

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2000
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 2
2.000 ΔΡΧ.

Γιατί οι μεγάλοι σειρμοί είναι μάλλον σπάνιοι;

- Τα ζεχασμένα συνεχή κλάσματα
- Η παράξενη κατανομή των πληθυσμού στις χώρες της Γης
- Η τέχνη των οράν τα αόρατα
- Το τυρί του Cantor και το χαλί του Sierpinski
- Το μαθηματικό έργο των Πτολεμαίων
- Ελεύθερα άλματα σε υπόγειες σήραγγες
- Carl Friedrich Gauss
- Φυσικομαθηματικές διευθύνσεις στο Λιαδίκτυο
- Η εξίσωση Markov





Ελαιογραφία, 46 × 55 εκ., Συλλογή του Μουσείου Salvador Dalí, Σαντ Πέτερομπεργκ, Φλόριντα. © 1999 Μουσείο Salvador Dalí

H χαμένη προτομή του Βολταίρου (1941), του Salvador Dalí

ΜΕ ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΜΑΤΙΑ, Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΕΝ ΔΕΙΧνει να είναι κάτι περισσότερο από τη σουρεαλιστική απεικόνιση μιας συγκέντρωσης εκκεντρικά ντυμένων ατόμων σ' έναν εγκαταλελειμμένο χώρο. Εντούτοις, δοοι έχουν εξοικείωση με τη δουλειά του Dalí γνωρίζουν ότι δεν πρέπει να παίρνουν το θέμα των πινάκων του «τοις μετρητοίς». Μετά την προσεκτική εξέταση της παραπάνω εικόνας, από το παιχνίδι του φωτός με τη σκιά βλέπετε να αναδύεται η μορφή του Βολταίρου.

Τη δεξιότητα του ματιού να βλέπει πέρα από τα πα-

σιφανή επιζητούν να αναπτύξουν τόσο οι καλλιτέχνες όσο και οι επιστήμονες. Η ικανότητα αυτή επιτρέπει στους ζωγράφους, ας πούμε, να προσθέτουν λεπτές αποχρώσεις στον τεντωμένο καμβά τους: στους αστροφυσικούς, πάλι, να διακρίνουν λεπτομέρειες στον νυχτερινό ουράνιο θόλο. Εσείς, λοιπόν, για να μάθετε περισσότερα σχετικά με το πώς ο εγκέφαλός μας επεξεργάζεται την εικόνα του κόσμου που βλέπουμε με τα μάτια μας, γυρίστε στη σελίδα 24 και διαβάστε το άρθρο «Η τέχνη του οράν τα αόρατα».

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2000

ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

Θα γνωρίζετε, ελπίζω, ότι ο πανικός στη διάρκεια ενός σεισμού αποτελεί τον χειρότερο σύμβουλο. Και φυσικά δεν χρειάζεται να σας «φεύγει το κεφάλι» από το φόβο και την αγωνία. Το καλύτερο, νομίζω, είναι να γνωρίσετε τους σεισμούς —να ενημερωθείτε γι' αυτό το βίαιο φυσικό φαινόμενο. Ευτυχώς, οι μεγάλοι σεισμοί αποτελούν μάλλον σπάνια γεγονότα, κυρίως λόγω της «ρευστής» φύσης των εμπλεκόμενων δυνάμεων. Επομένως, γυρίστε στη σελίδα 6 και διάβαστε το άρθρο «Τυρβώδης ροή και σεισμογόνα ρήγματα», ώστε να γνωρίσετε τη βασική φυσική που διέπει τη συμπεριφορά του Εγκελαδού.

ΑΡΘΡΑ

- 6** Καταστροφικά γεγονότα
Τυρβώδης ροή και σεισμογόνα ρήγματα
G. Golitsyn
- 14** Μαθηματική εξοχότητα
Carl Friedrich Gauss
S. Gindikin
- 24** Περιφερειακή όραση
Η τέχνη του οράν τα αόρατα
V. Surdin
- 38** Η τέχνη της προσέγγισης
Συνεχή κλάσματα
Y. Nesterenko και E. Nikishin

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Εσείς τι θα προτιμούσατε;
- 13 Σπαζοκεφαλίες**
- 20 Βόλτες στο Διαδίκτυο**
Μια πρώτη γεύση
- 30 Ψηφιακή δημογραφία**
Διαμέριση της υφηλίου
- 35 Πώς λύνεται:**
- 36 Καλειδοσκόπιο**
Και λίγα για τα άτομα και τους πυρήνες τους
- 46 Στα πεδία της φυσικής**
Ελεύθερες πτώσεις σε σήραγγες
- 50 Στο μαυροπίνακα I**
Οικονομία καυσίμων στη Σελήνη
- 54 Στο μαυροπίνακα II**
Η εξίσωση Markov
- 58 Όπερ έδει δείξαι**
Το μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου
- 63 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70 Πληροφορική**
Το τυρί του Cantor

Εσείς τι θα προτιμούσατε;

«Ο κόσμος μας ετοιμοθάνατος, κι ο καιρός μας ένας μεθυσμένος, που προσπαθούμε να τον στηρίξουμε, τρεκλίζοντας κι εμείς μαζί του.»

—Κώστας Στεργιόπουλος

ΛΥΟ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΣΥΝΟΨΙΣΟΥΝ το σημερινό μέγεθος και την ανάπτυξη του ανθρώπινου πληθυσμού στη Γη. Λίγες βδομάδες πριν κλείσει η δεύτερη χιλιετία μ.Χ., το πλήθος των ανθρώπων πάνω στον πλανήτη μας έφτασε τα 6 δισεκατομμύρια. Η αύξηση του αριθμού αυτού από πέρυσι ανέρχεται περίπου σε 100 εκατομμύρια. Απομονώνοντας αυτούς τους δύο αριθμούς, θα δείξω ότι ο σημερινός ρυθμός αύξησης δεν θα μπορούσε να ισχύει επί μακρόν κατά το παρελθόν, δύος και δεν μπορεί να συνεχίσει επί μακρόν στο μέλλον. Το ανθρώπινο είδος διέρχεται μια σύντομη, μεταβατική περίοδο κορύφωσης του ρυθμού αύξησης των μελών του, περίοδο που δεν έχει προηγούμενο και, κατά πάσα πιθανότητα, θα είναι μοναδική σε όλη την ανθρώπινη ιστορία.

Η εξαγωγή ενός τόσο σημαντικού συμπεράσματος απαιτεί απλώς στοιχειώδη αριθμητική —δύο αριθμούς (πληθυσμός 6 δισεκατομμυρίων ανθρώπων και ετήσια αύξηση της τάξεως των 100 εκατομμυρίων)— και μία-δύο υποθέσεις. Η αριθμητική δεν θα σας δυσκολέψει εφόσον είστε εξοικειωμένοι με τον ανατοκισμό.

Αρχίζω από το παρελθόν. Η παρέκταση προς τα πίσω, χωρίς προσθετα δεδομένα, απαιτεί μερικές υποθέσεις σχετικά με τη μεταβολή του πληθυσμού στο μακρινό παρελθόν. Όπως συμβαίνει πάντα κατά τη δια-

τύπωση υποθέσεων, έχουμε μπροστά μας πολλές επιλογές.

Μια πιθανή υπόθεση θα μπορούσε να είναι ότι η πρόσφατη αύξηση του πληθυσμού κατά 100 εκατομμύρια ελάμβανε χώρα και σε όλα τα προηγούμενα έτη. Αν αλήθευε η υπόθεση αυτή, ο πληθυσμός πριν από δύο χρόνια θα ήταν ίσος με τον σημερινό πληθυσμό μείον 2 επί 100 εκατομμύρια, ή $(6 - 2 \times 0,100)$ δισεκατομμύρια = 5,8 δισεκατομμύρια. Έτσι, θα πρέπει ο πληθυσμός της Γης πριν από 60 χρόνια να ήταν κοντά στο μηδέν —αφού $60 \text{ έτη} \times 100 \text{ εκατ./έτος} = 6 \text{ δισεκατομμύρια}$ συνάνθρωποι. Πρόκειται για πασιφανώς παράλογο συμπέρασμα. Ο πληθυσμός της Γης εκεί γύρω στο 1940 δεν ήταν ούτε κατά διάνοια μηδενικός, και ασφαλώς εκείνη η περίοδος ουδεμία σχέση είχε με τον Κήπο της Εδέμη. (Ακόμη και αν δεχτούμε ότι ο πληθυσμός της Γης ήταν κοντά στο μηδέν το έτος 1940, δεν θα ήταν δυνατόν να αυξηθεί κατά 100 εκατομμύρια σε μία χρονιά! Σύμφωνοι, ο Αδάμ και η Εύα ήταν καρπεροί, αλλά, ακόμη και με τους πιο αισιόδοξους υπολογισμούς, όχι σε τέτοιο βαθμό.) Συμπέρασμα: Η απόλυτη αριθμητική μεταβολή από πέρυσι έως φέτος —τα 100 εκατομμύρια— είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από τις απόλυτες μεταβολές που πρέπει να έλαβαν χώρα στο μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης ιστορίας.

Μια δεύτερη υπόθεση θα μπορούσε να είναι ότι ο ίδιος σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού από πέρυσι έως φέτος ελάμβανε χώρα και σε κάθε προηγούμενη χρονιά. Εξ ορισμού, ο σχετικός ρυθμός αύξησης αυτής της χρονιάς είναι η πληθυσμιακή μεταβολή από πέρυσι ώς φέτος διά του πληθυσμού της περιστηνής χρονιάς. Συνεπώς, η αύξηση των 100 εκατομμυρίων διά του περιστού πληθυσμού των περίπου 5,9 δισεκατομμυρίων μάς δίνει ένα σχετικό ρυθμό αύξησης της τάξεως του 1,7% ετησίως. Εάν ο σχετικός ρυθμός αύξησης είχε παραμείνει σταθερός καθ' όλο το παρελθόν, τότε ο Αδάμ και η Εύα θα πρέπει να έζησαν λιγότερο από 1.300 χρόνια πριν —αφού ένας πληθυσμός με αφετηρία 2 ανθρώπους και ρυθμό αύξησης 1,7% ετησίως επί 1.295 χρόνια θα υπερέβαινε κατά τι τον αριθμό των 6 δισεκατομμυρίων ανθρώπων.

Ακόμη και ο αρχιεπίσκοπος James Ussher, προκαθήμενος πάσης Ιρλανδίας, ο οποίος υπολόγισε ότι ο Θεός δημιούργησε το σύμπαν το 4004 π.Χ., θα συμφωνούσε ότι η ανθρώπινη ιστορία είναι μακρύτερη από 1.295 χρόνια και, ως εκ τούτου, θα άφειλε να παραδεχτεί ότι ο σημερινός σχετικός ρυθμός αύξησης δεν θα ήταν δυνατόν να διατηρηθεί σε όλο το μήκος της. (Ο Ussher προσδιόρισε ότι η στιγμή της Δημιουργίας ήταν το μεσημέρι της 23ης Οκτωβρίου. Ο θε-

ολόγος και εβραϊστής της Οξφόρδης John Lightfoot αναθεώρησε τους υπολογισμούς του Ussher και κατέληξε ότι η Δημιουργία έλαβε χώρα στις 9 το πρωί της 26ης Οκτωβρίου, ημέρα και ώρα που μνημονεύονται σε πολλά κείμενα. Προσωπικά, θα επιθυμούσα να απέχω από τη διελκυστίνδα σχετικά με το αν η Δημιουργία έλαβε χώρα πρωί ή μεσημέρι. Πάντως, το τρίτο δεκαήμερο του Οκτωβρίου δύσκολα επιδέχεται αμφισβήτηση.) Συμπέρασμα: Η παρούσα ανάπτυξη του ανθρώπινου πληθυσμού, είτε σε απόλυτους είτε σε σχετικούς όρους, υπερβαίνει κατά πολύ τις μέσες αυξήσεις που σημειώθηκαν στο μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης ιστορίας.

Προς επίρρωσιν του ότι ο σημερινός σχετικός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού δεν θα μπορούσε να διατηρηθεί στο μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης ιστορίας, θα χρησιμοποιήσουμε ένα ακόμη «αριθμητικό παιχνίδι» πριν στραφούμε στο μέλλον. Η τελευταία περίοδος των παγετώνων τελείωσε πριν από 12.000 χρόνια περίπου (στην πραγματικότητα, διαφορετικούς χρόνους σε διαφορετικούς τόπους). Αρχαιολογικά στοιχεία επιβεβαιώνουν ότι υπήρχαν υπολογίσιμα μεγέθη ανθρώπινων πληθυσμών σε όλες τις ηπείρους εκτός από την Ανταρκτική. Αν θεωρήσουμε ότι υπήρχε ένας και μόνο άνθρωπος πριν από 12.000 χρόνια, και ότι αυτός ο πληθυσμός αυξανόταν (διά παρθενογένεσεως, κατ' αρχάς) με μέσο ρυθμό 1,7% ετησίως, τότε ο σημερινός πληθυσμός της Γης θα ήταν περίπου 7 εικοσιοκτάκις εκατομμύρια(!), ή $7,1 \times 10^{87}$, άνθρωποι. Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος κατά 10^{78} φορές του σημερινού πληθυσμού της Γης. Αν θεωρήσουμε ότι το μέσο βάρος κάθε ατόμου είναι 50 κιλά, τότε η μάζα των ανθρώπων επί της Γης θα ήταν γύρω στις 6×10^{64} φορές η μάζα της ίδιας της Γης, πράγμα που σημαίνει ότι ο πλανήτης μας θα είχε αποχωρετήσει την παρούσα τροχιά του προ μακρού.

Οφείλω να ομολογήσω ότι ουδείς γνωρίζει είτε τον ακριβή σημερινό πληθυσμό της Γης είτε τον ακριβή ρυθμό αύξησής του. Πόσο λοιπόν ε-

πηρεάζονται τα συμπεράσματα αυτά από λάθη στους δύο αριθμούς επί των οποίων βασίζονται οι υπολογισμοί μας; Τι θα άλλαζε αν ο σημερινός πληθυσμός της Γης ήταν 5 ή 7 δισεκατομμύρια; Τι θα άλλαζε αν ο σχετικός ρυθμός αύξησης ήταν 1,4% ή 2% ετησίως; (Δεν γνωρίζω επαγγελματία δημογράφο που να έχει την άποψη ότι το σημερινό μέγεθος του πληθυσμού και ο ρυθμός αύξησής του βρίσκονται εκτός των παραπάνω ορίων). Η απάντηση, σε κάθε περίπτωση, είναι η ίδια. Ακόμη και αν τα σημερινά δεδομένα δεν είναι ακριβώς σωστά, ο σημερινός απόλυτος ρυθμός αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού (σε ανθρώπους ανά έτος) και ο σημερινός σχετικός ρυθμός αύξησής του (επί τοις εκατό ανά έτος) δεν θα μπορούσαν να έχουν ισχύσει στο μεγαλύτερο μέρος της ανθρώπινης ιστορίας.

Η ανθρώπινη δημογραφική ιστορία υπήρξε διαφοροποιημένη από τα υποθετικά μοντέλα της συνεχούς απόλυτης αύξησης ή της συνεχούς σχετικής αύξησης σε δύο τουλάχιστον σημαντικά ζητήματα. Πρώτον, η αύξηση του πληθυσμού διέφερε από το ένα μέρος στο άλλο. Όταν οι πόλεις των Χετταίων και των Βαβυλωνίων αναπτύσσονταν στην περιοχή που σήμερα ονομάζεται Ιράκ και ασιατική Τουρκία, η σημερινή Ευρώπη δεν παρουσίαζε συγκρίσιμη δημογραφική αύξηση, και τμήματα της Νοτίου Αμερικής πιθανόν να έμεναν εντελώς ακατοίκητα.

Δεύτερον, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού ποίκιλλε στο χρόνο: πότε ταχύτερος, πότε βραδύτερος, μερικές φορές ακόμη και αρνητικός. Πιθανολογείται ότι το πρώτο πραγματικό κύμα αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού πραγματοποιήθηκε πριν από το 100000 π.Χ., όταν οι άνθρωποι ανακάλυψαν πώς να κατασκευάζουν και να χρησιμοποιούν εργαλεία. Αρχαιολογικά και ιστορικά στοιχεία δείχνουν ότι ένα άλλο κύμα αύξησης έλαβε χώρα μεταξύ του 8000 και του 4000 π.Χ., όταν οι άνθρωποι ανακάλυψαν ή επινόησαν τη γεωργία και τις πόλεις. Υστερα πάλι, τον 180 αιώνα, όταν οι άνθρωποι ανακάλυψαν την επιστήμη και τη

βιομηχανία, και σημαντικές ποσότητες τροφίμων άρχισαν να ανταλλάσσονται μεταξύ του Παλαιού και του Νέου Κόσμου. Μεταξύ αυτών των περιόδων ταχείας πληθυσμιακής αύξησης παρεμβλήθηκαν πολύ μεγαλύτερες περίοδοι εξαιρετικά αργής αύξησης ή ακόμη και περιστασιακών μειώσεων (όπως συνέβη τον 14ο αιώνα, όταν χτύπησε η πανδημία πανώλους —μαύρος θάνατος).

Το απέριως μεγαλύτερο όμως κύμα πληθυσμιακής αύξησης στην ανθρώπινη ιστορία άρχισε λίγο μετά τον Β' Παγκόσμιο πόλεμο, και συνέχιζεται στις μέρες μας. Σύμφωνα με τους καλύτερους υπολογισμούς, ο ανθρώπινος πληθυσμός αυξήθηκε από κάτι ανάμεσα στα 2 και 20 εκατομμύρια πριν από 12.000 χρόνια σε περίπου 6 δισεκατομμύρια σήμερα. Ο σχετικός ρυθμός αύξησης σημείωσε τόσο ραγδαία άνοδο τους τελευταίους αιώνες, ώστε το 90% της αύξησης του πλήθους των ανθρώπων κατά τη διάρκεια των δώδεκα τελευταίων χιλιετιών έλαβε χώρα από το 1650 μ.Χ. και ύστερα —δηλαδή, μέσα σε λιγότερο από 350 χρόνια. Και μάλιστα, η πλέον ραγδαία άνοδος σημειώθηκε από το 1965 και μετά.

Ας στρέψουμε λοιπόν το βλέμμα μας και στο μέλλον. Μπορώ με βεβαίτητα να ισχυριστώ ότι ο μέσος ρυθμός αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού κατά τους επόμενους τέσσερις αιώνες δεν μπορεί να είναι ίσος με τον σημερινό ρυθμό αύξησης. Γιατί; Επειδή, εάν ο σημερινός ρυθμός του 1,7% ετησίως επιμείνει για τα επόμενα 400 χρόνια (± 10), ο πληθυσμός θα αυξηθεί τουλάχιστον χίλιες φορές, από τα 6 δισεκατομμύρια σήμερα στα 6 τρισεκατομμύρια!

Η συνολική επιφάνεια της Γης, περιλαμβανομένων λιμνών, ελών, ποταμών, ωκεανών, πολικών περιοχών, ηφαιστείων, δασών, αυτοκινητοδρόμων, τεχνητών φραγμάτων και γηπέδων γκολφ, είναι 510 εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα. Με πληθυσμό της τάξεως των 6 τρισεκατομμυρίων, σε κάθε άνθρωπο θα αντιστοιχίει τετράγωνη επιφάνεια πλευράς 10 μέτρων. Η συγκεκριμένη επιφάνεια μπορεί να είναι θαυμάσια αν πρόκειται για φυλακή, δεν είναι όμως σε

θέση να παράσχει στον άνθρωπο την τροφή, το νερό, την ένδυση, τα καύσιμα και τις φυσιολογικές και ψυχολογικές χάρες που διακρίνουν τον άνθρωπο από τα μυρμήγκια ή τα βακτήρια. Και ο τελευταίος οπτιμιστής —αν αυτός είναι ο σωστός χαρακτηρισμός— τρέμει στη σκέψη ότι η Γη θα μπορούσε να υποστηρίξει 6 τρισεκατομμύρια ανθρώπους.

Ο σημερινός ρυθμός αύξησης του 1,7% ετησίως αποτελεί τον μέσο όρο από μερικές ταχέως αναπτυσσόμενες (πληθυσμιακά) περιοχές —όπως η Αφρική και η Νότια Ασία— και μερικές βραδέως αναπτυσσόμενες περιοχές —όπως η Ευρώπη, η Ιαπωνία και η Βόρεια Αμερική. Σε λεπτομερείς προβολές που δημοσιεύτηκαν πριν μερικά χρόνια, τα Ηνωμένα Έθνη εκτίμησαν τι θα συνέβαινε αν κάθε περιοχή του κόσμου διατηρούσε τα επίπεδα γεννητικότητας του 1990 και μείωνε σταδιακά τους ρυθμούς θνησιμότητάς της. Όπως είναι φυσικό, οι ταχέως αναπτυσσόμενες περιοχές θα αναπτύσσονται ακόμη ταχύτερα από τις βραδέως αναπτυσσόμενες.

Κατά συνέπεια, οι ταχύτερα αναπτυσσόμενες περιοχές θα καταλαμβάνουν ολοένα και μεγαλύτερο τμήμα της γηίνης πληθυσμιακής πίτας, οπότε ο μέσος ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Γης θα αυξάνεται. Κατ' αρχάς, ο υποθετικός πληθυσμός των Η.Ε. διπλασιάζεται μέσα σε 40 χρόνια. Μέσα σε 150 χρόνια περνάει τα 600 δισεκατομμύρια, και ώς το 2150 υπερβαίνει τα 694 δισεκατομμύρια ανθρώπους.

Ο σχολιασμός των Η.Ε. ήταν ψυχρός: «Σε πολλούς, τα στοιχεία αυτά θα δείξουν ξεκάθαρα ότι είναι αδύνατο να παραμείνουν σταθερά τα σημερινά παγκόσμια επίπεδα γεννητικότητας επί μακρόν, ιδιαίτερα υπό προϋποθέσεις συνεχούς βελτίωσης των δεικτών θνησιμότητας.»

Πολλοί εποιημόνες, μεταξύ αυτών και εγώ, πιστεύουν ότι ανώτατα όρια τύπου «600 δισεκατομμύρια ανθρώποι (καλύτερα ας ξεχάσουμε τα 6 τρισεκατομμύρια) υπερβαίνουν κατά πολύ τα όρια ανοχής ανθρώπων και Γης. Παραθέτω απλά επιχειρήματα με πολύ μεγάλα όρια, όχι για

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μονιάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Sergey Ivanov

Αντεποτέλλουσα Αρχισυντάκτρια
Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης
Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Κvant

Συμβολευτική επιπροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκει Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασασαχουσέτη
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λόκει του Ρίβερτεϊλ, Λουιζάνα
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα
Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,
Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Γιώργος Κατσιλέρης-φυσικός,
Αθηνά Τσαγκογέωργα-φυσικός και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι
Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Ογκίου
Πέτρος Δήμαρας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμματεία
M. Κουρή

Τυπογραφικές διαρθρώσεις
N. Μαρίνου

Τυποτεχνική επιμέλεια
Ηρ. Ντούσης

Υπεύθυνη λογοτηρίου
M. Μάραλης

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση
Αβ. Μαχαρίδης

Φιλμ, μοντάζ
Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση
N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διεμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης
Διαφημιστές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ιοαννίνων 10 και Δαφνονήσιλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο δλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για ιδιώτες, 18.500 δρχ.
για βιβλιοθήκες, βιβλίατα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.

να σας υποβάλω την ιδέα ότι τα όρια αυτά προσεγγίζουν τα πραγματικά, αλλά για να σας δείξω ότι ακόμη και με εξαιρετικά διευρυμένα όρια ο χρόνος που απομένει στο ανθρώπινο είδος για να χαλιναγωγήσει την αριθμητική του ανάπτυξη (όχι την πνευματική, πολιτισμική ή οικονομική) δεν είναι πολύς. Στους αμέσως επόμενους αιώνες θα πρέπει αναπόφευκτα να πραγματοποιηθεί στον πλανήτη μας μια δραστική, όχι απαραιτήτως απότομη, μείωση του ρυθμού αύξησης του πληθυσμού.

