. La Sapienza, Italy), J. Waterworth (UMEA U., Sweden), D. Whitelock (Open U., UK), W. Winn (U. Washington, USA), T. Wood (U. Purdue, USA)

Publisher: LEADER BOOKS S.A.

στην Εκπαίδευση

17 Panagi Kyriakou Str., GR-11521 Athens, Greece

Tel.: ++30-1-6452825, 6450048 Fax: ++30-1-6449924

[Http:// www.leaderbooks.com](http://www.leaderbooks.com) E-mail: journals@leaderbooks.com