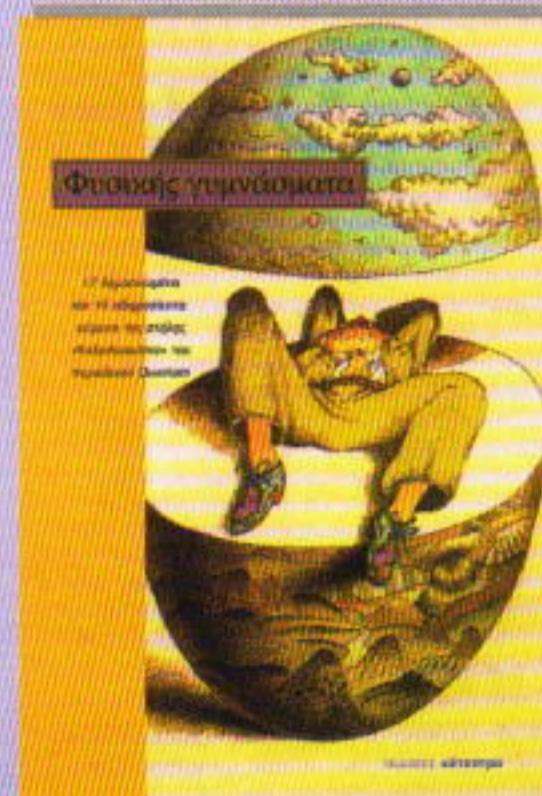
Ο ρυθμός αύξησης του παγκόσμιου πληθυσμού θα μπορούσε να πέσει από τη σημερινή τιμή του 1,7% ετησίως στο μηδέν, ή ακόμη και να γίνει αρνητικός, μόνο με ένα συνδυασμό μείωσης του ρυθμού γεννήσεων και αύξησης του δείκτη θνησιμότητας σε εκείνες τις πολύ φτωχές περιοχές του πλανήτη με την εξαιρετικά υψηλή γεννητικότητα. (Ξεχάστε τη μετανάστευση εκτός Γης. Για τη μείωση του σημερινού ρυθμού αύξησης του παγκόσμιου πληθυσμού από το 1,7% στο 1,6% μόνο, θα απαιτούνταν η αναχώρηση $0,001 \times 6$ δισεκατομμυρίων (ήτοι, 6 εκατομμυρίων) αστροναυτών τον πρώτο χρόνο, και ακόμη περισσοτέρων κάθε επόμενο έτος(!). Το κόστος της εξόδου τόσων ανθρώπων αφ' ενός θα οδηγούσε σε χρεωκοπία τους εναπομέναντες γηγενούς και αφ' ετέρου δεν θα απέτρεπε το διπλασιασμό αυτού του πληθυσμού κάθε 40-50 χρόνια. Σε ό,τι αφορά τη δημογραφία, το Διάστημα δεν αποτελεί λύση.)

Η ανθρωπότητα, λοιπόν, βρίσκεται σήμερα αντιμέτωπη με ένα δίλημμα: χαμηλότεροι δείκτες γεννητικότητας ή μήπως υψηλότεροι δείκτες θνησιμότητας; Εσείς τι θα προτιμούσατε;

—Joel E. Cohen

O Joel E. Cohen είναι καθηγητής πληθυσμιακής βιολογίας στο Πανεπιστήμιο Rockefeller της Νέας Υόρκης. Η έρευνά του εκτείνεται στο πεδίο της δημογραφίας, της οικολογίας, της γενετικής πληθυσμών, της επιδημιολογίας ανθρώπων και μη ανθρώπινων πληθυσμών, δημοσιογραφίας και στα μαθηματικά που είναι χρήσιμα για τα πεδία αυτά.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ ΕΝΑ ΑΚΟΜΗ ΒΙΒΛΙΟ ΜΕ ΥΛΙΚΟ ΤΟΥ QUANTUM



Φυσικής γυμνάσματα

17 δημοσιευμένα και 10 αδημοσιευτα κείμενα της σπίλης «Καλειδοσκόπιο»

Τα ερωτήματα του βιβλίου, που διακρίνονται για την πρωτοτυπία τους και αποσκοπούν στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης του αναγνώστη, αναφέρονται σε βασικά ζητήματα της λυκειακής φυσικής (από τα κεφάλαια της μηχανικής, του πλεκτρισμού, της ακουστικής, της θερμότητας, της οπτικής, της μοριακής και ατομικής φυσικής) αλλά και σε θέματα αστρονομίας, σχετικοτήτας και βιολογίας, και συνοδεύονται από παράξενα παραλειπόμενα της ιστορίας της φυσικής.

Οι απαντήσεις στα ερωτήματα παρατίθενται στο δεύτερο μέρος του βιβλίου και δεν περιέχουν καθόλου τύπους.

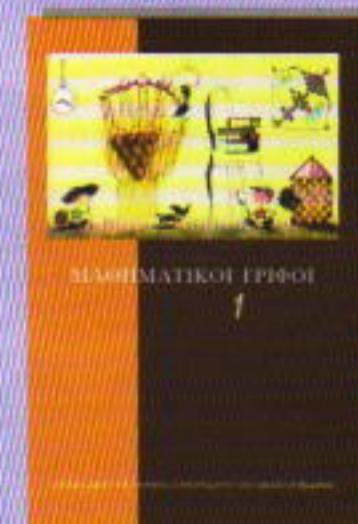
Σελ.: 160, 25 × 17 εκ., Α/Μ. 5.000 δρχ., Πανόδετο

ΑΚΟΜΗ ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



Ο λύκος, ο Μυνχάουζεν και ο Νεύτων

Σελ.: 284, 25 × 17 εκ., Α/Μ.
6.400 δρχ., Πανόδετο



Μαθηματικοί γρίφοι —1

Σελ.: 148, 25 × 17 εκ., Τετραχρωμ.,
5.200 δρχ., Πανόδετο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Τυρβώδης ροή και σεισμογόνα ρήγματα

Γιατί οι μεγάλοι σεισμοί είναι μάλλον σπάνιοι;

G. Golitsyn

ZOUME ΣΕ ΕΝΑΝ ΚΟΣΜΟ ΠΟΥ ΤΟΝ χαρακτηρίζει ανεξάντλητη πολυπλοκότητα και πολυμορφία: η διαπίστωση δε αυτή ισχύει ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά τις λεπτομέρειές του, οι οποίες παραλλάζουν στο χώρο και το χρόνο και παρουσιάζουν μια ουσιαστικά τυχαία κατανομή. Η επιβίωσή μας εξαρτάται από πολυάριθμους παράγοντες στον κόσμο που μας περιβάλλει: από τις καιρικές συνθήκες, το κλίμα, τις βροχοπτώσεις, τις πλημμύρες ή την ξηρασία. Πολλές περιοχές του πλανήτη πλήγιται από σεισμούς, χιονοστρόβιλους και τροπικούς κυκλώνες. Όλα αυτά τα φαινόμενα μοιράζονται ένα κοινό χαρακτηριστικό που το γνωρίζουν οι πάντες από την πείρα τους: όσο ισχυρότερη είναι η διαταραχή, τόσο σπανιότερα συμβαίνει. Με άλλα λόγια, οι μεγάλες αποκλίσεις από τον κανόνα αποτελούν σπάνια γεγονότα. Πρόκειται για χαρακτηριστικό που αντανακλά σαφέστατα τη στατιστική φύση του κόσμου μας, στον οποίο άρχει το τυχαίο, έστω και αν τον διέπουν οι νόμοι της φυσικής. Ασφαλώς, οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας, της ορμής και της στροφορμής παραμένουν έγκυροι παντού και πάντα —χρειάζεται απλώς να κατανοήσουμε πού και πώς να τους εφαρμόζουμε. Σ' αυτό άλλωστε συνίσταται και το κύριο καθήκον της επιστήμης, να μας προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλλει.

Σε διάφορες τεχνικές εφαρμογές

της επιστήμης απαιτείται να γνωρίζουμε τους νόμους της ροής των ρευστών (λέγοντας ρευστό εννοούμε υγρό ή αέριο). Αυτοί οι νόμοι μάς βοηθούν να κατανοήσουμε πώς πετούν τα αεροπλάνα, πώς κινούνται τα πλοία και πώς ρέει το νερό σ' ένα σωλήνα. Ας επιχειρήσουμε μια σύντομη εξέταση των παραγόντων που καθορίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά μιας ροής, όπως την ένταση της και το πώς μεταβάλλεται στο χώρο και το χρόνο. Θα ανακαλύψουμε γιατί ένα μεγάλο και ενδιαφέρον γεγονός απαιτεί μακρότερη περίοδο αναμονής (προσδοκώμενο χρόνο), καθώς και πόσο πρέπει να περιμένει κανείς (κατά μέσον όρο) για να παρατηρήσει ένα τέτοιο γεγονός.

Σταγονίδια και σωλήνες

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα εμβυθισμένο σε κάποιο ρευστό μέσο —στον αέρα ή στο νερό. Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη, στο σώμα θα ασκείται ανωστική δύναμη ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού. Φαίνεται ωσάν να έχει μειωθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας κατά έναν παράγοντα $(\rho_{\sigma} - \rho_{\mu})/\rho_{\sigma}$, όπου με ρ_{σ} και ρ_{μ} συμβολίζουμε αντίστοιχα τις πυκνότητες του σώματος και του μέσου:

$$g' = g \frac{\rho_{\sigma} - \rho_{\mu}}{\rho_{\sigma}}.$$

Επιπλέον, κάθε ρευστό ασκεί μια δύναμη αντίστασης στα σώματα που

κινούνται μέσα του. Ας εξετάσουμε την κίνηση «μεγάλων» και «μικρών» σωμάτων μέσα στον αέρα —για παράδειγμα, την πτώση μιας σταγόνας αερολύματος ή την κάθοδο ενός αλεξιπτωτιστή.

Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, εύκολα μπορεί κανείς να αποδείξει ότι η δύναμη της αντίστασης που δέχεται ένα μεγάλο σώμα χαρακτηριστικού μήκους r το οποίο κινείται με ταχύτητα u σε μέσο πυκνότητας ρ_{μ} πρέπει να εξαρτάται από αυτούς τους παράγοντες ως

$$F_a \sim \rho_{\mu} u^2 r^2.$$

Πράγματι, $(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}^2/\text{s}^2)\text{m}^2 = \text{N}$. Πρόκειται για τη λεγόμενη αεροδυναμική αντίσταση. Στην περίπτωση των μικρών σωμάτων, η εν λόγω δύναμη προέρχεται από την τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στα στρώματα του περιβάλλοντος μέσου. Είναι ανάλογη της πρώτης δύναμης τόσο της ταχύτητας u όσο και του χαρακτηριστικού μήκους r . Προφανώς, ο συντελεστής αναλογίας πρέπει να έχει διαστάσεις $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Είναι γνωστός ως συντελεστής συνεκτικότητας η του μέσου (στη βιβλιογραφία η συνεκτικότητα αναφέρεται και ως ιξώδες ή εσωτερική τριβή). Έτσι, για την αντίσταση συνεκτικότητας (δύναμη Stokes) μπορούμε να γράψουμε

$$F_r \sim \eta ur.$$

Ο λόγος των δύο αντιστάσεων ισούται με τον αριθμό Reynolds:



$$Re = \frac{F_a}{F_\eta} = \frac{ur}{\eta/\rho_\mu} = \frac{ur}{v}.$$

Για λόγους συντομίας, εδώ εισάγουμε έναν νέο συντελεστή v , γνωστό ως κινηματική συνεκτικότητα του μέσου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του αέρα υπό κανονικές συνθήκες έχουμε $v = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το κατά πόσον κυριαρχεί η μία ή η άλλη δύναμη (η δύναμη αδράνειας ή η αντίσταση συνεκτικότητας) εξαρτάται όχι μόνο από το μέγεθος του σώματος (από το αν, δηλαδή, είναι μεγάλο ή μικρό) αλλά επίσης από την ταχύτητά του και από την κινηματική συνεκτικότητα του μέσου εντός του οπίου κινείται. Όλοι τούτοι οι παράγοντες συνδυάζονται σε μία και μοναδική παράμετρο (τον αριθμό Reynolds). Συνεπώς, τον ανταγωνισμό για την επικράτηση ανάμεσα στις αδρανειακές ιδιότητες και τις ιδιότητες συνεκτικότητας ενός μέσου τον κρίνει ο αριθμός Reynolds —το κατά πόσον ο εν λόγω αριθμός είναι πολύ μεγαλύτερος ή πολύ μικρότερος της μονάδας. Το ενδιαφέρον σχετικά με τον περίφημο αυτό αριθμό έγκειται στο ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως λόγος δύο χαρακτηριστικών χρόνων, του χρόνου αποκατάστασης της αντίστασης συνεκτικότητας $\tau_v = r^2/v$ και του χρόνου αποκατάστασης της δύναμης αδράνειας $\tau_a = r/u$:

$$Re = \frac{ur}{v} = \frac{r^2/v}{r/u} = \frac{\tau_v}{\tau_a}.$$

Οι τ_v και ο τ_a αποτελούν μέτρα του χαρακτηριστικού χρόνου που απαιτείται προκειμένου ένα σώμα να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα υπό την επιδραση των αντίστοιχων δυνάμεων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σώμα το οποίο πέφτει εντός κάποιου μέσου. Η ταχύτητά του στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε τη φαινόμενη δύναμη της βαρύτητας (δηλαδή το βάρος μείον την άνωση) mg' , όπου $m = 4\pi r^3 \rho_\sigma / 3$ και $g' = g(\rho_\sigma - \rho_\mu)/\rho_\sigma$, με την εκάστοτε κατάλληλη δύναμη αντίστασης F_η ή F_a . Όσο μεγαλύτερη επιτάχυνση προσδίδει η δύναμη, τόσο ελαττώνεται ο απαιτούμενος για την ισορροπία χρό-

νος αποκατάστασης. Εάν σε ένα σώμα δρουν αρκετές δυνάμεις, τον βασικό ρόλο τον διαδραματίζει εκείνη που αντιστοιχεί στον μικρότερο χρόνο αποκατάστασης. Οι μικροί αριθμοί Reynolds ($Re \ll 1$) σημαίνουν ότι ο χρόνος αποκατάστασης της αντίστασης συνεκτικότητας τ_v υπολείπεται κατά πολύ του χρόνου αποκατάστασης της δύναμης αδράνειας τ_a . Εν τοιαύτη περιπτώσει, για το σώμα που πέφτει μέσα στο ρευστό μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$mg' - \eta ur - \nu \rho_\eta ur,$$

η οποία δίνει

$$u \sim g' \tau_v \frac{\rho_\sigma}{\rho_\eta}.$$

Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική, για μεγάλους αριθμούς Reynolds ($Re \gg 1$) έχουμε

$$mg' - \rho_\mu u^2 r^2,$$

οπότε

$$u \sim g' \frac{r}{u} \frac{\rho_\sigma}{\rho_\mu} = g' \tau_a \frac{\rho_\sigma}{\rho_\mu}.$$

Ας θεωρήσουμε τη ροή ενός συνεκτικού υγρού πυκνότητας ρ σε σωλήνα ακτίνας r και μήκους l υπό μια κινητήρια διαφορά πίεσης Δp μεταξύ των άκρων του σωλήνα. Σε έναν μοναδιαίο δύκο του εν λόγω υγρού θα ασκείται δύναμη ίση με $\Delta p/l$, οπότε η επιτάχυνσή του θα ισούται με $\gamma = \Delta p/(\rho l)$. Ως εκ τούτου, η μέση ταχύτητα (ο μέσος όρος της ταχύτητας πάνω στην εγκάρσια διατομή του σωλήνα) για μικρούς αριθμούς Reynolds ($Re \ll 1$) θα ισούται με

$$u_{\mu.o.} \sim \gamma \tau_v \sim \frac{\Delta p}{\rho l} \frac{r^2}{v}.$$

Το ανωτέρω πρόβλημα για στενούς σωλήνες το έλυσε στα μέσα του 19ου αιώνα ο διάσημος γάλλος επιστήμονας Jean Leonard Marie Poiseuille. Η λύση του διαφέρει από τη δική μας κατά έναν παράγοντα που πλησιάζει τη μονάδα.

Αντίθετα, για $Re \gg 1$ καταλήγουμε στη σχέση

$$u_{\mu.o.} \sim \gamma \tau_a \sim \frac{\Delta p}{\rho l} \frac{r}{u},$$

από την οποία έπειται ότι η αντίσταση είναι πάλι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας: τώρα η μέση ταχύτητα δίνεται από την προσεγγιστική σχέση

$$u_{\mu.o.} \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho l}} r.$$

Ο ανωτέρω τύπος βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με πολλά πειράματα. Χρησιμοποιείται από μακρού σε πρακτικούς υπολογισμούς που αφορούν τις παροχές σε διάφορα δίκτυα σωληνώσεων, απαραίτητα για τον σύγχρονο τρόπο ζωής.

Σημειωτέον ότι η παροχή P στις δύο περιπτώσεις παρουσιάζει διαφορετική εξάρτηση από την ακτίνα για δεδομένη τιμή της βαθμίδας πίεσης $\Delta p/l$. Στη μεν συνεκτική περιοχή η παροχή είναι

$$P = \pi r^2 u_{\mu.o.} \sim \frac{\Delta p}{\rho l} r^4,$$

ενώ στη μη γραμμική (όσον αφορά το Δp) περιοχή

$$P = \pi r^2 u_{\mu.o.} \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho l}} r^{5/2}.$$

Συγκρίνοντας τους δύο τύπους, διαπιστώνουμε ότι η σχετική αποδοτικότητα της μεταφοράς μέσω δικτύου σωληνώσεων στη δεύτερη περίπτωση σε σύγκριση με την πρώτη μειώνεται καθώς αυξάνεται είτε η βαθμίδα της πίεσης είτε η ακτίνα των σωλήνων.

Τύρβη

Στον κόσμο υπάρχουν διάφορες ενεργειακές πηγές που η ισχύς τους μεταβάλλεται αισθητά μόνο σε περιόδους συγκρίσιμες με το χρόνο ζωής της Γης (περίπου $4,5 \times 10^{17}$ s). Για παράδειγμα, η ηλιακή ενέργεια δεν αποτελεί μόνο την πηγή όλης της ζωής στον πλανήτη μας (μέσω της φωτοσύνθεσης που συντελείται χάρη στη χλωροφύλλη), αλλά αποτελεί και το «καύσιμο» για όλη την κίνηση στους ωκεανούς και την ατμόσφαιρα.

Μιαν άλλη τεράστια πηγή ενέργειας, η οποία ενεργοποιεί διαφορετικές διαδικασίες στο φλοιό και στο εσωτερικό της Γης, αντιπροσωπεύει η

θερμότητα που παράγεται εκεί από τη ραδιενέργεια διάσπαση διαφόρων στοιχείων. Ο μανδύας της Γης εκτείνεται από βάθους 3.000 km έως το φλοιό, του οποίου το πάχος μόλις ανέρχεται στα 20-70 km κάτω από τις ηπείρους και γίνεται ακόμη μικρότερο (5 km) πλησίον των μεσοωκεάνιων ραχών. Η θέρμανση του μανδύα προκαλεί ρεύματα μεταφοράς στη ρευστή ύλη που τον αποτελεί. Τα εν λόγω ρεύματα μετατοπίζουν τις λιθοσφαιρικές πλάκες του φλοιού με αναμοιόμορφο τρόπο κατά μερικά εκατοστά κάθε χρόνο. Η μετατόπιση αυτή, παρότι εξαιρετικά βραδεία, οδηγεί στη βαθμιαία ανάπτυξη ελαστικών τάσεων στα σύνορα των πλακών. Ακριβώς τούτες τις συσσωρευμένες τάσεις απελευθερώνουν εν μέρει οι σεισμοί.

Μπορεί κανείς να οδηγηθεί σε μια εξίσωση που περιγράφει τις διαδικασίες οι οποίες μεταβάλλουν την ενέργεια ενός συστήματος με την πάροδο του χρόνου πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κίνησης επί την ταχύτητα. Το γινόμενο της δύναμης επί την ταχύτητα ισούται με την ισχύ που αναπτύσσει η συγκεκριμένη δύναμη. Εάν τη δύναμη την οποία αναπτύσσει κάποιο σύστημα την εξισορροπεί (κατά μέσον δρο στο χώρο και το χρόνο) η ισχύς μιας εξωγενούς πηγής (η ηλιακή ενέργεια, φερ' ειπείν), η κινητική ενέργεια του συστήματος θα διατηρείται (επίσης κατά μέσον όρο) σταθερή. Για την εδραίωση αυτής της μόνιμης κατάστασης, οι χαρακτηριστικοί χρόνοι αποκατάστασης εξαρτώνται από τις εμπλεκόμενες δυνάμεις (με τον ίδιο τρόπο που είδαμε προηγουμένως όταν εκτιμούσαμε τις ταχύτητες των σωμάτων τα οποία έπεφταν σε διάφορα ρευστά).

Θα αρχίσουμε με μια περιγραφή της χωρικής δομής μιας τυρβώδους (δηλαδή ακανόνιστης) ροής σε μικρή κλίμακα, όπου η δομή της δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση και τη θέση τις οποίες θα επιλέξουμε.

Προ εβδομήντα και πλέον ετών ο άγγλος επιστήμονας Richardson αμφισβήτησε ότι ο άνεμος είναι δυνατόν να χαρακτηριστεί με ορισμένη ταχύτητα. Ο Richardson εξήγησε ότι σε οποιοδήποτε μέρος της Γης ο άνε-

μος παρουσιάζει στοχαστικές μεταβολές στο χώρο και στο χρόνο. Εισηγήθηκε επίσης μια ποιοτική περιγραφή της τύρβης ως διαδικασίας όπου η κύρια ροή είναι ασταθής. Η ασταθής ροή αποσυντίθεται και παράγει μικρότερους στροβίλους, οι οποίοι με τη σειρά τους γεννούν ακόμη μικρότερους στροβίλους, κ.ο.κ. έως τις μικρότερες κλίμακες. Οι μικρότατοι στρόβιλοι εκφυλίζονται λόγω της αποσβεστικής δράσης των δυνάμεων τριβής, καθότι χαρακτηρίζονται από μικρούς αριθμούς Reynolds.

Το 1941 ο Andrei Kolmogorov συνέγραψε μια εργασία όπου περιέγραψε τη δομή της τυρβώδους ροής. Την ίδια ουσιαστικά περίοδο, ο μεταπυχιακός του φοιτητής Alexander Obukhov δημοσίευσε μια εργασία όπου, μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων μεγάλου ενδιαφέροντος, προσδιόριζε και το λεγόμενο χωρικό φάσμα της τύρβης. Εκείνη την εποχή, ο Kolmogorov αγνοούσε το έργο του Richardson, πλην όμως είχε πλήρη επίγνωση των εμποδίων τα οποία έπρεπε να αντιμετωπιστούν προκειμένου να δημιουργηθεί μια θεωρία της τύρβης: ακριβώς για να υπερνικήσει αυτά τα εμπόδια αποσκοπούσαν ορισμένα από τα ποσοτικά εργαλεία που προσέφερε. Για παράδειγμα, προκειμένου να παρακαμφθεί το εμπόδιο της ταχύτητας του ανέμου, ο Kolmogorov πρότεινε να θεωρηθεί ως βασική παράμετρος η μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς των συνιστώσων της ταχύτητας σε δύο σημεία που απέχουν απόσταση r . Στην προκειμένη περίπτωση, οι βραδείες μεταβολές που παράγουν σε μεγαλύτερες κλίμακες οι μη ισοτροπικοί μεγάλοι στρόβιλοι, οι οποίοι δημιουργούνται ως αποτέλεσμα της αστάθειας της κύριας ροής, απλούστατα αλληλοαναιρούνται και δεν χρειάζεται να ληφθούν υπόψη. Έτσι, ο Kolmogorov πρότεινε μια ποσοτική περιγραφή της διαδικασίας διάσπασης των στροβίλων, την οποία ποιοτικά είχε ήδη περιγράψει ο Richardson.

Εάν η ανάπτυξη της αστάθειας στην κύρια ροή διατηρείται διηνεκώς από κάποια ενεργειακή πηγή (όπως, για παράδειγμα, η γενική κυκλοφορία της ατμόσφαιρας διατηρεί-

ται λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής της ηλιακής ακτινοβολίας στη γήινη επιφάνεια), τότε πρέπει να υφίσταται μια σταθερή ροή ενέργειας από τους μεγάλους στροβίλους προς τους μικρούς. Τούτη η ενεργειακή ροή (ή ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας και χρόνου), που θα τη συμβολίζουμε με r , συνήθως μετριέται σε $J/(kg \cdot s)$. Η μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς των ταχυτήτων του ρευστού σε δύο σημεία που απέχουν απόσταση r μπορεί να θεωρηθεί ως η σχετική κινητική ενέργεια δύο σωματιδίων του ρευστού μοναδιαίας μάζας τα οποία απέχουν απόσταση r . Οι περιπτώσεις των μεγάλων και των μικρών r πρέπει να αντιμετωπιστούν χωριστά.

Ας υποθέσουμε ότι το r είναι μεγάλο συγκρινόμενο με τις αποστάσεις όπου αρχίζει να γίνεται καθοριστική η δράση των δυνάμεων συνεκτικότητας. Πρόκειται για μια απόσταση που ονομάζεται μικροσκοπική κλίμακα Kolmogorov $l_K = (v^3/\epsilon)^{1/4}$ (την απόδειξη ότι η έκφραση αυτή βρίσκεται σε συμφωνία με τη διαστατική ανάλυση την αφήνουμε στον αναγνώστη). Τότε, ο αριθμός Reynolds είναι επίσης μεγάλος, και, εκμεταλλευόμενοι την αναλογία μεταξύ των δυναμικών και ενεργειακών χαρακτηριστικών του συστήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο που περιέχει τον δυναμικό χρόνο $\tau_a = r/u$ για να καταλήξουμε στον περίφημο νόμο των Kolmogorov και Obukhov:

$$u^2 \sim (\epsilon r)^{2/3}.$$

Ο Obukhov κατάφερε να βρει έναν τύπο για τη χωρική φασματική κατανομή της πυκνότητας της κινητικής ενέργειας στην τυρβώδη ροή. Στο σημείο αυτό επιβάλλεται μια σύντομη εξήγηση του τι ουσιαστικά σημαίνει φασματική περιγραφή ή, ίσως ακριβέστερα, περιγραφή μέσω της συνάρτησης φασματικής κατανομής. Η στοχαστική κατανομή ταχύτητας μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα χωρικών αρμονικών (ημιτονοειδών) διαφόρων πλατών και μηκών κύματος, ακριβώς όπως ένα τυχόν ηλεκτρικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα ημιτονοειδών

συναρτήσεων του χρόνου με διάφορα πλάτη και συχνότητες. Η συνάρτηση η οποία δίνει τη συνεισφορά (το «βάρος») κάθε ημιτονοειδούς στην κυματομορφή ονομάζεται φάσμα. Η φασματική περιγραφή οποιουδήποτε φαινομένου αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποδοτική από πρακτικής απόψεως.

Ο Obukhov βρήκε ότι η τύρβη έχει ένα χωρικό φάσμα που περιγράφεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

όπου με λ δηλώνουμε το μήκος κύματος της χωρικής αρμονικής. Αυτός ο τύπος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην ατμόσφαιρα, στους ωκεανούς, στις μεγάλες αεροδυναμικές σήραγγες, στις αστρικές ατμόσφαιρες, ακόμη δε και στο μεσοαστρικό αέριο στο Γαλαξία μας. Την ορθότητά του την έχουν επιβεβαιώσει πολλές άμεσες μετρήσεις τις οποίες έχει πραγματοποιήσει η παγκόσμια επιστημονική κοινότητα. Υπάρχουν πολύ ισχυροί λόγοι που εξηγούν γιατί η εν λόγω θεωρία θεωρείται ως ένα από τα πλέον εξέχοντα επιτεύγματα της υδροδυναμικής του 20ού αιώνα.

Στο άλλο άκρο, στις μικρές κλίμακες που χαρακτηρίζονται από τη συνθήκη $r < l_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, ο αριθμός Reynolds δεν είναι μεγάλος, οπότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το χρόνο αποκατάστασης των δυνάμεων τριβής (επειδή $\tau_v \ll \tau_a$). Έτσι, έχουμε

$$u^2 \sim \varepsilon r^2/\nu.$$

Σ' αυτή την κλίμακα μπορεί να γίνει ακριβής υπολογισμός, ο οποίος δίνει έναν αριθμητικό παράγοντα $1/3$ στο δεξιό μέλος του ανωτέρω τύπου.

Τα ρεύματα μεταφοράς, τα οποία αποτελούν μια σημαντική κλάση κινήσεων στη φύση και την τεχνολογία, παρατηρούνται τυπικά όταν κάποιο ελαφρό υγρό βρίσκεται κάτω από ένα άλλο βαρύτερο. Τέτοια κατάσταση έχουμε εάν τοποθετήσουμε μια χύτρα με νερό πάνω σε μια ηλεκτρική εστία, η οποία θερμαίνει το νερό από τον πυθμένα. Ένα άλλο παράδειγμα μας προσφέρει η ψύξη του νερού από πάνω. Η θέρμανση από τα κάτω λαμβάνει χώρα στην ατμόσφαιρα όταν η ηλιακή ακτινοβολία θερμαίνει το έδαφος. Τα ρεύματα μετα-

φοράς που προκαλούνται έτσι μπορούν να παρατηρηθούν ως μια φεγγιοβολή στον αέρα πάνω, ας πούμε, από ένα οργωμένο χωράφι. Η ψύξη από τα πάνω συμβαίνει σε όλες τις φυσικές δεξαμενές, όπου η καταναλισκόμενη θερμική ενέργεια ως θερμότητα εξαέρωσης αφαιρείται από το επιφανειακό στρώμα του νερού. Η ροή θερμότητας q_θ που απάγεται από το υγρό (ή προσφέρεται σε αυτό) συνδέεται με τον εκφυλισμό της κινητικής ενέργειας μέσω του τύπου

$$\varepsilon = \frac{agq_\theta}{\rho c_p},$$

όπου με a συμβολίζουμε το συντελεστή κυβικής διαστολής του υγρού, με g την επιτάχυνση της βαρύτητας και με c_p την ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση.

Φυσικά, η μεταφορά θερμότητας διακρίνεται από την τοπικά ομοιογενή και ισοτροπική τύρβη κατά το διάστημα μια προτιμώμενη κατακόρυφη κατεύθυνση (η οποία συνδέεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας g). Εντούτοις, στο βαθμό που κανείς ενδιαφέρεται για μια χονδρική μόνον εκτίμηση του ρυθμού μεταφοράς, μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιήσει τους τύπους που εξήχθησαν για την τύρβη. Φυσικά, οι αριθμητικοί συντελεστές θα πρέπει να «προσαρμοστούν» έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στη μεταφορά θερμότητας αντί στην τύρβη.

Δεδομένου ότι για τις ανάγκες της πρακτικής μάς ενδιαφέρει πρωτίστως να γνωρίζουμε το ρυθμό μεταφοράς στα συνεκτικά υγρά, ο αντίστοιχος τύπος ελέγχθηκε σε πολλά πειράματα αλλά και υπολογισμούς, τόσο αναλυτικούς όσο και αριθμητικούς. Η έκφραση που ελήφθη για τη μέση ταχύτητα είναι

$$u \sim 0.1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} r = 0.1 \sqrt{\frac{agq_\theta}{\rho v c_p}} r.$$

Οι γεωφυσικοί επέτυχαν να προσδιορίσουν τις εξής παραμέτρους για το μανδύα της Γης: $a \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $\rho \approx 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $v \approx 10^{19} \text{ m}^2/\text{s}$ και $c_p \approx 3 \cdot 10^2 \text{ J/(kg \cdot K)}$. Εάν εισαγάγουμε τη μέση τιμή της γεωθερμικής ροής θερμότητας $q_\theta = 0.08 \text{ W/m}^2$ και το πάχος του μανδύα $r \approx 3.000 \text{ km}$ στον

ανωτέρω τύπο, παίρνουμε για την ταχύτητα μεταφοράς στο μανδύα της Γης μια τιμή περίπου 5 εκατοστών ανά έτος. Η πραγματική ταχύτητα των λιθοσφαιρικών πλακών, όπως την προσδιόρισαν οι ναυτιλιακοί δορυφόροι, κυμαίνεται στην περιοχή των $1-10 \text{ εκατοστών}$ ανά έτος.

Η τιμή των 5 εκατοστών ανά έτος μπορεί να φαίνεται εξαιρετικά μικρή, αλλά αν λάβουμε υπόψη ότι το έτος έχει 52 εβδομάδες , πρόκειται για ρυθμό 1 χιλιοστού ανά εβδομάδα. Κατά σύμπτωση, με τον ίδιο περίπου ρυθμό αναπτύσσονται και τα ανθρώπινα νύχια: επομένως, μια τέτοια «αργή κίνηση» μας είναι αρκετά οικεία. (Πιστεύω ότι το γεγονός αυτό πρώτος το παρατήρησε ο άγγλος γεωφυσικός D. Mackenzie.)

Πέραν της βαρύτητας, υπάρχει ένας ακόμη παράγοντας που επιδρά στα ρεύματα μεταφοράς πάνω στη Γη. Συνδέεται με τη δύναμη Coriolis, η οποία αποτελεί συνέπεια της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της. Η εν λόγω δύναμη δρα πάντοτε κάθετα στην ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο και δεν επηρεάζει την ενέργεια των ρευμάτων μεταφοράς. Συνεπώς, η περιστροφή της Γης δεν τροποποιεί τον τύπο για το ρυθμό εκφυλισμού της ενέργειας. Η δύναμη Coriolis εισάγει μια νέα χρονική κλίμακα $\tau_\omega = (2\omega\eta\mu)^{-1}$, όπου με ω συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης και με θ τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας περιστροφής με την εφαπτομένη του τοπικού μεσημβρινού (στην περίπτωση της Γης η συγκεκριμένη γωνία συμπίπτει με το γεωγραφικό πλάτος). Στα μεσαία γεωγραφικά πλάτη $1/\tau_\omega = 2\omega\eta\mu \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Ο λόγος της δύναμης αδράνειας προς τη δύναμη Coriolis είναι γνωστός ως αριθμός Rossby, $Ro = \tau_\omega/\tau_a$. Ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του σουηδού μετεωρολόγου ο οποίος το 1940 εισήγαγε τον εν λόγω αριθμό στην επιστημονική πρακτική. Στην περίπτωση των ατμοσφαιρικών ή ωκεάνιων κινήσεων μεγάλης κλίμακας, ο αριθμός Rossby υπολείπεται κατά πολύ της μονάδας. Για παράδειγμα, $Ro = 0.1$ για $r = 1.000 \text{ km}$ και $u = 10 \text{ m/s}$. Η δύναμη Coriolis αντι-

σταθμίζεται από μια οριζόντια βαροβαθμίδα (βαθμίδα πίεσης). Έτσι εξηγείται ο εμπειρικός κανόνας που από μακρού χρησιμοποιούν οι μετεωρολόγοι: εάν στρέψεις την πλάτη σου στον άνεμο, η περιοχή χαμηλής πίεσης θα βρίσκεται στα αριστερά σου και η περιοχή υψηλής πίεσης στα δεξιά σου. Φυσικά, στο νότιο ημιοφαίριο ισχύει ο αντίθετος κανόνας.

Εφόσον ο χαρακτηριστικός χρόνος τ_ω υπολείπεται κατά πολύ του αδρανειακού χρόνου, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα της ροής μεταφοράς στο περιστρεφόμενο ρευστό:

$$u^2 - \varepsilon\tau_\omega, \text{ ή } u \sim \sqrt{\varepsilon\tau_\omega}.$$

Πολλά πειράματα (στα οποία συμπεριλαμβάνεται και αυτό του γράφοντος) έδωσαν για το συντελεστή αναλογίας στον ανωτέρω τύπο την τιμή 1,7. Όταν εφαρμοστεί στον υγρό πυρήνα της Γης, ο τύπος αυτός δίνει μια ταχύτητα περίπου 5 εκατοστών ανά έτος, η οποία επαρκεί για να παραχθεί και να διατηρηθεί το γεωμαγνητικό πεδίο. Ο ίδιος τύπος δίνει ταχύτητες 40-50 m/s για τους τροπικούς κυκλώνες, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τα μετεωρολογικά δεδομένα. Πρόσφατα, οι ωκεανογράφοι αποδύθηκαν σε εντατική μελέτη των ρευμάτων μεταφοράς σε περιστρεφόμενο υγρό, σε μια προσπάθεια να περιγράψουν τη βύθιση των υδάτων στα άκρα των στρωμάτων πάγου σε μεγάλα γεωγραφικά πλάτη (η κύρια διαδικασία που «προωθεί» το νερό προς τα βάθη του ωκεανού).

Στα μέσα της δεκαετίας του 1960, ο A.M. Obukhov, διευθυντής τότε του Ινστιτούτου Φυσικής της Ατμόσφαιρας της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, υπέβαλε την πρόταση να αναλάβω την έρευνα σχετικά με την ατμοσφαιρική κίνηση σε άλλους πλανήτες. Αφιέρωσα αρκετά χρόνια στην ανάλυση αστρονομικών παρατηρήσεων και στην προσομοίωση μερικών από τα χαρακτηριστικά της δυναμικής της ατμόσφαιρας του Άρη. Τούτη η εργασία έφτασε στην κορύφωσή της με μια θεωρία ομοιότητας για την κυκλοφορία των πλανητικών ατμοσφαιρών. Η εν λόγω θεωρία παρείχε εύλογες εκτιμήσεις για την ταχύτητα του ανέμου και τη θερμοκρα-

σιακή διαφορά που «κινεί» τους ανέμους στη Γη: 12 m/s και 45 K, αντιστοίχως. Οδηγούσε επίσης στην πρόβλεψη των ίδιων παραμέτρων στην Αφροδίτη, στον Άρη και σε έναν από τους δορυφόρους του Κρόνου, τον Τιτάνα (όπου η μάζα της ατμοσφαιρικής στήλης υπερβαίνει κατά έντεκα φορές την αντίστοιχη στη Γη). Ο τύπος που προέκυπτε για τη μέση ταχύτητα του ανέμου δεν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί τετριμμένος:

$$u = a\sigma^{1/16} q^{7/16} c_p^{-1/4} r^{1/2} m^{-1/2},$$

όπου το a αντιπροσωπεύει έναν αδιάστατο παράγοντα (ο οποίος ισούται με 0,6 στην περίπτωση της Γης), το $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ είναι η σταθερά Stefan-Boltzmann (η οποία εμφανίζεται στον τύπο για τη θερμική ακτινοβολία $q = \sigma T^4$), το m δηλώνει τη μάζα της ατμοσφαιρικής στήλης (10^4 kg/m^2), το $q = q_0(1 - A)/4$ ($q = 240 \text{ W/m}^2$) συμβολίζει την πυκνότητα της ηλιακής ακτινοβολίας που δέχεται ο πλανήτης κατά μέσον όρο πάνω στην επιφάνειά του, η οποία έχει ανακλαστική ικανότητα, ή άλμπεντο, A ($A = 0,3$) και, τέλος, το q_0 είναι η ηλιακή σταθερά (1.368 W/m^2). (Εντός παρενθέσεων αναγράφονται οι αντίστοιχες τιμές των διαφόρων παραμέτρων για τη Γη).

Πρόκειται για έναν τύπο τόσο περίπλοκο, ώστε ακόμη και μια απλουστευμένη ανάλυση καθίσταται αδύνατη. Πέρασαν αρκετά χρόνια ώσπου να αντιληφθεί ο γράφων ότι η ολική κινητική ενέργεια της ατμόσφαιρας μπορούσε να περιγραφεί με τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} m 4\pi r^2 u^2 = 2\pi a^2 Q \tau_n = 2Q \tau_n,$$

όπου με Q συμβολίζουμε την ολική ενέργεια της ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει στον πλανητικό δίσκο και με $\tau_n = r/c$ το λόγο της ακτίνας του πλανήτη προς την ταχύτητα του ήχου, ο οποίος ισούται με το χρόνο απόσβεσης για τις διαταραχές πίεσης και πυκνότητας σε πλανητική κλίμακα. Ο λόγος του χρόνου απόσβεσης τ_n προς τον αδρανειακό χρόνο τ_a ισούται με τον αριθμό του Mach $Ma = u/c$. Δεδομένου ότι $Ma \ll 1$, η μικρότερη χρονική παράμετρος είναι ο χρόνος απόσβεσης.

Γενικά, οι άνεμοι δημιουργούνται επειδή οι πλανήτες έχουν (κατά προσέγγιση) σφαιρικό σχήμα. Επομένως, έχουν ημέρα και νύχτα, καθώς και μεγάλα και μικρά γεωγραφικά πλάτη, και ως εκ τούτου τα διάφορα μέρη του πλανήτη θερμαίνονται διαφορετικά. Αυτή η ανομοιόμορφη θέρμανση αποτελεί την κύρια αιτία των ανέμων. Στην περίπτωση της Αφροδίτης, ο τύπος για τη μέση ταχύτητα του ανέμου δίνει $u \approx 1 \text{ m/s}$. Πρόκειται για εκτίμηση που την επιβεβιώσαν άμεσες μετρήσεις τις οποίες πραγματοποίησαν διαστημικές βολίδες στο κατώτερο ημιοφαίριο του συγκεκριμένου πλανήτη. Στην περίπτωση του Άρη, οι θεωρητικές εκτιμήσεις για την ταχύτητα του ανέμου αποδείχθηκαν τριπλάσιες από την τιμή που προκύπτει βάσει των πειραματικών δεδομένων. Κατά πάσα πιθανότητα, τούτη η διάσταση των αποτελεσμάτων πρέπει να αποδοθεί στο μικρό πάχος και τη διαφάνεια της ατμόσφαιρας του Άρη. Υπό τέτοιες συνθήκες, τον βασικό ρόλο στην ανταλλαγή θερμότητας ανάμεσα στην επιφάνεια και την ατμόσφαιρα του πλανήτη τον παίζει η θερμική ακτινοβολία και όχι η δυναμική της ατμόσφαιρας.

Περιέργως, η συλλογιστική που οδήγησε στον τύπο για την ενέργεια E μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή στοχαστικών διαδικασιών όπου υπεισέρχονται προσδοκίες και γεγονότα, δηλαδή για τον καθορισμό του πλήθους των γεγονότων τα οποία συμβαίνουν ανά μονάδα χρόνου ως συνάρτηση της μέσης τους έντασης.

Σεισμοί

Ας στραφούμε στην ανάλυση του πλήθους των σεισμών που σημειώνονται στον πλανήτη (ευτυχώς, πρόκειται για ένα πλήθος μικρός, και οι ισχυροί σεισμοί αποτελούν εξαιρετικά σπάνια γεγονότα). Όσον αφορά τη δομή της και τη φύση της, ο σεισμός είναι μια πολύ περίπλοκη διαδικασία. Ένα κατά το μάλλον ή τέτοιον ακριβές ποσοτικό μέτρο της έντασης των σεισμών προτάθηκε μόλις πριν από τριάντα χρόνια. Το εν λόγω μέτρο βασίζεται στην ενέργεια

των ακτινοβολούμενων σεισμικών κυμάτων που ανιχνεύονται από κατάλληλα εξοπλισμένους σεισμογραφικούς σταθμούς, οι οποίοι στη διάρκεια της τελευταίας εικοσαετίας λειτουργούσαν ενταγμένοι στο Παγκόσμιο Πρότυπο Σεισμογραφικό Δίκτυο (WWSSN). Πιο συγκεκριμένα, η παράμετρος που προσδιορίζεται είναι η σεισμική ροπή $M = \mu_s S_s$, όπου με μ_s συμβολίζουμε το μέτρο διάτμησης του πετρώματος που θραύεται από το σεισμό, με s τη μέση μετατόπιση των γειτνιαζόντων τεμαχών του φλοιού στη διάρκεια του σεισμού και με S την επιφάνεια επαφής πάνω στην οποία γίνεται η συγκεκριμένη μετατόπιση. Η σεισμική ροπή M μετριέται σε $N \cdot m$, δηλαδή έχει διαστάσεις έργου ή ενέργειας. Οι σεισμοί απλευθερώνουν την ενέργεια παραμόρφωσης λόγω της τάσης $\Delta\sigma$ η οποία συσσωρεύεται κατά τη μετατόπιση των λιθοσφαιρικών πλακών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για διαφορετικούς σεισμούς η $\Delta\sigma$ παρουσιάζει ελαφρές μόνο μεταβολές γύρω από τη μέση τιμή της ($40 \text{ atm} = 4 \text{ MN/m}^2 = 4 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3$) παρότι η M μπορεί να διαφέρει κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Αυτό το χαρακτηριστικό μάς επιτρέπει να αποδώσουμε σε κάθε σεισμό τη δική του γραμμική κλίμακα, L_m , κλίμακα εμβαδού επιφανείας, $S_m = L_m^2$, ή κλίμακα όγκου, $V_m = L_m^3$:

$$L_m = \left(\frac{M}{\Delta\sigma} \right)^{1/3}, \quad S_m = \left(\frac{M}{\Delta\sigma} \right)^{2/3}, \quad V_m = \frac{M}{\Delta\sigma}.$$

Οι παράμετροι L_m και S_m χρησιμεύουν στην εκτίμηση του μήκους και του εμβαδού της ρηγματικής ζώνης που σχηματίζεται στο σεισμό, ενώ η γνώση του μέτρου διάτμησης επιτρέπει τον προσδιορισμό της μέσης μετατόπισης s . Για παράδειγμα, ο χειρότερος σεισμός στον 20ό αιώνα σημειώθηκε στη Χιλή (τον Μάιο του 1960), όπου η διάρρηξη του φλοιού εκτεινόταν σε μήκος 800 km και η μετατόπιση υπερέβαινε τα 20 m!

Στηριζόμενοι στη διαστατική ανάλυση, μπορούμε να γράψουμε

$$M = a_s P t(\geq M),$$

όπου το a_s παριστά έναν σταθερό παράγοντα, το P την ισχύ με την οποία τροφοδοτείται το σύστημα (στην πε-

ρίπτωση μας, όπου η στατιστική καλύπτει το σύνολο του πλανήτη, πρόκειται για την ολική τιμή της γεωθερμικής ισχύος $P = 4 \cdot 10^{13} \text{ W}$, με μια μέση πυκνότητα ροής ενέργειας $0,08 \text{ W/m}^2$), ενώ με $t(\geq M)$ συμβολίζουμε τον μέσο προσδοκώμενο χρόνο για ένα σεισμικό γεγονός με σεισμική ροπή ίση ή μεγαλύτερη της M . Αυτήν ακριβώς την κατανομή ακολουθούν τα σεισμικά γεγονότα στον λεπτό φλοιό κοντά στις μεσοωκεάνιες ράχες, στις περιοχές δηλαδή όπου σχηματίζεται ο φλοιός και όπου το πάχος του ανέρχεται μόλις στα 5 km.

Οι σεισμολόγοι είθισται να γράφουν το νόμο κατανομής για τη μέση συχνότητα με την οποία εκδηλώνονται οι σεισμοί με τη μορφή

$$N(\geq M) \sim \frac{P}{M^n},$$

όπου $N(\geq M) = 1/t(\geq M)$. Σύμφωνα με τις προσεκτικά συνταχθείσες στατιστικές των σεισμικών γεγονότων, για ορισμένα μεν σύνολα δεδομένων ο εκθέτης n έχει την τιμή 1,05, για άλλα δε την τιμή 0,94. Σε κάθε περίπτωση, βρίσκεται πολύ κοντά στη μονάδα. Σας υπενθυμίζω εν προκειμένω ότι γνωρίζουμε μόνο την ισχύ της ενεργειακής πηγής και επιχειρούμε να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στην ένταση ενός σεισμού και στον προσδοκώμενο χρόνο του (ή τη συχνότητα εμφάνισης).

Εντούτοις, στη συντριπτική τους πλειονότητα οι σεισμοί σημειώνονται μακριά από τις μεσοωκεάνιες ράχες, και έτοι μόνο ένα μικρό ποσοστό των σεισμών (μόνο περί τα 50 γεγονότα στην περίοδο 1977-1992) υπακούει στον προαναφερθέντα νόμο κατανομής. Για τους πιο πολλούς σεισμούς με σεισμικές ροπές M μικρότερες από $10^{21} \text{ N} \cdot \text{m}$, ο εκθέτης n είναι μικρότερος από 1. Οι πειραματικές τιμές τις οποίες υπολογίσαν διάφοροι συγγραφείς διαφέρουν κάπως, όμως όλες τους περιγράφονται με την τιμή $n = 0,66 \pm 0,03$.

Θυμηθείτε τώρα τις κλίμακες του μήκους, του εμβαδού επιφανείας και του όγκου (βλ. τους σχετικούς τύπους ανωτέρω). Τον δεύτερο τύπο τον πρότεινε το 1956 ο ιάπωνας σεισμολόγος Chuji Tsuboi. Δίνει τον ό-

γκο στον οποίο λαμβάνει χώρα η εκτόνωση των μηχανικών τάσεων. Η θερμική ροή, η οποία αποτελεί την έσχατη πηγή που τροφοδοτεί την ανάπτυξη τάσεων στο φλοιό, διοχετεύεται σε ένα τμήμα του φλοιού εμβαδού S_m και πάχους h , οπότε ο συνολικός όγκος που επηρεάζεται ισούται με $hS_m = h(M/\Delta\sigma)^{2/3}$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\frac{MN(\geq M)}{V_m} = a_s \frac{P}{hS_m},$$

η οποία δίνει

$$N(\geq M) \equiv 0,4PM^{-2/3}h^{-1}(\Delta\sigma)^{-1/3}.$$

Ο συντελεστής $a_s \equiv 0,4$ στον ανωτέρω τύπο καθορίστηκε βάσει συγκρίσεων των δεδομένων από τον κατάλογο των σεισμών που έχουν σημειωθεί σε ολόκληρο τον πλανήτη.

Αυτός ο τύπος, που ο γράφων τον δημοσίευσε το 1996, όχι μόνο εξηγεί τη φύση του εκθέτη $0,66 \pm 0,03 \equiv 2/3$, αλλά αποκαλύπτει και τους παράγοντες που συντελούν στη δημιουργία των σεισμών. Για παράδειγμα, όσο πιο λεπτός είναι ο φλοιός τόσο μικρότερος γίνεται ο μέσος προσδοκώμενος χρόνος για σεισμούς δεδομένης έντασης. Αν $n \equiv 1$, διαρρηγύεται ολόκληρος ο φλοιός πάχους h . Αν $n \equiv 2/3$, σημειώνεται μόνο μερική διάρρηξη του φλοιού σε μια περιοχή εμβαδού S τέτοιου ώστε $S^{1/2} < h$. Άρα, οι σεισμοί στον λεπτό ωκεάνιο φλοιό ακολουθούν την κατανομή με $n \equiv 1$, ενώ οι κατά πολύ περισσότεροι σεισμοί που εκδηλώνονται στον παχύ φλοιό έχουν μια κατανομή η οποία περιγράφεται από την τιμή $n \equiv 2/3$. Στο νόμο ότι η εμφάνιση σεισμών εξαρτάται από την ένταση ως δυναμοσυνάρτηση, με εκθέτη που έχει περίου την τιμή 2/3, δόθηκε το όνομα των αμερικανών σεισμολόγων B. Gutenberg και C. Richter, οι οποίοι τον ανακάλυψαν το 1941.

Θα μπορούσαμε να εξετάσουμε και πολλά ακόμη παραδείγματα όπου εφαρμόζεται η διαστατική ανάλυση και η ανάλυση ομοιότητας, και να αναζητήσουμε αναλογίες σε γεγονότα που, από άποψη φύσεως, δεν έχουν σχέση μεταξύ τους. Άλλα σε ένα σύντομο άρθρο δεν μπορεί να χωρέσει ολόκληρο το σύμπαν! ◻

Για να περνά η ώρα

Σ176

Πέντε τη φορά. Ο Βασίλης τοποθέτησε 9 άδεια ποτήρια πάνω στο τραπέζι και ζήτησε από τον Γιάννη να τα αναποδογυρίσει· κάθε φορά επιτρεπόταν να γυρίζει 5 ποτήρια. Πόσες είναι οι δυνατόν λιγότερες κινήσεις;



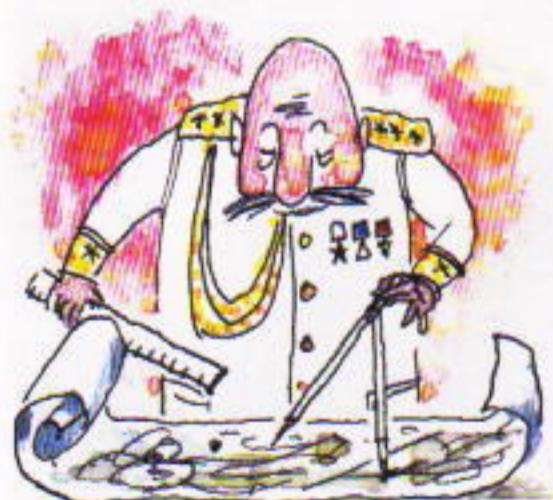
Σ177

Αποτυχημένες αντιστροφές. Αφού έλυσε το προηγούμενο πρόβλημα, ο Γιάννης προσπάθησε να το επαναλάβει, αναποδογυρίζοντας όμως 6 ποτήρια κάθε φορά. Ωστόσο δεν τα κατάφερε. Είναι δυνατόν;



Σ178

Τελειομανία. Μπορεί ένας αριθμός που αποτελείται από τριακόσιες μονάδες και κάποιο πλήθος μηδενικών να αποτελεί τέλειο τετράγωνο;



Σ179

Μια λιτή κατασκευή. Δίνονται ευθεία l και σημείο A επί ενός επιπέδου. Χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη, κατασκευάστε ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην l , χωρίς να σχεδιάστε περισσότερες από τρεις ευθείες και κύκλους (θεωρούμε τη ζητούμενη κάθετο ως την τελευταία ευθεία που θα σχεδιάσουμε). Θεωρήστε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το σημείο A ανήκει ή όχι στην ευθεία l .



Σ180

Παγωμένο πρόβλημα. Αφού το χιόνι λιώνει στους 0°C , γιατί το χειμώνα οι δρόμοι παραμένουν καλυμμένοι με χιόνι, παρόλο που η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη του μηδενός;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Carl Friedrich Gauss

«Τίποτα δεν μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρωμένο αν απομένει να γίνει έστω και το ελάχιστο.»

—C.F. Gauss

S. Gindikin

ME TON KAINOURGIO AIOMA, TA ENDIASFEROONTA TOU Gauss APOMAKRUNTHIKAN APÓ TA KAΘARÁ MAΘΗΜΑΤΙΚÁ. KATÁ KAIPROÚS EPÉSTREFE S' AUTÁ, EPITUGΧÁNONNTAS KÁTHΕ FORÁ THAUMÁSTA APOTELÉSMATA, ÁXIA MIAΣ MEΓALOΦUÍAS. TO 1812 DΗΜΟΙΕUSOE ÉNA ÉRGY GIÀ TΗN UPERGEOMETRÍKΗ SUNÁRTΗSÖ. H SUNÁRTΗSÖ AUTΗ EΞAPRTÁTAI APÓ TΡΕΙΣ PAPARAMEΤRÓUS. AN APODÓSSOUMÉ DIÁFORES TÍMÉS SE AUTÉS, PROKÚPTOUV POLLÉS APÓ TÍS SUNAPRTΗSÖIΣ POU EMFANÍZONTAI STI MAΘΗΜΑΤIKΗ FUSIKΗ. STON Gauss OFEGLOUMÉ ÉNA MEΓÁLO MÉROS TΗS GEΩMETRÍKΗS ERHMENÉIAS TON MIΓADIKWON ARITHMÓWN. H ERGYASÍA TOU STI GEΩMETRÍA THA PERIGRAFEI STI SUNÉΧEIA. PÁNTWÇ, TA MAΘΗΜΑΤIKÁ DĒN APETELÈSAN POTE PLÉON TΗN KÝRIA AOXOLÍA TOU. IDOU ÉNA ENDEIKTIKÓ STOIΧEÍO: TO 1801, O Gauss STAMÁTHTSE NA KRATÁ KANONIKÁ TO ΗMEROLOGÍO TOU, AN KAI MERIKÉS KATAΧWARHSEIΣ ÉGINAN ÉWOS KAI TO 1814. SPANÍWCS SUNEVIDHTOPOIIOÚME PÓSSO SÝNTOMΗ HTAN H «MAΘΗΜΑΤIKΗ ZWΗ» TOU Gauss —MIKROTERH APÓ 10 XRONÍA — KAI TO MEΓALÚTERO MÉROS TΗS ANALÓWTHIKE SE ERGYASÍEIS POU PARÉMEIVAN ÁGNWOSTECS STOUΣ SUGXHROPNUVS TOU (ELLEIPTIKÉS SUNAPRTΗSÖIΣ).

Τo πarón árthro apoteleí sunéchia tou o-mótítloou pou dñmoseiúthike sto proηgouymeno teúchos (sel. 22).



Ελάσσονες πλανήτες

Ας στραφούμε τώρα στο νέο πάθος του Gauss. Έχουν γίνει πολλές συζητήσεις για τους λόγους που τον οδήγησαν να μελετήσει την αστρονομία.

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι από την εποχή του Kepler, του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα, η αστρονομία αποτελούσε την εντυπωσιακότερη εφαρμογή των μαθηματικών. Η παράδοση αυτή συνεχίστηκε με τους Euler, d'Alembert, Clairaut, Lagrange και Laplace. Προβλέποντας και εξηγώντας τα ουράνια φαινόμενα, οι μαθηματικοί αισθάνθηκαν ότι ανακάλυπταν τα μυστικά του σύμπαντος. Ο Gauss, που ενδιαφερόταν για τους πρακτικούς υπολογισμούς, ήταν αδύνατο να μη δοκιμάσει τη δύναμη του σε αυτό το παραδοσιακό πεδίο.

Ωστόσο, υπήρχαν και άλλοι, τελείως πρακτικοί λόγοι. Ο Gauss είχε αποκτήσει τον τυπικό τίτλο που του έδινε το δικαίωμα αυτοδύναμης πανεπιστημιακής διδασκαλίας (privat-docent) στο Μπρούνσβικ, αλλά ο μισθός ήταν μόλις 6 τάλερ (ασημένια γερμανικά τάλιρα) το μήνα. Το επίδομα των 400 τάλερ από τον Δούκα δεν βελτίωνε ουσιαστικά τις υλικές του απολαβές ώστε να αντεπεξέλθει στα έξοδα που απαιτούνται για να στηρίξει μια οικογένεια —και ο Gauss σκεφτόταν να παντρευτεί. Ήταν δύσκολο να βρει καθηγητική έδρα στα μαθηματικά, και επιπλέον η διδασκαλία δεν του άρεσε. Το αυξανόμενο πλήθος των αστεροσκοπείων, όμως, έκανε δυνατή μια σταδιοδρομία αστρονόμου.

Ο Gauss άρχισε να μελετά αστρονομία όσο ήταν ακόμα στο Γκαίττινγκεν. Μερικές παρατηρήσεις έγιναν στο Μπρούνσβικ —χρησιμοποίησε μάλιστα ένα μέρος του επιδόματος του Δούκα για να αγοράσει έναν εξάντα. Εν τω μεταξύ, ο Gauss αναζητούσε ένα σημαντικό υπολογιστικό πρόβλημα όσο ασχολούνταν με την επίλυση μικρότερων προβλημάτων. Για παράδειγμα, δημοσίευσε μια απλή μέθοδο υπολογισμού της ημερομηνίας του Πάσχα και άλλων κινούμενων εορτών (εκείνη την εποχή,

οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν γι' αυτό το σκοπό ήταν εξαιρετικά πολύπλοκες). Το 1801, κάτω από τις περιστάσεις που περιγράφουμε στη συνέχεια, βρέθηκε η ευκαιρία για ένα αξιόλογο πρόβλημα.

Την 1 Ιανουαρίου του 1801, ο αστρονόμος Piazzi, ο οποίος κατάρτιζε έναν αστρονομικό κατάλογο, ανακάλυψε έναν άγνωστο αστέρα ογδού μεγέθους. Τον παρατήρησε επί 40 ημέρες και μετά ενημέρωσε γνωστούς αστρονόμους ζητώντας τους να συνεχίσουν τις παρατηρήσεις. Για διάφορους λόγους, το αίτημά του δεν ικανοποιήθηκε. Τον Ιούνιο, η πληροφορία αυτή έφτασε στον Zach, ο οποίος δημοσίευε το μοναδικό αστρονομικό περιοδικό της εποχής. Ο Zach υπέθεσε ότι αυτός ήταν ο πλανήτης που υποπτεύονταν ότι υπήρχε μεταξύ Άρη και Δία. Η υπόθεση του Zach φαινόταν εξαιρετικά πιθανή και ο «χαμένος» πλανήτης έπρεπε να βρεθεί γρήγορα. Προς τούτο, έπρεπε να υπολογιστεί η τροχιά του. Ο υπολογισμός, όμως, μιας ελλειπτικής τροχιάς, γνωρίζοντας όλο κι όλο το τόξο των 9 μοιρών που είχε παρατηρήσει ο Piazzi, υπερέβαινε τις δυνατότητες των αστρονόμων. Τον Σεπτέμβριο του 1801, ο Gauss εγκατέλειψε όλες τις εκκρεμείς υποθέσεις του και άρχισε τους υπολογισμούς. Τους ολοκλήρωσε τον Νοέμβριο, και τα αποτελέσματα δημοσιεύθηκαν στο περιοδικό του Zach, στο τεύχος Δεκεμβρίου. Τη νύχτα μεταξύ 31ης Δεκεμβρίου και 1ης Ιανουαρίου —έναν χρόνο ακριβώς μετά τις παρατηρήσεις του Piazzi— ο διάσημος γερμανός αστρονόμος Olbers εντόπισε τον πλανήτη βάσει αυτών των υπολογισμών. Ο νέος πλανήτης ονομάστηκε Δήμητρα. Η ανακάλυψη αυτή προκάλεσε μεγάλη αίσθηση.

Στις 25 Μαρτίου του 1802, ο Olbers ανακάλυψε έναν ακόμα πλανήτη, την Παλλάδα. Ο Gauss υπολόγισε γρήγορα την τροχιά του και απέδειξε ότι και αυτή βρισκόταν μεταξύ του Άρη και του Δία. Η αποτελεσματικότητα της υπολογιστικής μεθόδου του Gauss ήταν πλέον εμφανής.

Ο Gauss, λοιπόν, κέρδισε την αναγνώριση. Μια ένδειξη της αναγνώρισης αυτής ήταν η εκλογή του ως α-

ντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης. Σύντομα του έγινε η πρόταση να αναλάβει τη θέση του Διευθυντή στο αστεροσκοπείο της ίδιας πόλης. Ο Gauss έγραψε ότι τον κολάκεψε η πρόσκληση από την πόλη όπου είχε εργαστεί ο Euler και ότι σκεφτόταν σοβαρά να αποδεχθεί την προσφορά. Στα γράμματά του ανέφερε ότι ο καιρός στην Αγία Πετρούπολη ήταν συχνά άσχημος και, συνεπώς, θα είχε διαθέσιμο χρόνο και για τις δικές του μελέτες, πέρα από τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Έγραψε επίσης ότι τα 1.000 ρούβλια που του προσέφεραν ήταν περισσότερα από τα 400 τάλερ που κέρδιζε στο Μπρούνσβικ, αλλά ότι το κόστος διαβίωσης στην Αγία Πετρούπολη ήταν μεγαλύτερο.

Την ίδια εποχή, ο Olbers προσπαθούσε να κρατήσει τον Gauss στη Γερμανία. Ήδη από το 1802, ο Olbers είχε ζητήσει από τον πρύτανη του Πανεπιστημίου του Γκαίττινγκεν να καλέσει τον Gauss για να αναλάβει τη θέση του διευθυντή στο αστεροσκοπείο που μόλις είχε ιδρυθεί —του υπέδειξε μάλιστα ότι ο Gauss αισθανόταν αποστροφή για την έδρα των μαθηματικών. Ο Gauss συμφώνησε, αλλά μετακόμισε στο Γκαίττινγκεν μόλις στο τέλος του 1807· στο διάστημα που μεσολάβησε, παντρεύτηκε. Το 1806, ο Δούκας πέθανε. Ο Gauss ήταν αληθινά συνδεδεμένος μαζί του· τώρα πλέον τίποτα δεν τον κρατούσε στο Μπρούνσβικ.

Η ζωή στο Γκαίττινγκεν δεν ήταν εύκολη για τον Gauss. Το 1809, μετά τη γέννηση ενός γιου, η γυναίκα του πέθανε, και ύστερα από λίγο καιρό πέθανε και το παιδί του. Την ίδια εποχή, ο Ναπολέων επέβαλε βαρύτατο φόρο υποτελείας στο Γκαίττινγκεν. Ο ίδιος ο Gauss ήταν υποχρεωμένος να πληρώσει επιπλέον φόρο 2.000 φράγκων. Ο Olbers και ο Laplace θέλησαν να πληρώσουν αυτοί τον φόρο του, αλλά ο Gauss αρνήθηκε από υπερηφάνεια. Τελικά όμως, ένας άλλος ανώνυμος δωρητής πλήρωσε το φόρο, και έτσι δεν γνώριζε κάποιον ώστε να του επιστρέψει το χρέος (αργότερα έγινε γνωστό ότι δωρητής ήταν ο Εκλέκτωρ του Μά-

ιντς, ένας φίλος του Γκαίτε)*. Ανάμεσα σε παρατηρήσεις για τις ελλειπτικές συναρτήσεις, ο Gauss έγραψε ότι ο θάνατος ήταν προτιμότερος από μια τέ- τοια ζωή. Οι άνθρωποι δεν εκτιμούσαν το έργο του και τον θεωρούσαν, στην καλύτερη των περιπτώσεων, εκκεντρικό. Ο Olbers προσπαθούσε να τον παρηγορήσει, υποστηρίζοντας ότι δεν πρέπει να περιμένουμε κατανόηση από τους ανθρώπους αλλά να τους λυπούμαστε και να τους υπηρετούμε.

Το 1809 δημοσιεύτηκε η διάσημη *Theoria Motus Corporum Coelestium* (Θεωρία της κίνησης των ουρανίων σωμάτων που περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο κατά κωνικές τομές). Το βιβλίο αυτό είχε ολοκληρωθεί ήδη από το 1807. Η καθυστέρηση οφειλόταν εν μέρει στο ότι ο εκδότης πίστευε πως το βιβλίο δεν θα είχε καμία ζήτηση στα γερμανικά, ενώ ο Gauss ήρνείτο —για πατριωτικούς λόγους— να δημοσιευθεί το έργο του στα γαλλικά. Συμβιβάστηκαν να εκδοθεί στα λατινικά. Υπήρξε το μοναδικό έργο του Gauss περί αστρονομίας (εκτός από αυτό το βιβλίο, δημοσίευσε και αρκετά άρθρα).

Στο *Theoria*, ο Gauss παρουσιάζει τη μέθοδο του για τον υπολογισμό τροχιών. Για να δείξει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου του, επανέλαβε τον υπολογισμό της τροχιάς του κομήτη του 1769, υπολογισμό που είχε πετύχει νωρίτερα ο Euler. Ο Euler χρειάστηκε τρεις μέρες έντονων προσπαθειών για να ολοκληρώσει αυτή την εργασία, και το αποτέλεσμα ήταν να καταστρέψει την δρασή του. Ο Gauss υπολόγισε την τροχιά μέσα σε μία ώρα. Μεταξύ άλλων, στο βιβλίο παρουσιάζεται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία παραμένει μία από τις πλέον διαδεδομένες μεθόδους ανάλυσης παρατηρήσεων. Ο Gauss υποστήριξε ότι γνώριζε αυτή τη μέθοδο από το 1794, και ότι τη χρησιμοποιούσε συστηματικά από το 1802. (Η μέθοδος

των ελαχίστων τετραγώνων δημοσιεύθηκε από τον Legendre δύο χρόνια πριν το *Theoria Motus Corporum Coelestium*.)

Το 1810, στον Gauss απονεμήθηκαν πολλές διακρίσεις: το βραβείο της Ακαδημίας Επιστημών των Παρισίων, το χρυσό μετάλλιο της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου, και επιπλέον εκλέχτηκε μέλος πολλών ακαδημιών.

Το 1804, η Ακαδημία Επιστημών των Παρισίων επέλεξε ως θέμα για το μεγάλο βραβείο (ένα χρυσό μετάλλιο βάρους ενός κιλού) τη θεωρία των διαταραχών της Παλλάδος. Δόθηκε δύο φορές αναβολή στην καταληκτική ημερομηνία (τελικά, ορίστηκε το 1816) προκειμένου ο Gauss να μπορέσει να παρουσιάσει την εργασία του. Παρόλο που τον βοήθησε ο φοιτητής του Nicolai («ένας νέος, ακούραστος στους υπολογισμούς»), οι υπολογισμοί δεν ολοκληρώθηκαν λόγω της κατάθλιψης στην οποία είχε περιπέσει ο Gauss.

Ο Gauss συνέχισε σταθερά τις αστρονομικές του μελέτες, σχεδόν μέχρι τον θάνατό του. Η παρατήρηση του διάσημου κομήτη του 1812 (που «προϊώνισε» την πυρκαγιά της Μόσχας) έγινε βάσει των υπολογισμών του. Στις 28 Αυγούστου, ακόμη, παρατήρησε μιαν έκλειψη. Ο Gauss είχε πολλούς σπουδαστές αστρονόμους (Schumacher, Herling, Nicolai και Struve). Οι εξέχοντες γερμανοί γεωμέτρες Möbius και Staudt δεν σπούδασαν γεωμετρία με τον Gauss αλλά αστρονομία. Ο Gauss αλληλογραφούσε επίσης με πολλούς αστρονόμους, διάβαζε άρθρα και βιβλία περί αστρονομίας και έγραφε επισκοπήσεις. Πολλά για τις μαθηματικές μελέτες του τα μαθαίνουμε από την αλληλογραφία του με αστρονόμους. Η εικόνα του Gauss ως αστρονόμου ήταν τελείως διαφορετική από αυτή του απροσέλαστου ερημίτη, εικόνα πολύ συχνή για τους μαθηματικούς εκείνης της εποχής.

Γεωδαισία

Το 1820, το ενδιαφέρον του Gauss στράφηκε στη γεωδαισία. Από τις αρχές ήδη του αιώνα είχε προσπαθήσει να ορίσει ένα πρότυπο για τις μετρή-

σεις του μήκους (το μέτρο) μέσω της μέτρησης ενός τόξου μεσημβρινού που είχαν επιτύχει γάλλοι γεωδαιτές. Σκόπευε να το χρησιμοποιήσει για να υπολογίσει την πλάτυνση της Γης κοντά στους πόλους. Όμως, το τόξο αποδείχτηκε εξαιρετικά μικρό. Ο Gauss ήλπιζε να μετρήσει ένα αρκετά μεγάλο τόξο μεσημβρινού, αλλά μόλις το 1820 κατάφερε να ξεκινήσει αυτό το έργο. Παρόλο που οι μετρήσεις του κράτησαν δύο δεκαετίες, δεν μπόρεσε να υλοποιήσει πλήρως την ιδέα του. Οι έρευνες για την ανάλυση των παρατηρήσεων που συνδέονταν με τη γεωδαισία είχαν εξαιρετική σημασία (οι κύριες δημοσιεύσεις του για τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χρονολογούνται από εκείνη την περίοδο). Διάφορα γεωμετρικά αποτελέσματα προέκυψαν εξαιτίας της ανάγκης να εκτελεστούν μετρήσεις πάνω στην επφάνεια ενός ελλειψοειδούς.

Το 1820, τέθηκε το θέμα της μετακίνησής του στο Βερολίνο, όπου ο Gauss θα αναλάμβανε τη διεύθυνση ενός ίνστιτούτου. Σε αυτό θα εκαλούντο οι σημαντικότεροι νέοι μαθηματικοί της εποχής, ανάμεσά τους ο Abel και Jacobi. Οι διαπραγματεύσεις κράτησαν τέσσερα χρόνια —οι διαφωνίες αφορούσαν το αν θα έδινε διαλέξεις ο Gauss καθώς και το ύψος της αμοιβής του (1.200 ή 2.000 τάλερ το χρόνο). Οι διαπραγματεύσεις δεν είχαν ευτυχή κατάληξη. Όμως, δεν πήγαν όλα χαμένα —ο μισθός του Gauss στο Γκαίττινγκεν αυξήθηκε στο ποσό που υποτίθεται πως θα εισέπραττε στο Βερολίνο.

Εσωτερική γεωμετρία των επιφανειών

Εξαιτίας της γεωδαισίας, τα μαθηματικά έγιναν και πάλι η κύρια ασχολία του Gauss για ένα σύντομο χρονικό διάστημα. Το 1816, εξέτασε μια γενίκευση του κύριου προβλήματος της χαρτογραφίας —την απεικόνιση μιας επιφάνειας σε μία άλλη έτσι ώστε η εικόνα να είναι όμοια με το πρωτότυπο και στην παραμικρή λεπτομέρεια. Ο Gauss συμβούλεψε τον Schumacher να επιλέξει αυτό το θέμα για έναν διαγωνισμό της Επιστημονικής Εταιρείας της Κοπεγχά-

* Στη Γερμανία, από το 10ο ως το 19ο αιώνα, ο Εκλέκτωρ ήταν τίτλος εξέχοντος πολίτη, ο οποίος επέλεγε τον αυτοκράτορα μιας περιοχής. (Σ.τ.ε.)

γης. Ο διαγωνισμός ανακοινώθηκε το 1822. Το ίδιο έτος, ο Gauss παρουσίασε ένα μνημόνιο στο οποίο εισήγαγε χαρακτηριστικά που επέτρεψαν την πλήρη λύση του προβλήματος, ειδικές περιπτώσεις του οποίου είχαν αναλύσει οι Euler και Lagrange (την απεικόνιση μιας σφαίρας ή μιας επιφάνειας εκ περιστροφής στο επίπεδο). Ο Gauss έδωσε λεπτομερή περιγραφή των συμπερασμάτων της θεωρίας του για πολυάριθμες ειδικές περιπτώσεις, μερικές από τις οποίες προέκυψαν στη γεωδαισία.

Το 1828, ο Gauss δημοσίευσε το βασικό του μνημόνιο για τη γεωμετρία με τίτλο *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Γενικές μελέτες καμπύλων επιφανειών). Ήταν αφιερωμένο στην εσωτερική γεωμετρία μιας σφαίρας, δηλαδή σε καθετί που σχετίζεται με την ίδια την επιφάνεια και όχι με τη θέση της στο χώρο.

Σε γενικές γραμμές, η εσωτερική γεωμετρία μιας σφαίρας περιγράφει τις ιδιότητες που μπορούμε να ανακαλύψουμε όταν «παραμένουμε στην επιφάνεια». Είναι δυνατόν να μετρήσουμε αποστάσεις σε επιφάνειες απλώνοντας μια κλωστή με τρόπο που να παραμένει εξ ολοκλήρου πάνω στην επιφάνεια. Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται γεωδαισιακά τόξα (και είναι ανάλογες των ευθειών του επιπέδου). Μπορούμε να αναλύσουμε τις γωνίες μεταξύ των γεωδαισιακών και να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γεωδαισιακών τριγώνων και πολυγώνων. Αν στρεβλώσουμε μια επιφάνεια (που τη φανταζόμαστε ως μια λεπτή ταινία που δεν τεντώνεται ούτε σκίζεται), οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων παραμένουν αμετάβλητες: οι γεωδαισιακές παραμένουν γεωδαισιακές, και ούτω καθεξής.

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανακαλύψουμε αν μια επιφάνεια είναι καμπύλη ή όχι χωρίς να χρειαστεί να την εγκαταλείψουμε. Μια «πραγματικά καμπύλη» επιφάνεια δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε επίπεδο. Ο Gauss εισήγαγε ένα αριθμητικό μέτρο της καμπυλότητας μιας επιφάνειας.

Ας θεωρήσουμε μια γειτονιά ενός σημείου A με εμβαδόν ε . Θεωρούμε κάθετες πάνω στην επιφάνεια, μονα-

διάίου μήκους, σε κάθε σημείο της γειτονιάς. Στην περίπτωση του επιπέδου, όλες αυτές οι κάθετες είναι παράλληλες μεταξύ τους, ενώ στην περίπτωση της καμπύλης επιφάνειας, αποκλίνουν. Μετατοπίζουμε παράλληλα όλες τις καθέτους έτσι ώστε να ξεκινούν από το ίδιο σημείο. Τότε, τα άκρα τους θα συμπληρώνουν μια περιοχή της μοναδιαίας σφαίρας. Έστω $\varphi(\varepsilon)$ το (προσανατολισμένο) εμβαδόν αυτής της περιοχής. Τότε το

$$k(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

είναι μέτρο της καμπυλότητας της επιφάνειας στο σημείο A . Αποδεικνύεται ότι η $k(A)$ παραμένει ίδια όπως και αν στρεβλώσουμε την επιφάνεια. Ένα τμήμα μιας επιφάνειας μπορεί να αναπτυχθεί σε επίπεδο αν και μόνο αν $k(A) = 0$ για όλα τα σημεία της. Το μέτρο της καμπυλότητας συνδέεται με το άθροισμα των γωνιών ενός γεωδαισιακού τριγώνου.

Ο Gauss μελέτησε επιφάνειες σταθερής καμπυλότητας. Η σφαίρα αποτελεί επιφάνεια σταθερής θετικής καμπυλότητας (για όλα τα σημεία της $k(A) = 1/R$, όπου R είναι η ακτίνα της). Στις πρόχειρες σημειώσεις του, ο Gauss ανέφερε μια επιφάνεια με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Αργότερα, αυτή η επιφάνεια ονομάστηκε ψευδοσφαίρα, και ο Beltrami απέδειξε ότι η εσωτερική γεωμετρία της ήταν η γεωμετρία του Lobachevsky.

Μη ευκλείδεια γεωμετρία

Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Gauss είχε ενδιαφερθεί για το αίτημα των παραλλήλων ήδη από το 1792. Στο Γκαϊττινγκεν συζητούσε συχνά αυτό το πρόβλημα με τον Farkas Bolyai, έναν φοιτητή από την Ουγγαρία. Γνωρίζουμε από μια επιστολή του Gauss προς τον Bolyai, το 1799, ότι είχε σαφώς συνειδητοποιήσει πως υπήρχαν αναριθμητές προτάσεις που συνεπάγονταν το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Ο Gauss έγραψε: «Έχω σε μεγάλο βαθμό επιτύχει αυτό που η πλειονότητα θα θεωρούσε απόδειξη.» Και συνεχίζει: «Όμως, ο δρόμος που έχω επιλέξει δεν οδηγεί στον επιθυμητό προορισμό, αλλά στην αμφιβολία για την αλήθεια της γεωμετρίας.»

Από αυτό το σημείο μέχρι να συνειδητοποιήσει τη δυνατότητα κατασκευής μιας μη ευκλείδειας γεωμετρίας, ο Gauss χρειαζόταν ένα μόνο βήμα. Όμως αυτό το βήμα δεν έγινε —αν και συχνά η παραπάνω φράση θεωρείται ως ένδειξη ότι ο Gauss είχε καταλήξει στη μη ευκλείδεια γεωμετρία ήδη από το 1799.

Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τις επόμενες λέξεις του Gauss. Έγραψε ότι δεν μπορούσε να αφιερώσει αρκετό χρόνο σε αυτό το πρόβλημα. Πρέπει να επισημάνουμε ότι το πρόβλημα των παραλλήλων δεν αναφέρεται στο ημερολόγιό του. Προφανώς, δεν βρέθηκε ποτέ στο επίκεντρο του ενδιαφέροντός του. Το 1804, ο Gauss αμφισβήτησε τις προσπάθειες του Bolyai να αποδείξει το αίτημα των παραλλήλων. Η επιστολή του έκλεινε ως εξής: «Όμως, εξακολουθώ να ελπίζω ότι κάποια σπιγμή, ίσως και πριν το θάνατό μου, αυτά τα εμπόδια θα υπερνικηθούν.» Αυτές οι λέξεις αποτελούν ένδειξη ότι ο Gauss ήλπιζε πως θα μπορούσε να βρεθεί μια απόδειξη.

Ιδού μερικές ακόμη ενδείξεις. «Δεν έχουμε ακόμα ξεπεράσει τον Ευκλείδη στη θεωρία των παραλλήλων. Αυτό είναι ένα δυσάρεστο κομμάτι των μαθηματικών που, αργά ή γρήγορα, πρέπει να πάρει άλλη μορφή» (1813). «Δεν έχουμε ακόμη προχωρήσει πέραν του σημείου που έφτασε ο Ευκλείδης πριν από 2.000 χρόνια» (1816). Όμως, την ίδια χρονιά ο Gauss έγραψε για «ένα χάσμα που δεν μπορεί να συμπληρωθεί», και το 1817, σε μια επιστολή προς τον Olbers, αναφέρει «η πεποίθησή μου ότι η “αναγκαιότητα” της γεωμετρίας μας δεν μπορεί να αποδειχθεί, τουλάχιστον από την ανθρώπινη νόηση και για την ανθρώπινη νόηση, γίνεται όλο και πιο ισχυρή. Μπορεί σε μια άλλη ζωή να καταλήγαμε σε διαφορετική αντιληφή της φύσης του χώρου, όμως τώρα αυτή η άποψη βρίσκεται πέραν της κατανόησής μας. Έως εκείνη τη σπιγμή, θα πρέπει να κατατάσσουμε τη γεωμετρία μαζί με τη μηχανική και όχι με την αριθμητική, η οποία είναι μια καθαρά a priori επιστήμη».

Την ίδια περίου εποχή, παρόμοιες σκέψεις για το αδύνατο της από-

δειξης του πέμπτου αιτήματος διατύπωσε ο Schweikart, ένας νομικός από το Καίνιγκσμπεργκ. Αυτός υπέθετε ότι παράλληλα με την ευκλείδεια γεωμετρία υπήρχε μια «αστρική γεωμετρία», για την οποία δεν ίσχυε το πέμπτο αίτημα. Ο Herling, μαθητής του Gauss που εργαζόταν στο Καίνιγκσμπεργκ, έγραψε στον Gauss για τον Schweikart και του έστειλε τις σημειώσεις του. Ο Gauss απάντησε: «Μοιάζουν σαν να τα έχει αντιγράψει όλα μέσα απ' την καρδιά μου.» Η εργασία του Schweikart συνεχίστηκε από τον ανιψιό του, τον Taurinus, ο οποίος άρχισε να αλληλογραφεί με τον Gauss από το 1824.

Στα γράμματά του, ο Gauss τόνιζε ότι οι απόψεις του είχαν καθαρά εμπιστευτικό χαρακτήρα και δεν θα έπρεπε σε καμία περίπτωση να δημοσιοποιηθούν. Δεν πίστευε ότι οι απόψεις του μπορούσαν να γίνουν κατανοητές και φοβόταν να προκαλέσει την προσοχή ενός πλήθους ερασιτεχνών. Ο Gauss είχε ζήσει δύσκολα χρόνια, και εκτιμούσε ιδιαίτερα την ευκαιρία που είχε να εργάζεται με ηρεμία. Προειδοποίησε τον Herling, που απλώς ήθελε να αναφέρει ότι το πέμπτο αίτημα μπορεί να είναι εσφαλμένο: «Οι σφήκες, τη φωλιά των οποίων πρόκειται να καταστρέψεις, θα πετάξουν γύρω από το κεφάλι σου.» Ο Gauss κατέληξε σταδιακά στο συμπέρασμα ότι πρέπει να καταγράφει τα αποτελέσματά του αλλά να μην τα δημοσιεύει. Έγραψε: «Φαίνεται όπως θα απαιτηθεί μεγάλο διάστημα για να προετοιμάσω προς δημοσίευση τις εκτεταμένες μου μελέτες πάνω σε αυτό το ερώτημα. Και είναι πολύ πιθανό να αποφασίσω να μην τις δημοσιεύω, διότι φοβούμαι τις κραυγές των Βοιωτών¹ που θα ακουντούν μόλις δημοσιοποιήσω όλες τις απόψεις μου» (επιστολή προς τον Bessel, 1829). Τον Μάιο του 1831, ο Gauss άρχισε μια συστηματική περιγραφή των μελετών του. «Επί πολλές εβδομάδες καταγράφω τα αποτελέσματα των εργα-

σιών μου σε αυτό το θέμα. Τούτη η εργασία έχει γίνει εν μέρει πριν 40 χρόνια, ποτέ όμως δεν είχε γραφτεί στο χαρτί. Έτσι, ήμουν υποχρεωμένος να ανακατασκευάσω όλη τη συλλογιστική τρεις ή τέσσερις φορές· δεν θα ήθελα όμως το έργο μου να πεθάνει μαζί με εμένα» (επιστολή προς τον Schumacher).

Οστόσο, το 1832, ο Gauss έλαβε από τον Farkas Bolyai ένα σύντομο άρθρο του γιου του Janos, με τίτλο «Παράρτημα» (ο τίτλος εξηγείται από το γεγονός ότι το άρθρο δημοσιεύθηκε ως παράρτημα σε ένα μεγάλο βιβλίο του πατέρα Bolyai). «Ο γιος μου εκτιμά την γνώμη σας περισσότερο από τη γνώμη ολόκληρης της Ευρώπης». Το περιεχόμενο του άρθρου εντυπωσίασε τον Gauss: παρουσίαζε με πλήρη και συστηματική μορφή την κατασκευή μιας μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Το άρθρο αυτό ήταν τελείως διαφορετικό από τις αποσπασματικές παρατηρήσεις και εικασίες των Schweikart και Taurinus. Ο ίδιος ο Gauss επρόκειτο να παρουσίασει ένα τέτοιο περίγραμμα της θεωρίας στο άμεσο μέλλον. Έγραψε στον Herling: «Βρήκα όλες τις ιδέες και τα αποτελέσματά μου να παρουσιάζονται με εξαιρετική κομψότητα, αν και σε πολύ συμπυκνωμένη μορφή που τις κάνει δυσνόητες σε όποιον δεν έχει εργαστεί σε αυτό το πεδίο... Νομίζω όπως ο νεαρός γεωμέτρης Bolyai είναι μια ιδιοφυΐα.» Ιδού τι έγραψε στον πατέρα του: «... όλο το περιεχόμενο αυτής της εργασίας, ο τρόπος που την αντιμετώπισε ο γιος σας και τα αποτελέσματα που πέτυχε είναι σχεδόν όμοια με τα δικά μου, στα οποία κατέληξα εν μέρει πριν από 30 ή 35 χρόνια. Έχω μείνει κατάπληκτος. Έχω καταγράψει μερικά από τα αποτελέσματά μου, δεν οκόπενα όμως να τα δημοσιεύω στη διάρκεια της ζωής μου: απλώς δεν ήθελα να χαθούν αυτά τα αποτελέσματα μετά το θάνατό μου. Γι' αυτό το λόγο είμαι συγκλονισμένος από το γεγονός — με απελευθερώνει από αυτό το έργο. Είμαι επίσης ευτυχής που ανέλαβε το έργο μου ο γιος του παλιού μου φίλου.» Ωστόσο, ο Gauss δεν υποστήριξε δημόσια τον Janos Bolyai. Φαίνεται ότι ταυτόχρονα ο Gauss σταμάτησε τις τακτικές σημειώσεις

του πάνω στην μη ευκλείδεια γεωμετρία, αν και αποσπασματικές καταγραφές υπάρχουν ακόμη και στα μέσα της δεκαετίας του 1840.

Το 1841, ο Gauss διάβασε τη γερμανική έκδοση της εργασίας του Lobachevsky (η πρώτη έκδοσή της χρονολογείται το 1829). Όπως συνήθως, ο Gauss ενδιαφέρθηκε για άλλα έργα αυτού του συγγραφέα, αλλά εξέφρασε την άποψή του μόνο στην αλληλογραφία του με στενούς φίλους. Όμως, το 1842, ο Gauss συνέστησε να εκλεγεί ο Lobachevsky αντεπιστέλλον μέλος της Βασιλικής Επιτημονικής Εταιρείας του Γκαίττινγκεν ως «ένας από τους καλύτερους μαθηματικούς του ρωσικού έθνους». Ο ίδιος ο Gauss ενημέρωσε τον Lobachevsky για την εκλογή του, όμως ούτε στην πρόταση ούτε στο δίπλωμα που δόθηκε στον Lobachevsky δεν υπήρχε κάποια αναφορά στη μη ευκλείδεια γεωμετρία.

Οι εργασίες του Gauss στη μη ευκλείδεια γεωμετρία έγιναν γνωστές μόνο με τη δημοσίευση του αρχείου του μετά το θάνατό του. Έτσι, αρνούμενος να δημοσιεύσει τη μεγάλη του ανακάλυψη, ο Gauss προσέφερε στον εαυτό του τη δυνατότητα να εργαστεί με ηρεμία. Το γεγονός δρομολόγησε ατελείωτες συζητήσεις για το κατά πόσον είναι αποδεκτή μια τέτοια στάση.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι ο Gauss δεν ενδιαφερόταν μόνο για το καθαρά λογικό ερώτημα περί της δυνατότητας απόδειξης του πέμπτου αιτήματος. Προσπάθησε επίσης να εξασφαλίσει για τη γεωμετρία μια θέση ανάμεσα στις φυσικές επιστήμες καθώς και να απαντήσει στο ερώτημα για την αληθή γεωμετρία του φυσικού κόσμου (δείτε τη γνώμη του το 1817, παραπάνω). Συζητούσε τη δυνατότητα μιας αστρονομικής επαλήθευσης, και τον ενδιέφεραν οι ίδεες του Lobachevsky γι' αυτό το ζήτημα. Κατά τη διάρκεια των γεωδαισιακών του εργασιών, δεν αντιστάθηκε στον πειρασμό να μετρήσει το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου που σχηματίζουν οι κορυφές τριών βουνών: Χοενχάγκεν, Μπρόκεν και Ίνσλιμπεργκ. Η απόκλιση από το 2π δεν υπερέβαινε τα $0,2'$.

1. Η λέξη «Βοιωτός», εκτός από την τρέχουσα σημασία της, στην αρχαιοελληνική γλώσσα είχε τη μεταφορική σημασία «αμβλύνους, αγροίκος», και την οποία υπαινίσσεται ο Gauss.

Ηλεκτροδυναμική και γεωμαγνητισμός

Με το τέλος της δεκαετίας του 1820, ο Gauss, που ήταν ήδη πάνω από 50 ετών, άρχισε να αναζητά νέα πεδία έρευνας. Αυτό γίνεται φανερό σε δύο άρθρα, του 1829 και του 1830. Το πρώτο από αυτά ήταν αφιερωμένο σε γενικές αρχές της μηχανικής (την αρχή του ελάχιστου δεσμού) και το δεύτερο στα τριχοειδή φαινόμενα. Ο Gauss είχε αποφασίσει να μελετήσει φυσική, αλλά δεν είχε ακόμη συγκεκριμένοποιήσει τα ενδιαφέροντά του. Το 1831 προσπάθησε να μελετήσει κρυσταλλογραφία. Αυτή ήταν μια πολύ δύσκολη χρονιά για τον Gauss: η δεύτερη σύζυγός του πέθανε και ο ίδιος άρχισε να υποφέρει από αύπνιξες. Το ίδιο έτος, έπειτα από πρόσκληση του Gauss, ήρθε στο Γκαίττινγκεν ο εικοσιεπτάχρονος φυσικός Wilhelm Weber. Ο Gauss τον είχε γνωρίσει το 1828, στο σπίτι του Humboldt. Παρόλο που ο Gauss, ηλικίας τότε 54 ετών, ήταν ένας πολύ κλειστός άνθρωπος, βρήκε στον Weber έναν τέτοιο σύντροφο για να συνεργαστεί ερευνητικά που ουδέποτε είχε ξανασυναντήσει στο παρελθόν.

Ο Klein έγραψε ότι «η εσωτερική διαφορά αυτών των δύο ανθρώπων εκδηλωνόταν ακόμη και στην εξωτερική τους εμφάνιση. Ο Gauss ήταν σωματώδης άντρας, γνήσιος εκπρόσωπος της Κάτω Σαξονίας, ολιγόλογος και επιφυλακτικός. Ο μικρόσωμος, εύχαρις και ζωντανός Weber ήταν το εντελώς αντίθετο πολύ ομιλητικός και φιλικός, το άλλο άκρο του γνήσιου Σάξονα, αν και η καταγωγή του ήταν από τη Βιτεμβέργη, τη χώρα των "αληθινών Σαξόνων". Το μνημείο των Gauss και Weber στο Γκαίττινγκεν απαλύνει αυτές τις διαφορές: ακόμη και στο ύψος, μοιάζουν περισσότερο απ' όσο στην πραγματικότητα.»

Ο Gauss και ο Weber ενδιαφέρονταν για την ηλεκτροδυναμική και το γεωμαγνητισμό. Η δραστηριότητά τους δεν αφορούσε μόνο τη θεωρία αλλά είχε και πρακτικά αποτελέσματα. Το 1833 επινόησαν τον ηλεκτρομαγνητικό τηλέγραφο (το γεγονός αυτό αποθανατίζεται στο μνημείο

τους). Ο πρώτος τηλέγραφος συνέδεε το αστεροσκοπείο και το ινστιτούτο φυσικής. Όμως δεν κατάφεραν να εφαρμόσουν τη χρήση της συσκευής σε μεγάλη κλίμακα, για λόγους οικονομικούς.

Κατά τη μελέτη του μαγνητισμού, ο Gauss κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα συστήματα φυσικών μονάδων πρέπει να δομούνται βάσει μερικών ανεξάρτητων μονάδων, και όλες οι άλλες μονάδες πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει των βασικών.

Η μελέτη του γήινου μαγνητισμού βασίστηκε σε παρατηρήσεις από το μαγνητικό παρατηρητήριο του Γκαίττινγκεν και σε δεδομένα που συνέλεξε σε διάφορες χώρες η «Ενωση για την παρατήρηση του γήινου μαγνητισμού», την οποία είχε ιδρύσει ο Humboldt όταν επέστρεψε από τη Νότιο Αμερική. Την ίδια εποχή, ο Gauss δημιούργησε έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της μαθηματικής φυσικής —τη θεωρία δυναμικού.

Η κοινή εργασία των Gauss και Weber διεκόπη το 1843, όταν ο Weber εκδιώχθηκε από το Γκαίττινγκεν μαζί με άλλους εξι καθηγητές επειδή υπέγραψε μια επιστολή προς τον Κάιζερ, όπου επισημαίνονταν οι παραβιάσεις του συντάγματος από τον ίδιο (ο Gauss δεν είχε υπογράψει αυτή την επιστολή). Ο Weber επέστρεψε στο Γκαίττινγκεν μόλις το 1849, όταν ο Gauss ήταν ήδη 72 ετών.

Ολοκληρώνουμε την ιστορία μας με τις επόμενες λέξεις του Klein: «Ο Gauss μού θυμίζει την υψηλότερη κορυφή των βαναρικών οροσειράων, έτοι όπως ορθώνονται μπροστά στα μάπα ενός παρατηρητή που έρχεται από το βορρά. Σε αυτή την ορεινή περιοχή, καθώς προχωράμε από τα ανατολικά προς τα δυτικά, οι μεμονωμένες κορυφές γίνονται όλο και πιο υψηλές, και καταλήγουν στο μεγαλύτερο ύψος τους στον τεράστιο κεντρικό όγκο. Από την άλλη πλευρά, πάλι, υπάρχει ένα απότομο ρήγμα που καταλήγει σε διαφορετικό τοπίο: μια πεδιάδα που διασχίζεται σε βάθος μεγάλο από τους πρόποδες του βουνού και από ποτάμια τα οποία κυλούν απ' τις πλαγιές του κεντρικού όγκου μεταφέροντας τη δροσιά και τη ζωή.»

Kip Thorne

ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η προκλητική κληρονομιά του Αΐνσταϊν (τόμ. A' και B')



Κάθε τόμος: 316 σελ., Α/Μ,
25 x 17 εκ., Πανόδετος, 7.000 δρχ.

Προλογίζει ο Stephen Hawking

«Κανείς δεν έχει περιγράψει καλύτερα απ' ότι ο Kip στο παρόν βιβλίο — και, μάλιστα, με περισσότερη σαφήνεια, εγκυρότητα και απλότητα ύφους — τις σημαντικότερες στιγμές στην προσπάθεια των επιστημόνων να αποκρυπτογραφήσουν την πνευματική κληρονομιά του Αΐνσταϊν.»

—John Archibald Wheeler

«Μια παραστατική και κατανοητή περιγραφή της γενικής σχετικότητας και των επιδράσεών της στη σύγχρονη κοσμολογία, από έναν απ' τους κορυφαίους ειδικούς στο χώρο...»

—Roger Penrose

«Φωτίζει το επιστημονικό εγχείρημα όπως ελάχιστα βιβλία του είδους του, αποπνέοντας από τις σελίδες του τη χαρά της ανακάλυψης...»

—Alan Lightman

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Μια πρώτη γεύση

Η αξία του άρθρου θα φανεί στην οθόνη σας

Κώστας Βασιλειάδης

HΕΠΙΡΡΟΗ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ (Internet) τόσο στον πολιτισμό μας όσο και στην προσωπική ζωή των ολοένα αυξανόμενων χρηστών του είναι αναμφισβήτητη. Αψευδή μαρτυρία περί τούτου αποτελούν τα εκατομμύρια των ανθρώπων οι οποίοι καθημερινά ασχολούνται μαζί του, οι αμέτρητες πληροφορίες που βρίσκονται αποθηκευμένες στους υπολογιστές οι οποίοι το συγκροτούν, και τα τεράστια χρηματικά ποσά που είτε επενδύονται είτε διακινούνται κάθε χρόνο μέσω του Διαδικτύου εξαιτίας της ανάπτυξης του ηλεκτρονικού εμπορίου.

Ο σκοπός της νέας στήλης που εγκαινιάζουμε σ' αυτό το τεύχος του *Quantum* είναι να καταγράφουμε την παρουσία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών στο εκρηκτικά αναπτυσσόμενο δίκτυο της πληροφορίας, να αναδεικνύουμε την έκταση και τη σημασία της συνεισφοράς τους και, φυσικά, να ενημερώνουμε τους αναγνώστες. Με μεγάλη ικανοποίηση θα πληροφορηθούμε ότι η στήλη αποτελεί συνεισφορά κάθε άλλο παρά ευκαταφρόνητη.

Ποιοι υπήρξαν οι παράγοντες που έπαιξαν τον καθοριστικό ρόλο στην τόσο ραγδαία ανάπτυξη του Διαδικτύου; Κατά τη γνώμη μας, δύο προβάλλουν ως οι σημαντικότεροι: αφ' ενός, η συγκρότηση του Παγκόσμιου Ιστού (World Wide Web) και η δωρεάν παροχή προς τους χρήστες εργαλείων για την πλοήγηση σ' αυτόν (Netscape, Explorer, κ.λπ.), που προσέφεραν τη δυνατότητα γρήγορης και εύκολης αναζήτησης πληροφοριών πάσης φύσεως: αφ' ετέρου, το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο (email), το οποίο αναδείχθηκε σε ένα εξαιρετικά εύχρηστο και ταχύ μέσο επικοινωνίας και ανταλλαγής μηνυμάτων.

Η παρούσα στήλη αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσπάθειας της ελληνικής έκδοσης του *Quantum* και αφιερώνεται σε όλους τους έλληνες αναγνώστες του. Και δεδομένου ότι αναλαμβάνει να φέρει εις πέρας μια αποστολή εκ των πραγμάτων πολλαπλή, θα καλύπτει ένα ευρύ φάσμα θεμάτων με χαρακτήρα ενημερωτικό, ερευ-

νητικό, εκπαιδευτικό κ.ά. Επιθυμία μας είναι οι πληροφορίες που θα παρέχει η στήλη να αποτελέσουν τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στους αναγνώστες και τις ευκαιρίες που προσφέρονται στο Διαδίκτυο, ευκαιρίες για συνεργασία, για ενημέρωση, για επιστημονική έρευνα και, τέλος, για τη βαθύτερη κατανόηση των θεμάτων που αφορούν τις φυσικές εποπτήμες και τα μαθηματικά.

Προτού έλθουμε στο προκείμενο, ας μου επιτραπεί να προβώ σε μια υπενθύμιση που προσωπικά τη θεωρώ άκρως σημαντική, και η οποία δεν ισχύει μόνο για όσα θα παρουσιάζουμε από αυτή τη στήλη, αλλά και για όλο το χώρο του Διαδικτύου: Ποτέ μη δείχνετε τυφλή εμπιστοσύνη σε ό,τι βρίσκετε και σε ό,τι διαβάζετε στο Διαδίκτυο. Πολλές από τις πληροφορίες που θα συναντήσετε ενδέχεται να έχουν τοποθετηθεί από καλοπροαίρετους εθελοντές, ωστόσο την εγκυρότητά τους δεν την εγγυάται κανείς πλην εκείνων που τις τοποθέτησαν. Έπειτα από αυτά, ας ξεκινήσουμε.

Σήμερα, πλην των άλλων, θα επισκεφθούμε το «Εικονικό εργαστήριο φυσικής» (Virtual lab) που βρίσκεται στην παρακάτω διεύθυνση:

<http://physicsweb.org/TIPTOP/VLAB>.

Το εργαστήριο αυτό φιλοξενείται στον κόμβο του TIPTOP. Το TIPTOP είναι προϊόν του εκδοτικού τμήματος του Ινστιτούτου Φυσικής (IOP) της Μεγάλης Βρετανίας. Ο εν λόγω κόμβος δημιουργήθηκε το 1994, και ώς σήμερα τον έχουν επισκεφθεί πάνω από 9,5 εκατομμύρια άνθρωποι. Το όνομα TIPTOP αποτελείται από τα αρχικά των λέξεων The Internet Pilot TO Physics. Θα αναβάλλουμε την πλήρη περιγραφή του TIPTOP για κάποιαν άλλη φορά. Σήμερα θα περιοριστούμε στην παρουσίαση μόνο του «Εικονικού εργαστηρίου». Το εργαστήριο αυτό περιέχει, ως την ώρα που γράφεται το παρόν, περισσότερα από εκατόν πενήντα ζωντανά πειράματα, στα οποία προστίθενται καθημερινά όλο και καινούργια. Όπως θα καταλάβετε έπειτα από μια σύντομη επίσκεψη

στον κόμβο, η εκπαιδευτική και ερευνητική του αξία είναι τεράστια.

Όλα τα πειράματα αποτελούν προϊόντα προσωπικής εθελοντικής δουλειάς. Επίσης, οι συντηρητές του κόμβου ενθαρρύνουν τους επισκέπτες να αναπτύσσουν δικά τους πειράματα και να τα υποβάλλουν αμέσως προκειμένου να ενταχθούν στον ήδη υπάρχοντα κατάλογο. Το κάθε πείραμα δημιουργείται από ένα Java Applet. Τα applets είναι μικρά προγράμματα-εφαρμογές που γράφονται στη γλώσσα προγραμματισμού Java, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να ενεργοποιηθούν από κώδικα ιστοσελίδας γραμμένης σε γλώσσα HTML. Τα Java Applets, λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει η μεταφορά τους από το ένα υπολογιστικό σύστημα στο άλλο, γνωρίζουν εξαιρετική διάδοση στο χώρο του Διαδικτύου.

Εκτός από προγράμματα Java Applets γραμμένα για θέματα φυσικής, στο «Εικονικό εργαστήριο» μπορείτε να βρείτε και εφαρμογές Macromedia Shockwave και VRML. Μερικά από τα πειράματα είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακά και χρησιμοποιούν πετυχημένα γραφικά. Άλλα πάλι μας φάνηκαν λιγότερο αποτελεσματικά. Παραθέτουμε εδώ δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Πείραμα συμβολής κυμάτων, στη διεύθυνση:
http://users.erols.com/renau/wave_interference.html.
Στο πείραμα αυτό επιδεικνύεται η αρχή της συμβολής στα εγκάρσια κύματα. Μπορείτε να αλλάξετε δυναμικά τη μορφή των κυμάτων και να δείτε πώς τροποποιείται η εικόνα συμβολής συνεπεία των παρεμβάσεών σας.
- Πείραμα προσομοίωσης πεδίου από σημειακά φορτία, στη διεύθυνση:
<http://www.canticle.org/simphysics>.

Το πείραμα αυτό δημιουργεί ηλεκτρικά, μαγνητικά και βαρυτικά πεδία που οφείλονται στην παρουσία σημειακών φορτίων, τη θέση των οποίων την επιλέγει ο χρήστης.

Θα χρειαζόμασταν ολόκληρο βιβλίο για να κάνουμε την πλήρη παρουσίαση όλων των πειραμάτων. Τα πειράματα της συλλογής προέρχονται από διάφορες χώρες, που εκπροσωπούν κάθε γωνιά του κόσμου: ενδεικτικά αναφέρουμε τις Αγγλία, Ινδία, Μαλαισία, Ταϊβάν, Καναδάς, Αμερική, Φιλανδία, Γαλλία, Ιαπωνία, κ.ά. Για να δώσουμε στον αναγνώστη μια αμυδρή ιδέα του εύρους των θεμάτων τα οποία καλύπτονται, παραθέτουμε έναν σύντομο κατάλογο (που δεν προβάλλει αξιώσεις πληροτητας): σύνθεση ταχυτήτων, διάχυση σωματιδίων, αρχή του Fermat, ανάκλαση και διάθλαση φωτός, μονοατομικά αέρια, χώρος και χρόνος στην ειδική σχετικότητα, ταλαντώσεις, νόμος των Biot-Savart, κύκλοτρο, υπερηχητικές πτήσεις, τα μαθηματικά στη θεωρία του χάους, δυνάμεις τριβής, υπεραγωγοί, κύκλος Carnot, διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, σύνθεση Fourier, πλάσμα, συμπύκνωση Bose-Einstein, πυρηνικά εργοστάσια, φακοί, κ.ά.

Λόγω της πληθώρας των θεμάτων, όποιος επιθυμεί να

επισκεφθεί και να εκτελέσει όλα τα πειράματα θα πρέπει να δαπανήσει πάρα πολύ χρόνο. Ωστόσο, το ότι παρέχεται στον επισκέπτη η δυνατότητα όχι μόνο να παρακολουθεί την εξέλιξη των πειραμάτων αλλά και να παρεμβαίνει στην πορεία τους τροποποιώντας τις τιμές μεταβλητών προσφέρει μια πρωτόγνωρη εμπειρία που ασφαλώς θα ικανοποιήσει και τους πιο απαιτητικούς.

Μία ακόμη συλλογή από πειράματα, γραμμένα επίσης υπό μορφή Java Applets, αποτελεί προσφορά του Πανεπιστημίου του Όρεγκον. Παραθέτουμε τη διεύθυνση του εργαστηρίου που τα περιλαμβάνει:

<http://jersey.uoregon.edu/vlab/select.html>.

Πρόκειται για είκοσι πειράματα συνολικά, τα οποία καλύπτουν θέματα κινητικής και δυναμικής ενέργειας, ηλεκτρικού δυναμικού, θερμοδυναμικής, κ.ά.

Δυστυχώς, ο χαρακτήρας της στήλης δεν μας επιτρέπει να επεκταθούμε σε ζητήματα σχετικά με το πώς μπορεί κανείς να κατασκευάσει Java Applets, πόσο μάλλον να δώσουμε ολοκληρωμένα παραδείγματα. Μπορούμε όμως να συστήσουμε στους ενδιαφερόμενους αναγνώστες να μελετήσουν κάποιο από τα πάμπολλα βιβλία που αναφέρονται ειδικά στη γλώσσα προγραμματισμού Java και τις εφαρμογές της. Τέτοια βιβλία υπάρχουν άφθονα στα ράφια κάθε τεχνικού βιβλιοπωλείου που διαθέτει τμήμα για τους υπολογιστές, μερικά δε από αυτά έχουν μεταφραστεί και στα ελληνικά.

Μια άλλη εντυπωσιακή παρουσία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών στο Διαδίκτυο είναι και η απέραντη συλλογή του Frank Potter: μπορείτε να τη βρείτε στη διεύθυνση:

<http://www-sci.lib.uci.edu/SEP/physical.html>.

Η εν λόγω συλλογή περιέχει πάνω από έντεκα χιλιάδες πηγές, οι οποίες εξακολουθούν να ενημερώνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Η συλλογή χωρίζεται σε επτά διαφορετικά τμήματα, εκ των οποίων τρία αφορούν τις φυσικές επιστήμες και ένα τα μαθηματικά. Το πρώτο που προσέχει κανείς σ' αυτή τη συλλογή είναι η μεθοδική της οργάνωση. Το πρώτο τμήμα των φυσικών επιστημών, παραδείγματος χάριν, υποδιαιρείται σε εννέα κατηγορίες (μετρήσεις και η επιστημονική μέθοδος, μαθηματικές μέθοδοι, μηχανική των κινήσεων, ενέργεια, κ.λπ.). Τα θέματα κάθε κατηγορίας κατατάσσονται στη συνέχεια σε πέντε υποκατηγορίες, ανάλογα με το μορφωτικό επίπεδο του επισκέπτη ή του υποψήφιου χρήστη (επίπεδο νηπιαγωγείου, 3ης δημοτικού, 6ης δημοτικού, 3ης γυμνασίου και κολεγίου). Η συστηματική αυτή κατηγοριοποίηση επιτρέπει στον καθένα, όποια κι αν είναι η ηλικία του ή το μορφωτικό του επίπεδο, να αξιοποιήσει τον τεράστιο πλούτο των παρεχόμενων πληροφοριών με τον πλέον πρόσφορο από εκπαιδευτικής απόψεως τρόπο: περιττεύει δε να προσθέσουμε ότι η συγκεκριμένη συλλογή αποτελεί έναν πραγματικό παράδεισο ζωντανής γνώσης για τα παιδιά.

Για εκείνους που, είτε ένεκα επαγγελματικής ενασχόλησης είτε για οποιονδήποτε άλλο λόγο, ενδιαφέρονται

ειδικά για τις φυσικές επιστήμες στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θα πρότεινα τη συλλογή του Bill Beaty, στη διεύθυνση:

<http://www.eskimo.com/billb/edu.html>.

Όποιος μάλιστα επιθυμεί, μπορεί και να επικοινωνήσει απευθείας με τον ίδιο τον Beaty στην ηλεκτρονική του διεύθυνση:

billb@eskimo.com.

Στη συλλογή του Beaty βρίσκεται κανείς άρθρα γύρω από τις φυσικές επιστήμες καθώς και ποικίλες πληροφορίες αναφορικά με επιστημονικές οργανώσεις, εκπαιδευτικό υλικό, βιβλιοθήκες, καταστήματα και εταιρείες που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες, λογισμικό, κ.ά. Παραθέτουμε στη συνέχεια έναν αντιπροσωπευτικό κατάλογο από ενδιαφέρουσες διευθύνσεις (μετρήσαμε τουλάχιστον τετρακόσιες διευθύνσεις σ' αυτή τη συλλογή): Newhoo:

[http://www.newhoo.com/Reference/
Education/Science](http://www.newhoo.com/Reference/Education/Science)

BBC:

<http://www.bbc.co.uk/education/webguide>

Tutorial:

<http://www.bjpinchbeck.com/framescience.htm>

SciCentral:

<http://www.scicentral.com/k-12>

Educ. Excellence:

<http://www.ed.gov/free/t-science.html>

Magellan:

[http://www.mckinley.com/magellan/
Reviews/Science](http://www.mckinley.com/magellan/Reviews/Science)

TOPS:

http://www.topscience.org/tops_links.htm

Science and Technology:

[http://webseekers.com/prev_issues/
science_technology](http://webseekers.com/prev_issues/science_technology)

PITS CO Projects:

<http://www.pitsco.com/p/collab.html>

EIN Galaxy:

<http://www.einet.net/galaxy/Science.html>

NSTA (η γνωστή μας Ένωση Καθηγητών Θετικών Επιστημών) των ΗΠΑ:

<http://driver.nsta.org>

Discovery Channel:

<http://www.exn.net>

Ειδικά για κορίτσια:

<http://www.autodesk.com/compinfo/dyf>

Φυσικές επιστήμες στην Αγγλία:

<http://www.ase.org.uk>

CERES-NASA:

<http://btc.montana.edu/ceres>

PBS-NOVA:

<http://www.pbs.org/wgbh/nova>.

Στη συνέχεια θα περάσουμε στο Εθνικό Εργαστήριο Fermi, περισσότερο ίσως γνωστό ως Fermilab, που βρίσκεται στην Μπατάβια της Πολιτείας του Ιλινόις και υπάγεται στο Υπουργείο Ενέργειας των ΗΠΑ. Προτού προχωρήσετε στην περιήγηση του εργαστηρίου, διαβάστε όλες τις προειδοποιήσεις ασφαλείας που θα εμφανίστούν στην οθόνη του υπολογιστή σας. Το εργαστήριο, το οποίο θεωρείται κορυφαίο του είδους του στον κόσμο, διαθέτει κυκλικό επιταχυντή τεσσάρων μιλίων. Αν θέλετε να σας γίνει ξενάγηση στο εργαστήριο, πατήστε με το ποντίκι σας στην επλογή Clickable Tour. Το εργαστήριο βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.fnal.gov>.

Ο Morgan Friedman διατηρεί τη δική του εντυπωσιακή συλλογή από εκατόν είκοσι κόμβους που αναφέρονται στη ζωή και το έργο του «Θείου Αλβέρτου», όπως χαρακτηριστικά αποκαλείται ο Αϊνστάιν. Η συλλογή βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.westegg.com/einstein>.

Ανάμεσα στις ποικίλες πληροφορίες για τον μεγαλύτερο φυσικό του 20ού αιώνα που παρέχονται στον επισκέπτη, συμπεριλαμβάνονται θεματολογικές ενότητες όπως αναφορές, περιστατικά, θεωρίες, προσωπικές στιγμές, τα πιστεύω του, φωτογραφίες, κ.ά.

Το Πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον διατηρεί μια τεράστια συλλογή από θέματα σχετικά με τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά. Η εισαγωγική σελίδα, η οποία βρίσκεται στη διεύθυνση

[http://www-hpcc.astro.washington.edu/
scied/physics.html](http://www-hpcc.astro.washington.edu/scied/physics.html),

χωρίζεται σε δεκαεπτά κατηγορίες: ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές: τα πιο πρόσφατα νέα, πειράματα, παρουσιάσεις, οργανώσεις, περιοδικά, ομάδες συζητήσεων, ιστορικά γεγονότα, βιογραφίες, βοηθήματα, κ.ά. Σε κάθε τέτοια κατηγορία μετρήσαμε, κατά μέσον όρο, περί τις τριάντα διευθύνσεις. Για παράδειγμα, αν θέλετε να ενημερωθείτε για τα επιτεύγματα κάποιου από τους Αριστοτέλη, Λεονάρντο ντα Βίντσι, Κέπλερ, Κοπέρνικου, Γαλιλαίου, Νεύτωνα και Βενιαμίν Φραγκλίνου, επικεφθείτε τη διεύθυνση:

[http://www-hpcc.astro.washington.edu/scied/
physics/physbio.html](http://www-hpcc.astro.washington.edu/scied/physics/physbio.html).

Στην ίδια διεύθυνση θα βρείτε πληροφορίες και για τους Bohr, Boltzmann, Born, Curie, Dirac, Fermi, Feynman, Heisenberg, Maxwell, Oppenheimer, Pauli, Planck, Poin-

caré, Raman, Röntgen, Schrödinger, και λοιπούς.

Ο Scott I. Chase διατηρεί από το 1992 μια ενδιαφέρουσα συλλογή από «συχνά υποβαλλόμενες» (δημοφιλείς) ερωτήσεις γύρω από θέματα φυσικής που απετέλεσαν κατά καιρούς αντικείμενο συζήτησης στις ομάδες του Usenet. Τις ερωτήσεις αυτές, συνοδευόμενες από τις απαντήσεις τους, μπορείτε να τις αναζητήσετε στη διεύθυνση:

<http://hermes.astro.washington.edu/faq/physics/faq.html>.

Το 1996, οι Hillman και Urban ξεχώρισαν όλες τις ερωτήσεις που αφορούσαν τη θεωρία της σχετικότητας και δημιούργησαν μια δεύτερη ανεξάρτητη συλλογή, την οποία μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

<http://hermes.astro.washington.edu/faq/physics/relativity.html>.

Στους ίδιους κόμβους θα ανακαλύψετε συνδετικούς κρίκους για άλλες συλλογές ερωτήσεων που περιστρέφονται γύρω από ζητήματα αστρονομίας, Διαστήματος, μαύρων τρυπών, κοσμικής ακτινοβολίας, κβαντικής μηχανικής, πυρηνικής φυσικής, χημείας, κ.ά.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης και οι τετρακόσιες σελίδες με ερωταπαντήσεις γύρω από διάφορα φυσικά φαινόμενα τις οποίες έχει συγκεντρώσει ο καθηγητής φυσικής του Πανεπιστημίου της Βιρτζίνια Louis Bloomfield στη διεύθυνση:

<http://howthingswork.virginia.edu>.

Η **ιστοσελίδα** του, που ενημερώνεται τακτικότατα, διανύει το τρίτο έτος της και μέχρι σήμερα έχει δεχτεί πάνω από 800 χιλιάδες επισκέπτες. Ο καθηγητής προτρέπει τους επισκέπτες του να διαδίδουν τη διεύθυνση της **ιστοσελίδας** του σε όσο το δυνατόν ευρύτερους κύκλους, διότι τον ενδιαφέρει να κατανοήσουν οι πάντες πώς ακριβώς λειτουργούν τα πράγματα και τα φαινόμενα γύρω μας. Οι ερωτήσεις που περιέχονται στην ιστοσελίδα του εκτείνονται από την ερώτηση «Για ποιο λόγο υπάρχουν μαγνήτες στα ηχεία του στερεοφωνικού μας συγκροτήματος;» ως την ερώτηση «Είναι δυνατόν να ξεφύγουν μικροκύματα προς το περιβάλλον από ένα φουύρο μικροκυμάτων; Έχουν δίκιο οι γονείς μας που μας απαγορεύουν να στεκόμαστε κοντά σ' αυτούς όταν είναι αναρρένοι;»

Όπως αντιλαμβάνεστε, είναι πρακτικά αδύνατο να καλύψουμε ολόκληρο το χώρο του Διαδικτύου σε ένα άρθρο. Μπορούμε να πούμε πως ένα τέτοιο εγχείρημα θα ξεπερνούσε σε δυσκολία ακόμη και μια αποστολή προσγείωσης στον περίφημο κόκκινο πλανήτη, τον Άρη. Δεν επέλεξα τυχαία τον συγκεκριμένο «γείτονα», απλώς και μόνο για να εκφράσω με παραστατικό τρόπο το μέτρο της δυσκολίας. Μόλις σήμερα διάβασα στο Διαδίκτυο κάτι εξαιρετικά ενδιαφέρον. Σύμφωνα λοιπόν με μια ομάδα αμερικανών και ευρωπαίων αστρονόμων, η ζωή, με τη μορφή που την ξέρουμε σήμερα, δεν άρχισε από τη Γη αλλά από τον Άρη!

Από όσες πληροφορίες έχουμε συγκεντρώσει μέχρι τούδε, πιστεύουμε πως η ζωή άρχισε από κάποιον μονοκύτταρο οργανισμό όμοιο με τα σημερινά βακτήρια, από τον οποίο πρόκειται αργότερα μέσω της εξέλιξης τα φυτά, τα ζώα και, τέλος, ο άνθρωπος. Η εξελικτική αυτή πορεία διήρκεσε βέβαια περισσότερα από 4 δισεκατομμύρια χρόνια. Τώρα όμως εμφανίζεται μια καινούργια θεωρία. Σύμφωνα με αυτή, λοιπόν, επειδή ο Άρης είναι μικρότερος σε μέγεθος και βρίσκεται πολύ μακριά από τον Ήλιο απ' όσο η Γη, στην επιφάνειά του πρέπει να επεκράτησαν θερμοκρασίες κατάλληλες για την ανάπτυξη ζωής πολύ πριν διαμορφωθούν παρόμοιες συνθήκες στην επιφάνεια της Γης.

Αν όμως δεχτούμε ότι λίκνο της ζωής στάθηκε ο Άρης, πώς ταξίδεψε και έφτασε η ζωή στη Γη; Η εξήγηση είναι απλή. Κάποιοι κομήτες συγκρούστηκαν με τον Άρη, με αποτέλεσμα να απελευθερωθούν στην επιφάνειά του τόσο μεγάλες ποσότητες ενέργειας ώστε να αποσπαστούν βράχοι και να εκτοξευτούν προς τη Γη, υπερνικώντας και αυτό ακόμη το πεδίο βαρύτητας του πλανήτη. Σύμφωνα με κάποιους υπολογισμούς, περίπου 5 δισεκατομμύρια βράχοι ταξίδεψαν με αυτό τον τρόπο από τον Άρη στη Γη. Την τελευταία δεκαετία, μάλιστα, πολλοί από τούτους τους βράχους εντοπίστηκαν κάτω από τους πάγους της Ανταρκτικής. Όπως πιστεύουν οι επιστήμονες, το μέγεθός τους αρκούσε για να μεταφερθούν με ασφάλεια διαμέσου του Διαστήματος οι μονοκύτταροι οργανισμοί από τους οποίους άρχισε η εξέλιξη της ζωής.

Με αυτή την ειδηση ολοκληρώνουμε την πρώτη παρουσία της στήλης στις σελίδες του περιοδικού. Στο επόμενο τεύχος θα επισκεφθούμε μερικά από τα μεγαλύτερα ερευνητικά κέντρα στον κόσμο, των οποίων η δραστηριότητα περιστρέφεται γύρω από τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά.

Η επιτυχία κάθε στήλης εξαρτάται πάντοτε από το κατά πόσον θα καταφέρει να προσελκύσει, αρχικά, και να συντηρήσει, στη συνέχεια, το ενδιαφέρον των αναγνωστών της. Πρόκειται για μια διαπίστωση που ισχύει για την παρούσα στήλη περισσότερο παρά για οποιαδήποτε άλλη. Η στήλη μας κρύβει μέσα της μεγάλη δυναμική ενέργεια. Για να απολαύσετε κάθε δύναμης που μπορεί να σας προσφέρει ετούτη η ενέργεια, πρέπει να τη μετατρέψετε σε κινητική. Και προκειμένου να γίνει πραγματικότητα μια τέτοια προοπτική, θα πρέπει να καθίσετε μπροστά στον υπολογιστή σας, να συνδεθείτε στο Διαδίκτυο και να επισκεφθείτε τις διευθύνσεις που αναφέραμε. Ευχόμαστε σε όλους σας καλή τύχη, και παράλληλα σας συνιστούμε να εξοπλιστείτε με αρκετή υπομονή.

Ο **Κώστας Βασιλειάδης** έχει σπουδάσει φυσική, ζει στην Αθήνα του Οχαίο και είναι Αναπληρωτής Καθηγητής στο Τμήμα μηχανικών των υπολογιστών του Πανεπιστημίου του Οχαίο. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα αφορούν τη μελέτη και δημιουργία έξυπνων υπολογιστικών συστημάτων. Η ηλεκτρονική του διεύθυνση είναι vass@bobcat.ent.ohiou.edu.

Η τέχνη του οράν τα αόρατα

«Τότε ήταν που άρχισα να βλέπω. Βαθιά να βλέπω, σε μια δίστομη όραση θητεύοντας. Το πισω απ' την εικόνα, το έξω, κι ό,πι οι θεοί είχανε τάξι της σκιάς.»

—Παντελής Μπουκάλας, Ο μάντης

V. Surdin

TA ΑΝΘΡΩΠΙΝΑ ΟΝΤΑ ΔΙΑΘΕΤΟΥΝ οκτώ αισθήσεις: πέντε από αυτές, η όραση, η ακοή, η δοσφροση, η γεύση και η αφή, ήταν ήδη γνωστές από την αρχαιότητα, ενώ η σύγχρονη έρευνα ήρθε να προσθέσει ακόμη τρεις, την αίσθηση του θερμού και του ψυχρού, την αίσθηση του πόνου, καθώς και αυτή που μας πληροφορεί για τη θέση και την κίνηση του σώματος (κιναισθησία). Ανάμεσά τους, αναμφίβολα ξεχωρίζει ως η σημαντικότερη και η πλέον θαυμαστή η όραση, η οποία παρέχει στον εγκέφαλο περισσότερο από το 90% των πληροφοριών που δέχεται από τον περιβάλλοντα κόσμο. Ειδικά δε για τους αστρονόμους, η όραση αποτελεί ένα αναντικατάστατο εργαλείο στη μελέτη του σύμπαντος. Όταν κανείς εκτελεί οπτικές παρατηρήσεις, είτε διά γυμνού οφθαλμού είτε με τηλεσκόπιο, πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κατασκευής και της οπτικής συμπεριφοράς του ματιού. Μόνο αν κατέχει μια τέτοια γνώση θα μπορέσει να διακρίνει σχεδόν αόρατα αντικείμενα όπως οι μικροί σεληνιακοί κρατήρες, τα αμυδρά άστρα, οι μακρινοί κομήτες και οι γαλαξίες.

Η πρώτη εμπειρία με το τηλεσκόπιο συχνά στέκεται απογοητευτική για τον ερασιτέχνη αστρονόμο. «Δεν μπορώ να ξεχωρίσω την παραμικρή λεπτομέρεια», παραπονιέται ο αρχαριος που στρέφει πρώτη φορά το τη-

λεσκόπιο του προς τον Άρη ή ακόμη και προς τον Δία. Αντίθετα, με το ίδιο τηλεσκόπιο ο πεπειραμένος παρατηρητής καταφέρνει να χαρτογραφήσει τις λεπτομέρειες του πλανήτη. Πώς εξηγείται μια τόσο μεγάλη διαφορά; Ο υποκείμενος λόγος έγκειται στο ότι οι αστρονόμοι έχουν εξασκήσει τα μάτια τους (κάτι που ισχύει εξίσου και για τους βιολόγους, οι οποίοι διακρίνουν τις μικροσκοπικές λεπτομέρειες των ζώντων κυττάρων κάτω από το μικροσκόπιο). Μπορείτε κι εσείς να αναπτύξετε αυτή τη δεξιότητα μαθαίνοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης όρασης και παρατηρώντας σε τακτική βάση τα ουράνια σώματα.

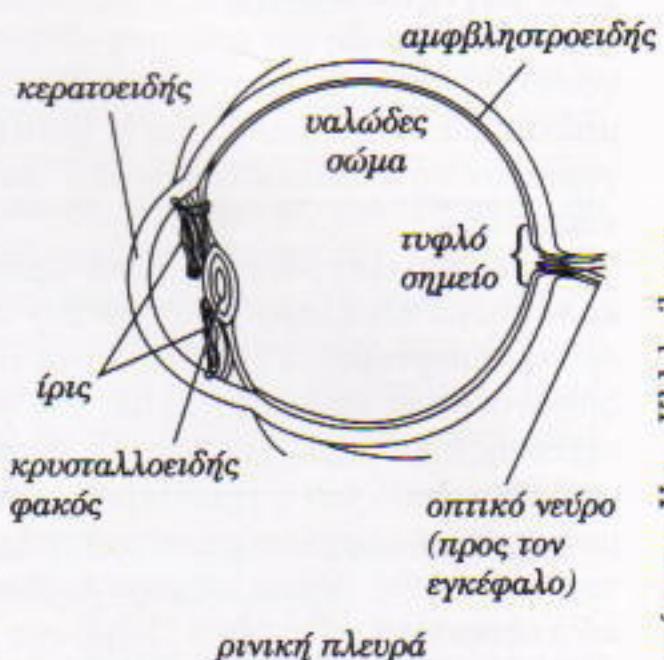
Η κατασκευή του ματιού

Η κατασκευή του ματιού απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται να παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με τη φωτογραφική μηχανή. Το αντικειμενικό σύστημα του ματιού (ο κερατοειδής χιτώνας, η ίριδα και ο κρυσταλλοειδής φακός) μοιάζει με κλασικό αντικειμενικό σύστημα, αποτελούμενο από φακούς και ένα διάφραγμα (την ίριδα). Οφείλουμε ωστόσο να επισημάνουμε ότι είναι εξαιρετικά ευρυγώνιο: το ανθρώπινο μάτι καλύπτει οπτικό πεδίο εύρους σχεδόν 180° στην οριζόντια διεύθυνση και 140° στην κατακόρυφη. Φυσικά, από ένα τέτοιο απλό αντικειμενικό σύστημα δεν μπορεί να

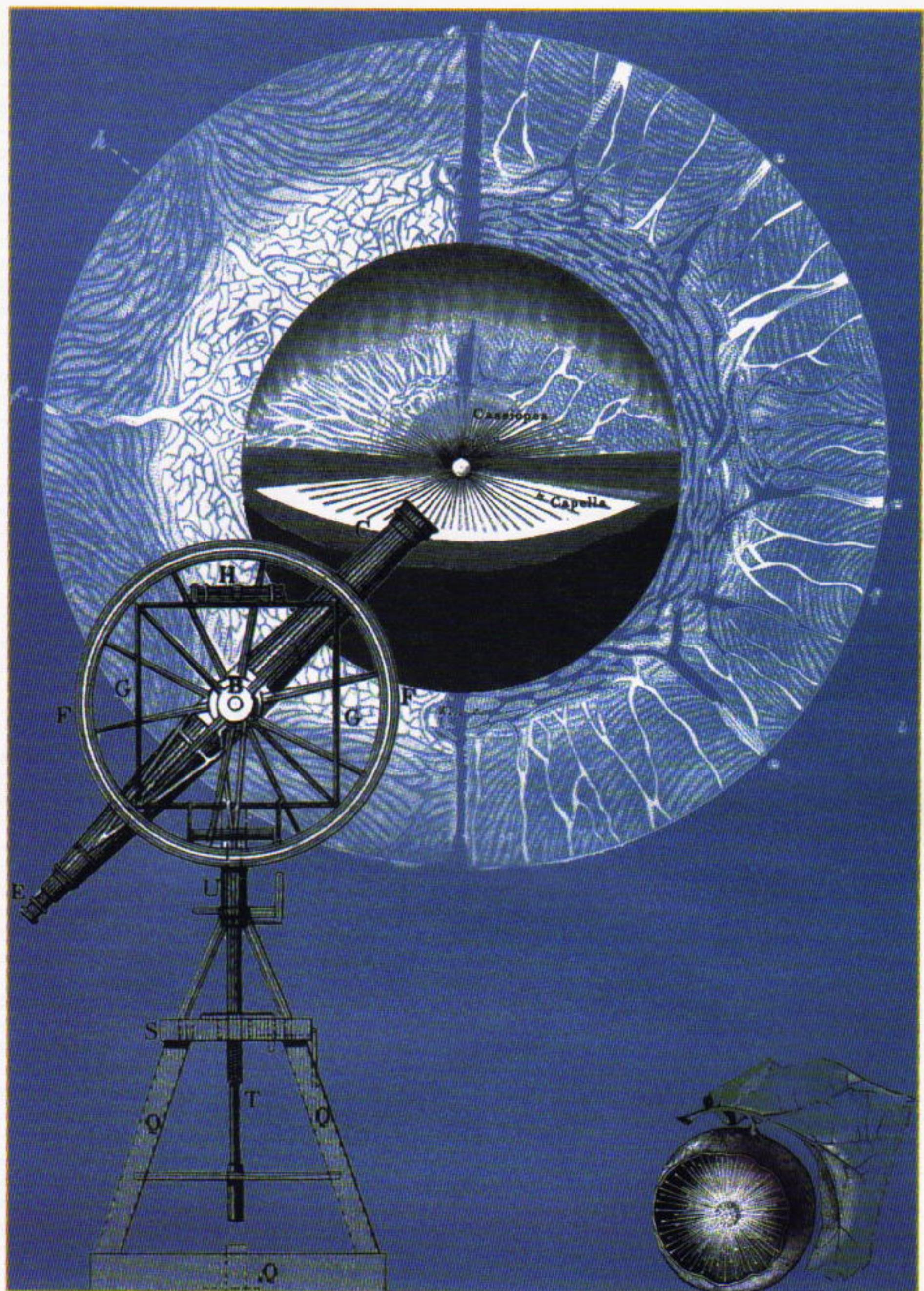
αναμένεται υψηλή ποιότητα: ευκρινές ειδωλο προβάλλεται μόνο στο κέντρο του αμφιβληστροειδούς: στην περιφέρεια του το ειδωλο παρουσιάζει έντονη υποβάθμιση.

Το κεντρικό άνοιγμα της ίριδας ονομάζεται κόρη. Παίζει τον ίδιο ακριβώς ρόλο όπως και το διάφραγμα σε μια φωτογραφική μηχανή: καλύπτει την περιφέρεια του φακού σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό. Το μάτι μπορεί να αυξομειώνει τη διάμετρο της κόρης μεταξύ μιας ελάχιστης τιμής 2 mm και μιας μέγιστης 8 mm. Τοιουτοτρόπως ελέγχει τη φωτεινή ροή η οποία διαπερνά τον κρυσταλλοειδή φακό και καταλήγει στον φω-

κροταφική πλευρά



Σχήμα 1
Οβελιαία τομή του ματιού.



τοευαίσθητο αμφιβληστροειδή χιτώνα. Εδώ, όμως, εξαντλούνται οι απλές αναλογίες ανάμεσα στο μάτι και τη φωτογραφική μηχανή, δεδομένου ότι ο αμφιβληστροειδής δεν έχει τίποτε το κοινό με το φωτογραφικό φίλμ.

Σε διάταξη τη σχεδίαση του, ο αμφιβληστροειδής παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερη ομοιότητα με το φωτοανιχνευτή μιας σύγχρονης βιντεοκάμερας, ο οποίος αποτελείται από μια διάταξη στοιχειωδών φωτοανιχνευτών ημιαγωγών, που ονομάζονται εικονοστοιχεία (ή πίξελ). Στο μάτι, το ρόλο των εικονοστοιχείων τον παίζουν φωτευαίσθητα κύτταρα δύο τύπων: τα ραβδία και τα κωνία. Οι δύο αυτοί τύποι κυττάρων δεν διαφέρουν μόνο στο σχήμα, αλλά κυρίως στη λειτουργία. Ο αμφιβληστροειδής του ανθρώπινου ματιού περιέχει περίπου 7 εκατομμύρια κωνία και 120 εκατομμύρια ραβδία.

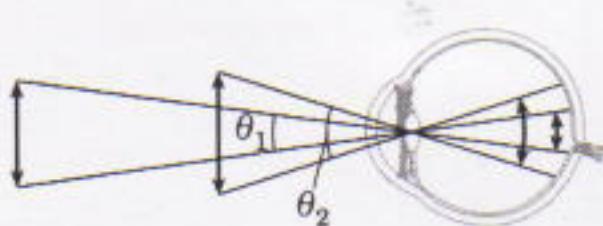
Τα ραβδία λειτουργούν σε πολύ ασθενή φωτισμό και παρέχουν την όραση λυκόφωτος και τη σκοτοψία (νυκτερινή όραση). Ωστόσο, δεν διακρίνουν τα χρώματα, γεγονός που εξηγεί γιατί τη νύχτα όλα τα αντικείμενα φαίνονται άχροα (σε διαβαθμίσεις του γκρίζου). Τα κωνία, από την άλλη, λειτουργούν μόνο στο φως της ημέρας, αλλά είναι ευαίσθητα στο χρώμα. Η όραση των χρωμάτων εξηγείται βάσει του γεγονότος ότι υπάρχουν τριών ειδών κωνία, τα οποία κατανέμονται ανάμικτα στην κεντρική ευαίσθητη περιοχή του αμφιβληστροειδούς. Μερικά από τα κωνία είναι ευαίσθητα στο γαλάζιο φως, μερικά στο πράσινο και άλλα στο πορτοκαλέρυθρο. Συνεργάζομενα από κοινού, μπορούν να μεταδώσουν ακριβείς πληροφορίες για τις αποχρώσεις στο ειδώλο. Τούτο επιτυγχάνεται με έναν τρόπο που θυμίζει τον καθοδικό σωλήνα ενός έγχρωμου τηλεοπτικού δέκτη, ο οποίος ενσωματώνει τρία μονοχρωματικά κινησιοσκόπα σε ένα σωλήνα: κόκκινο, πράσινο και γαλάζιο.

Η διακριτική ικανότητα του ματιού

Το μέγεθος των ελάχιστων λεπτομερειών που μπορεί να ξεχωρίσει το

μάτι καθορίζεται από τη γωνιακή διακριτική του ικανότητα. Όταν αδυνατούμε να ξεχωρίσουμε τις μικροσκοπικές λεπτομέρειες σε μια εικόνα, προσπαθούμε αυθόρυμη να τη φέρουμε πλησιέστερα στα μάτια μας. Στην πορεία αυτής της διαδικασίας το γραμμικό μέγεθος των λεπτομερειών δεν μεταβάλλεται, πλην όμως αυξάνεται το γωνιακό μέγεθος, θ (Σχήμα 2). Η ελάχιστη γωνιακή απόσταση που πρέπει να χωρίζει δύο σημεία ώστε το μάτι να μπορεί να τα διακρίνει ονομάζεται (γωνιακό) διακριτικό όριο. Στο κέντρο του οπτικού πεδίου (δηλαδή στην περιοχή που το ειδώλο της σχηματίζεται στο κέντρο του αμφιβληστροειδούς, όπου η επιφανειακή πυκνότητα των κωνίων είναι μεγιστηριακή) το υγιές μάτι έχει γωνιακό διακριτικό όριο $1'$ (ενός λεπτού της μοίρας). Εάν κρατήσετε το περιοδικό με το βραχίονά σας τεντωμένο, η τελεία που σημειώνει το τέλος της περιόδου την οποία διαβάζετε αντιστοιχεί σε γωνία όρασης τέτοιου μεγέθους. Προσέξτε ότι όταν κοιτάζετε το περιοδικό από την απόσταση αυτή, εύκολα ξεχωρίζετε το κόμμα από την τελεία. Ωστόσο, αν τοποθετήσετε τη σελίδα σε τριπλάσια απόσταση, δεν καταφέρνετε πια να ξεχωρίσετε τα δύο σημεία στις ίδιες. Πειραματίσθετε και μόνοι σας με την ακόλουθη σειρά κομμάτων και τελειών: „„„„„„“.

Υπάρχει ένα ακόμη υπέροχο χαρακτηριστικό της όρασής μας — η ικανότητά της να διακρίνει ταχείς κινήσεις και μεταβολές σε μια εικόνα. Το εν λόγω χαρακτηριστικό αναφέρεται ως χρονικό διακριτικό όριο. Για παράδειγμα, σε μερικά βιντεοκλίπη η εικόνα αλλάζει με ρυθμό 5-7 καρέ ανά δευτερόλεπτο. Με αυτό το ρυθμό μπορούμε να δούμε την κάθε



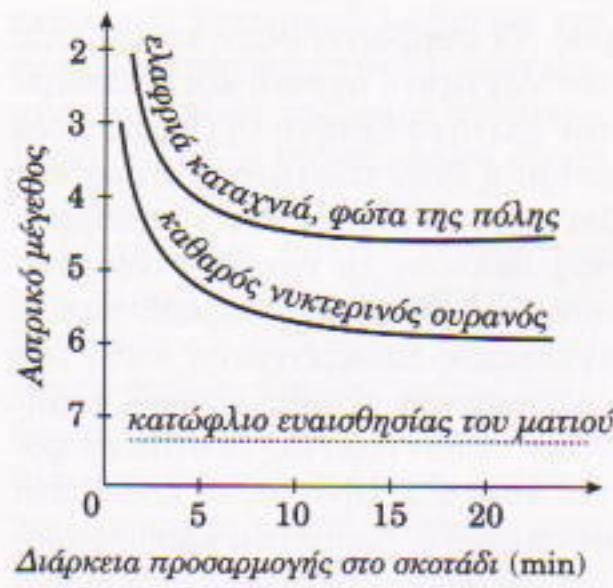
Σχήμα 2

Το γωνιακό μέγεθος ενός αντικειμένου και η ευκρίνεια του ειδάλου του εξαρτώνται από την απόσταση.

εικόνα ξεχωριστά. Ωστόσο, όταν ο ρυθμός της αλλαγής αυξηθεί σε 15-20 καρέ ανά δευτερόλεπτο, οι διαφορετικές εικόνες συγχωνεύονται σε μία, και αδυνατούμε πλέον να διακρίνουμε τα μεμονωμένα καρέ. Πώς εξηγείται μια τέτοια ριζική διαφοροποίηση; Ο λόγος έγκειται στο ότι το χρονικό διακριτικό όριο του ανθρώπινου ματιού ανέρχεται μόλις στα $0,1$ s περίπου. Αυτό το φυσιολογικό χαρακτηριστικό εξηγεί πώς μας δημιουργείται η αίσθηση της συνεχούς εξέλιξης της κίνησης όταν παρακολουθούμε μια κινηματογραφική προβολή: όταν τα καρέ αλλάζουν με το ρυθμό των 24 ανά δευτερόλεπτο, δεν τα βλέπουμε να περνούν ένα ένα, αλλά τα αντιλαμβανόμαστε ως μια ομαλή, συνεχή ταινία.

Το μάτι μπορεί να αντιληφθεί τις διαφορές στο φωτισμό γειτονικών αντικειμένων μόνο εφόσον υπερβαίνουν τα 2%, και τούτο ανεξαρτήτως της λαμπρότητας των αντικειμένων. Στη διαδικασία αυτή το μάτι ενεργεί ως «συγκριτής που εκτιμά όχι τη διαφορά αλλά το λόγο των φαινόμενων φωτεινοτήτων. Ιδού λοιπόν γιατί οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν την έννοια του αστρικού (φαινόμενου) μεγέθους. Όταν λέμε ότι δύο αστρα διαφέρουν σε αστρικό μέγεθος κατά 1, εννοούμε πως οι φωτεινές ροές που προέρχονται από αυτά διαφέρουν κατά έναν παράγοντα 2,512.... Ένας πεπειραμένος αστρονόμος μπορεί να διακρίνει διαφορές στη φωτεινότητα παρακείμενων αστρων έως και 0,02 αστρικά μεγέθη. Πρόκειται για μια τιμή η οποία ελάχιστα απέχει από το 2% που χαρακτηρίζει το κατώφλιο ευαισθησίας του ανθρώπινου ματιού.

Ας συνεχίσουμε την αναλογία μας με τις ηλεκτρονικές συσκευές. Η βιντεοκάμερα διαθέτει ένα σύστημα που ελέγχει την ευαισθησία της (αυτόματος έλεγχος ενίσχυσης). Το μάτι έχει επίσης ένα παρόμοιο σύστημα. Στο σκοτάδι η ευαισθησία του αυξάνεται κατά χιλιάδες φορές, ενώ στο λαμπρό φως της ημέρας μειώνεται αντίστοιχα. Ωστόσο, αυτές οι αλλαγές δεν συντελούνται τόσο γρήγορα όσο στη βιντεοκάμερα. Έτσι, όταν μπαίνουμε σε ένα έντονα φωτισμένο δωμάτιο, τα μάτια μας θαμπώνουν για



Σχήμα 3

Τα μεγέθη των αμυδρότερων άστρων που μπορεί να δει το ανθρώπινο μάτι ως συνάρτηση του αναγκαίου χρόνου για την προσαρμογή στο σκοτάδι.

μερικά δευτερόλεπτα από το φως, ενώ όταν μπαίνουμε σε ένα σκοτεινό δωμάτιο, χρειάζεται να περάσει κάποιος χρόνος προτού καταφέρουμε να δούμε οτιδήποτε. Για την πλήρη προσαρμογή των ματιών στο σκοτάδι απαιτείται περίπου μισή ώρα. Μετά αυτή την περίοδο προσαρμογής, η ευαισθησία των ματιών φτάνει στο υψηλότερο σημείο της (Σχήμα 3).

Μερικές ιδιαιτερότητες της όρασης

Το μάτι συνδέεται με τον εγκέφαλο με μια δέσμη νευρικών ινών, οι οποίες όμως είναι κατά πολύ λιγότερες από τα φωτοευαίσθητα κύτταρα στον αμφιβληστροειδή. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μάτι υποβάλλει την οπτική πληροφορία σε κάποια προκαταρκτική επεξεργασία και αποστέλλει στον εγκέφαλο μια απλοποιημένη εικόνα. Για παράδειγμα, σε δ.τι εκ πρώτης όψεως μοιάζει με ένα σύνολο χαοτικά διεσπαρμένων κουκκίδων το μάτι προσπαθεί να «αναγνωρίσει» τα περιγράμματα γεωμετρικών σχημάτων οικείων στον εγκέφαλο. Πρόκειται για ιδιότητα που ενίστε βοηθά τους αστρονόμους (είναι ευκολότερο να θυμάται κανείς τα περιγράμματα των αστερισμών παρά τις θέσεις μεμονωμένων άστρων), αν και σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό το χαρακτηριστικό της οπτικής αντίληψης ενδέχεται να αποβεί παραπλανητικό.

Ως σχετικό παράδειγμα μπορούμε να επικαλεστούμε τη δήθεν ανακάλυψη των διωρύγων στον Άρη, η οποία αποτελεί ίσως τη γνωστότερη, αλλά όχι και τη μοναδική, περίπτωση πλασματικής παρατήρησης στην ιστορία της αστρονομίας.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι η πρόσληψη της οπτικής πληροφορίας συνιστά μια λεπτή και σύνθετη διαδικασία η οποία συνδέεται άρρηκτα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης ψυχολογίας. Εφόσον κανείς γνωρίζει αυτά τα χαρακτηριστικά, μπορεί εύκολα να παραπλανήσει τα μέρη εκείνα του εγκεφάλου τα οποία αναλύουν τη διοδιάστατη εικόνα που επεξεργάζεται ο αμφιβληστροειδής και αναδημιουργούν την αρχική τρισδιάστατη εικόνα. Οι ειδικοί γνωρίζουν πολλές από τις «οπτικές πλάνες» τις οποίες εκμεταλλεύονται στα κόλπα τους οι ταχυδακτυλουργοί στις παραστάσεις τους. Άλλα και η αντίστροφη δεξιότητα —η αναπαράσταση της τρισδιάστατης δομής ενός πραγματικού αντικειμένου με τη μορφή ενός δισδιάστατου σχεδιάσματος— δεν υστερεί καθόλου σε σημασία. Ακραίο παράδειγμα χειραγώγησης της οπτικής αντίληψης αποτελεί η σχεδίαση «αδύνατων» αντικειμένων. Ο ολλανδός χαράκτης M. Escher διέπρεψε στην τέχνη αυτή.

Ακριβώς τη δεξιότητα του να μετασχηματίζουν ένα δισδιάστατο είδωλο σε τρισδιάστατο μοντέλο της πραγματικής ζωής μαθαίνουν τα βρέφη από τις πρώτες μέρες της ζωής τους αγγίζοντας συστηματικά δύσα αντικείμενα βλέπουν. Υπ' αυτή την έννοια, η όραση ενίστε περιγράφεται ως επίκτητη ικανότητα. Όταν μεταφράζουμε τα δισδιάστατα είδωλα σε τρισδιάστατες εικόνες, οι εγκέφαλοί μας στηρίζονται σε ένα ειδικό «λεξικό» δυνατών μοντέλων που βρίσκονται αποθηκευμένα στη μνήμη. Πρόκειται για ένα λεξικό σε υψηλό βαθμό ατομικευμένο, που «συντάσσεται» σύμφωνα με τα ιδιαίτερα βιώματα του καθενός, στα οποία βεβαίως συμπεριλαμβάνονται και τα επαγγελματικά. Πράγματι, όπως αποδεικνύουν ορισμένα ψυχολογικά πειράματα όπου οι συμμετέχοντες καλούνται να συμπληρώσουν σκίτσα παραφθαρμέ-

να και ατελή σε βαθμό που η βέβαιη αναγνώρισή τους να καθίσταται εντελώς αδύνατη, το κάθε πρόσωπο που θα τεθεί προ ενός τέτοιου διεπίλυτου γρίφου θα δώσει μιαν απολύτως μοναδική λύση. Και όταν παρατηρήσουμε κάτι ασυνήθιστο στον ουρανό, ο καθένας μας θα συμπληρώσει τις λεπτομέρειες με τον δικό του τρόπο και θα καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα σχετικά με τη φύση του γεγονότος που είδε. Μόνο με τη συσσώρευση πείρας στις αστρονομικές παρατηρήσεις αποκτούμε, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, αυτοπεοίθηση σχετικά με την ερμηνεία του τι βλέπουμε στο στερέωμα.

Η Σελήνη εν πτήσει

Κάποια συννεφιασμένη και φεγγαρόφωτη νύχτα με δυνατό άνεμο ασφαλώς και θα έτυχε να παρατηρήσετε ένα εκπληκτικό φαινόμενο —την «πτήση» της Σελήνης. Όταν παρατηρούμε τη Σελήνη μέσα από τα χάσματα που αφήνουν μεταξύ τους τα σύννεφα, το μάτι μας παρασύρεται από τη φαινομενική της κίνηση εγκάρσια προς την οπτική ακτίνα, και ακούσια στρέφουμε το κεφάλι προκειμένου να παρακολουθήσουμε τη γρήγορη κίνησή της. Έπειτα από λίγα δευτερόλεπτα αντιλαμβανόμαστε ότι η Σελήνη μένει ακίνητη, και ότι αυτά που κινούνται διασχίζοντας τον ουρανό είναι τα σύννεφα. Εάν έχουμε πυκνή νέφωση και τα χάσματα απέχουν μεγάλες αποστάσεις, τότε η Σελήνη παύει να φαίνεται επί αρκετό χρόνο. Υπό παρόμοιες συνθήκες, μπορεί κανείς να μείνει βέβαιος ότι είδε κάποιο φωτεινό, στρογγυλό αντικείμενο να πετά γρήγορα μέσα στα σύννεφα. Μάλιστα, κατά καιρούς έχουν υποβληθεί αναφορές για την εμφάνιση UFO, οι οποίες οφείλονται στο φαινόμενο που περιγράφαμε. Πώς εξηγούν άραγε οι φυσιολόγοι το φαινόμενο της ιπτάμενης Σελήνης;

Όπως είπαμε, το μάτι δεν αποτέλλει όλη την οπτική πληροφορία στον εγκέφαλο, αλλά προηγουμένως την επεξεργάζεται προκειμένου να επλέξει το σημαντικότερο μέρος της. Πώς γνωρίζει όμως το μάτι τι είναι σημαντικό και τι μπορεί να αγνοήσει; Στην πορεία της βιολογικής εξέ-

λιξης, κάθε ανθρώπινο δργανο απέκτησε χαρακτηριστικά τα οποία συντελούν στην επιβίωση του είδους. Στον κανόνα αυτό, το μάτι δεν αποτελεί εξαιρεση. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να επιλέγει το μέρος εκείνο της οπτικής πληροφορίας που αφορά τα δυνητικά θηράματα ή τους επικίνδυνους θηρευτές. Τόσο οι θηρευτές όσο και τα θηράματα συνήθως βρίσκονται σε κίνηση —είτε επιτίθενται είτε επιχειρούν να διαφύγουν. Δεν προκαλεί απορία λοιπόν το γεγονός ότι το οπτικό σύστημα του ανθρώπου έμαθε να ανιχνεύει την κίνηση αντιμετωπίζοντάς την ως την πλέον σημαίνουσα πληροφορία. Και οφείλουμε να παραδεχτούμε πως προκειται όντως για ένα σύστημα εξαιρετικά αποδοτικό στην ανίχνευση ακόμη και των ελάχιστων αλλαγών στο οπτικό πεδίο.

Στη διαδρομή του από τον αμφιβλητορειδή μέχρι τον εγκεφαλικό φλοιό, το οπτικό σήμα υφίσταται πολύπλοκους μετασχηματισμούς. Εν τω συνόλω, το σήμα απλουστεύεται σε μεγάλο βαθμό και μεταφέρει μόνο τα δεδομένα **ζωτικής σημασίας**, η έλλειψη των οποίων θα μπορούσε να σημάνει το θάνατο για το ανθρώπινο ον. Η πληροφορία για τη μετατόπιση σε σχέση με τον αμφιβλητορειδή δχι μόνο διατηρείται, αλλά και ενιούχεται, ενώ άλλα δεδομένα απορρίπτονται. Τα ακίνητα αντικείμενα, που τα είδωλά τους δεν κινούνται πάνω στον αμφιβλητορειδή, το μάτι ούτε καν τα προσέχει αφού παρέλθει λίγος χρόνος. Συνεπώς, για να διατηρεί μια εικόνα του ακίνητου φόντου, το μάτι πρέπει συνεχώς να εκτελεί μικροσκοπικές κινήσεις πλάτους 2-3 λεπτών της μοίρας, έτσι ώστε να παράγει τεχνητές μετατοπίσεις των αντικειμένων στον αμφιβλητορειδή. Και αυτό εξηγεί το λόγο που, όταν κοιτάζουμε τα άστρα, τα βλέπουμε πότε να αναπηδούν —στην πραγματικότητα, αυτά τα άλματα αποτελούν συνέπεια των μικροσκοπικών κινήσεων των ματιών μας.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των ματιών αποτελεί συνέπεια της ανομοιόμορφης κατανομής των φωτοευαίσθητων κυττάρων στον αμφιβλητορειδή. Η περιοχή της οξύτε-

ρης δρασης βρίσκεται στο κέντρο του αμφιβλητορειδούς και έχει γωνιακό μέγεθος μερικών μόνο μοιρών, ενώ, δύον αφορά τις υπόλοιπες περιοχές του οπτικού πεδίου, το μάτι παρουσιάζει χαμηλό διακριτικό όριο.

Φανταστείτε τώρα ότι είστε ένας κυνηγός που εξερευνά με το βλέμμα του το ακίνητο τοπίο, ελπίζοντας να εντοπίσει κάποιο θήραμα. Το έξυπνο θήραμα μπορεί να διαισθανθεί τον κίνδυνο που το απειλεί και να αντιδράσει με έναν ιδιαίτερα αποτελεσματικό τρόπο: απλούστατα «παγώνει» στη θέση του, καθιστώντας έτσι τον εντοπισμό του πολύ δυσχερέστερο.

Ας εξετάσουμε και μιαν άλλη δυνατότητα: το θήραμα δεν βλέπει τον κυνηγό και συνεχίζει να βρίσκει ήρεμα. Υπάρχουν δύο τρόποι ενέργειας για το μάτι: να προσηλώσει το βλέμμα είτε στο τοπίο είτε στο κινούμενο θήραμα. Εάν τα μάτια προσηλώθουν στο τοπίο, πάνω στον αμφιβλητορειδή δεν κινείται παρά μόνο το είδωλο του θηράματος, το οποίο και αποτελεί το μοναδικό ερέθισμα που διεγείρει τον εγκέφαλο. Στην προκειμένη περίπτωση, το οπτικό σήμα είναι ασθενές —προέρχεται από ένα μικρό μέρος του αμφιβλητορειδούς. Επιπλέον, η ποιότητα της εικόνας δεν αργεί να υποβαθμιστεί, —το είδωλο σύντομα απομακρύνεται από την περιοχή του αμφιβλητορειδούς που αντιστοιχεί στην οξύτερη δραση.

Η εξέλιξη επέλεξε τον δεύτερο τρόπο ενέργειας: τα μάτια μας προσηλώνονται στο κινούμενο θήραμα και το είδωλό του «κλειδώνεται» σταθερά στο κέντρο του αμφιβλητορειδούς, στην περιοχή της οξύτερης δρασης. Σ' αυτό τον τρόπο δρασης, πάνω στον αμφιβλητορειδή κινείται το τοπίο, παράγοντας έναν ισχυρό οπτικό καταγισμό νευρικών ώσεων προς τον εγκέφαλο και διεγείροντας την προσοχή. Πρόκειται για μια τυπική κατάσταση, που ο εγκέφαλος γνωρίζει άριστα πώς να την ερμηνεύσει: το σταθερό είδωλο στο κέντρο του οπτικού πεδίου ανήκει σε ένα κινούμενο αντικείμενο, ενώ το κινούμενο είδωλο που το περιβάλλει αντιπροσωπεύει το ακίνητο τοπίο το οποίο αποτελεί το φόντο!

Ας επιστρέψουμε όμως στο θέμα

μας. Τι συμβαίνει όταν κοιτάζουμε τον νυχτερινό ουρανό και βλέπουμε την ακίνητη Σελήνη (ή ένα φωτεινό άστρο ή έναν πλανήτη) να προβάλλει φευγαλέα μέσα από τα χάσματα που αφήνουν τα ταχέως κινούμενα σύννεφα; Το μάτι (ή, ακριβέστερα, ο εγκέφαλος) αποκρίνεται σ' αυτή την εικόνα με τον συνήθη τρόπο —ερμηνεύει τα σύννεφα ως το στατικό φόντο και τη Σελήνη ως το κινούμενο αντικείμενο. Απαντείται κάποιος χρόνος και συνειδητή προσπάθεια για να κατασταλεί η οπτική πλάνη, έτσι ώστε να αποκατασταθεί η σωστή εικόνα με τη Σελήνη ακίνητη και με τα σύννεφα να διασχίζουν τον ουρανό. Σε τέτοιες περιπτώσεις, δύον έχουν εξοικειωθεί με την παρατήρηση αστρονομικών φαινομένων δεν αντιμετωπίζουν το παραμικρό πρόβλημα.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι τον ίδιο τρόπο ανίχνευσης του κινούμενου αντικειμένου συναντάμε και ως αρχή λειτουργίας των συστημάτων ηλεκτρονικής σταθεροποίησης εικόνας (EIS) στις φορητές βιντεοκάμερες. Εάν η εικόνα μετατοπιστεί ως σύνολο, το εν λόγω σύστημα την επαναφέρει στα δρια του κάδρου βάσει της υπόθεσης ότι η μετατόπιση προκλήθηκε από κάποιο ακούσιο τράνταγμα του χεριού του εικονολήπτη. Αντίθετα, όταν κινείται μόνο ένα μικρό τμήμα της εικόνας, το σύστημα EIS δεν παρεμβαίνει, βάσει της υπόθεσης ότι αυτή η μετατόπιση αντιπροσωπεύει την κίνηση κάποιου μεμονωμένου αντικειμένου. Επομένως, όταν στρέψουμε τη βιντεοκάμερα σε έναν ουρανό σκεπασμένο από σύννεφα με τη Σελήνη να «πάζει κρυφτό» πίσω τους, η μηχανή θα προσπαθήσει να σταματήσει τα σύννεφα και να αφήσει τη Σελήνη να κινείται —θα συμπεριφερθεί δηλαδή ακριβώς όπως και ο εγκέφαλός μας.

Η λειτουργία της περιφερειακής δρασης

Για να δούμε όσο το δυνατόν καλύτερα ένα αντικείμενο, το κοιτάζουμε κατευθείαν. Το είδωλο προβάλλεται στο κέντρο του αμφιβλητορειδούς, όπου η πυκνή διάταξη των κωνίων παρέχει έγχρωμη και πολύ ευκρινή δραση. Οτιδήποτε βρίσκεται

εκτός του κεντρικού τμήματος του αμφιβληστροειδούς γίνεται συγκεχυμένο και χάνει τα ζωηρά χρώματα. Παρά ταύτα, η περιφερειακή όραση έχει τις δικές της αρετές.

Εν πρώτοις, από το κέντρο του αμφιβληστροειδούς λείπουν σχεδόν παντελώς τα εξαιρετικά φωτευαίσθητα ραβδία. Σπεύδω να σας υπενθυμίσω ότι μόνο χάρη στα ραβδία καθίσταται δυνατή η όραση λυκόφωτος. Αν και τα κωνία αφθονούν στην κεντρική περιοχή του αμφιβληστροειδούς, παρουσιάζουν χαμηλότερη ευαισθησία στο φως από τα ραβδία, επειδή το φασματικό τους εύρος περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο χρώμα. Προς τούτο, η πλήρης κωνίων κεντρική περιοχή του αμφιβληστροειδούς δεν είναι μεγάλη: έχει γωνιακό μέγεθος μερικών μόνο μοιρών. Αντίθετα, η περιφέρεια του αμφιβληστροειδούς περιέχει πάρα πολλά ραβδία, τα οποία παρουσιάζουν μεν μεγάλη ευαισθησία στο φως αλλά αδυνατούν να διακρίνουν τα χρώματα. Συνεπώς, τη νύχτα η περιφερειακή μας όραση μπορεί να ανιχνεύει αμυδρά αντικείμενα που δεν φαίνονται όταν τα κοιτάζουμε κατευθείαν.

Οι αστρονόμοι συχνά εκμεταλλεύονται την περιφερειακή όραση για να παρατηρήσουν άστρα ή νεφελώματα που είναι τόσο αμυδρά ώστε να παραμένουν αθέατα όταν παρατηρούνται κατευθείαν. Σας προτρέπω να προσπαθήσετε να κάνετε το ίδιο κι εσείς. Συμβουλευτείτε έναν αστρονομικό χάρτη για να προσδιορίσετε τη θέση του νεφελώματος της Ανδρομέδας στην ουράνια σφαίρα (Σχήμα 4). Κατά πάσα πιθανότητα δεν θα καταφέρετε να το δείτε στη θέση που υποδεικνύει ο χάρτης (ειδικά στον ουρανό μιας μεγαλούπολης). Ωστόσο, αν μετατοπίσετε ελαφρώς τα μάτια σας από το στόχο, θα δείτε μιαν ωειδή κηλίδα που μοιάζει με τη φλόγα κεριού — αυτή είναι το περίφημο νεφέλωμα της Ανδρομέδας, ένα γιγαντιαίο αστρικό σύστημα παρόμοιο με το γαλαξία μας. Δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι δύσκολα μπορεί να το διακρίνει κανείς διά γυμνού οφθαλμού. Στην πραγματικότητα, αν υπάρχει κάτι το εκπληκτικό πρόκειται για το ότι κατορθώνουμε να το βλέπου-



Σχήμα 4

Βρείτε το νεφέλωμα της Ανδρομέδας με τη βοήθεια της περιφερειακής σας όρασης. Προστλώστε τα μάτια σας στο άστρο β Ανδρομέδας ή ελαφρώς αριστερά του.

με —έστω και μόνο χάρη στη βοήθεια της περιφερειακής μας όρασης—, καθόσον απέχουμε από τον εν λόγω γαλαξία εκατοντάδες φορές περιοστέρο απ' δ, τι από τα άστρα που σχηματίζουν τους οικείους αστερισμούς.

Συνεπώς, η περιφερειακή όραση αποτελεί πολύτιμο εργαλείο για τον παρατηρητή των άστρων. Εάν μάθετε πώς να την αξιοποιείτε, θα σας προσφέρει σημαντικές υπηρεσίες. Ωστόσο, το ίδιο φυσιολογικό φαινόμενο μπορεί να παραπλανήσει τον άπειρο. Όταν αντιληφθείτε ένα φωτεινό αντικείμενο στην περιφέρεια του οπτικού σας πεδίου, στρέφετε αυτομάτως το κεφάλι σας για να το εξετάσετε προσεκτικότερα, αλλά τότε πια δεν βλέπετε τίποτε. Μερικές φορές παρόμοια συμβάντα απετέλεσαν την αφορμή για να πλεχθούν μύθοι για την εμφάνιση UFO.

Υπάρχει ένα ακόμη σημαντικό χαρακτηριστικό της περιφερειακής όρασης: έχει καλύτερο χρονικό διακριτικό όριο από την κεντρική όραση. Την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού μπορεί να την ελέγξετε και μόνοι σας: κοιτάξτε ένα λαμπτήρα φθορισμού, πρώτα κατευθείαν και κατόπιν με την περιφερειακή σας όραση. Στην πρώτη περίπτωση βλέπετε ένα

σταθερό φως: στη δεύτερη μπορείτε να διακρίνετε το τρεμούλιασμα του φωτός, το οποίο οφείλεται στο ότι η λάμπα τροφοδοτείται με εναλλασσόμενο ρεύμα (συχνότητας 50-60 Hz) και έτσι η ένταση του εκπεμπόμενου φωτός αυξομειώνεται με διπλάσια συχνότητα. Ένα παρεμφερές πείραμα μπορεί να πραγματοποιηθεί με την οθόνη της τηλεόρασης: όταν την κοιτάζετε κατευθείαν δεν βλέπετε τις γρήγορες εναλλαγές των καρέ, τις οποίες όμως εύκολα παρατηρείτε με την περιφερειακή σας όραση.

Πρέπει να υποθέσουμε ότι αυτό το χαρακτηριστικό της όρασής μας αναπτύχθηκε στην εξελικτική περίοδο κατά την οποία καταδίωκαν τους προγόνους μας πολλοί και επικίνδυνοι θηρευτές που τους επετίθεντο από πίσω ή από τα πλάγια. Επομένως, το να λειτουργεί ταχύτατα η περιφερειακή όραση και να αναφέρει στον εγκέφαλο τον κίνδυνο χωρίς καθυστέρηση ήταν πολύ σημαντικό για την επιβίωσή τους. Αντίθετα, ελάχιστη σημασία είχε η χαμηλή οξύτητα της περιφερειακής τους όρασης. Λίγο ενδιαφέρει το θήραμα ποιο ακριβώς θηρίο τού επτίθεται —αν προκειται για μια ραβδωτή τίγρη ή μια στικτή λεοπάρδαλη. Εκείνο που έχει ζωτική σημασία για το θήραμα είναι να αντιληφθεί εγκαίρως ότι θα δεχτεί επίθεση, και να απομακρυνθεί από τον κίνδυνο όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Στη σύγχρονη εποχή, πάλι, η ταχεία αντίδραση που προσφέρει η περιφερειακή όραση αποδεικνύεται σημαντική στην οδική κυκλοφορία, τόσο για τους οδηγούς όσο και για τους πεζούς.

Δείτε ακόμη τα άρθρα:

- Pavel Bliokh, «Τι κάνουν τα μικρά αστέρια;», Μάιος/Ιούν. 1994.
- Vladimir Surdin, «Οπτική για ουρανοβάμοντες», Νοέμ./Δεκ. 1994.
- D. και L. Tarasov, «Το παιχνίδι του φωτός», Ιούλ./Αύγ. 1996.
- A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Δημιουργία χρωμάτων», Ιούλ./Αύγ. 1997.
- A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», Σεπτ./Οκτ. 1997.
- N. Novolseltzev, «Ερμηνεύοντας τα θαύματα», Ιούλ./Αύγ. 1998.

Διαμέριση της υφηλίου

Πληθυσμός και δυνάμεις του δύο

V. Arnold

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΨΗΦΙΟ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ 2^n ισούται με 1 περίπου έξι φορές συχνότερα απ' όσο ισούται με 9. Τα πρώτα ψηφία του πληθυσμού και της έκτασης των χωρών του κόσμου κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο! Η εξήγηση που προτείνεται στη συνέχεια γι' αυτό το φαινόμενο έχει οδηγήσει σε πολλές μαθηματικές υποθέσεις, ορισμένες από τις οποίες έχουν αποδειχθεί ενώ άλλες εδράζονται μόνο σε πειράματα με υπολογιστές και δεν έχουν ακόμη αποδειχθεί με αυστηρότητα.

Δυνάμεις του δύο

Η ακολουθία των πρώτων ψηφίων των αριθμών 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) αρχίζει με τα

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, ...

Εάν συνεχίσουμε τους υπολογισμούς, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε εμπειρικά ότι το ψηφίο 1 αποτελεί το 30% περίπου αυτής της ακολουθίας (ενώ το ψηφίο 9 είναι λιγότερο από το 5% των όρων της). Η ίδια κατανομή προκύπτει για την ακολουθία των πρώτων ψηφίων των αριθμών 3ⁿ και, γενικότερα, για σχεδόν κάθε γεωμετρική πρόσοδο. (Οι ακολουθίες με λόγο $10, \sqrt{10}$ και γενικότερα, 10^{pq} , όπου p και q ακέραιοι, αποτελούν προφανείς εξαιρέσεις.)

Η απόδειξη αυτού του εντυπωσιακού γεγονότος έγινε από τον H. Weyl πριν εκατό σχεδόν χρόνια. Ο Weyl

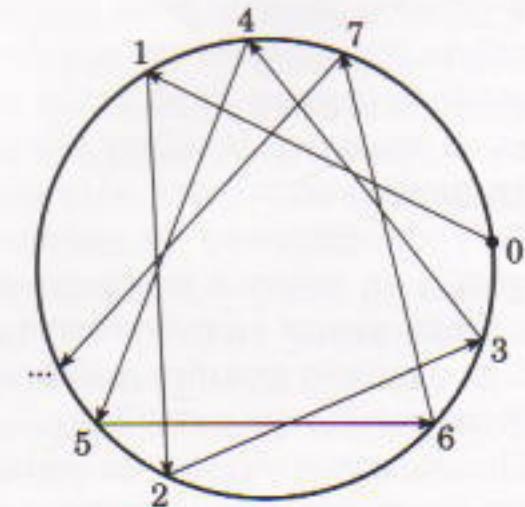
απέδειξε περισσότερα πράγματα. Θυμηθείτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός x εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός ακέραιου (που καλείται ακέραιο μέρος του x) και ενός κλασματικού μέρους, $\{x\}$, που ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$.

Θεώρημα. Έστω x ένας άρρητος αριθμός. Τότε η ακολουθία των κλασματικών μερών, $\{nx\}$, των αριθμών nx ($n = 0, 1, 2, \dots$) κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(0, 1)$.

Αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο του $1/N$ επί το πλήθος των τιμών τού n ($0 \leq n < N$) για τις οποίες το κλασματικό μέρος τού nx ανήκει σε ένα σταθερό τμήμα μήκους a , τείνει στο a καθώς το N τείνει στο άπειρο.

Με άλλα λόγια, ας θεωρήσουμε ότι ένα σημείο κινείται πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου και σε ακέραιες χρονικές στιγμές (n) εκτελεί άλματα ίσα με γωνία $2\pi x$, η οποία είναι ασύμμετρη ως προς τη 2π (βλ. Σχήμα 1). Το θεώρημα μας βεβαιώνει ότι το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου το κινούμενο σημείο βρίσκεται σε ένα τυχαίο τόξο του κύκλου είναι ανάλογο ασυμπτωτικώς (δηλαδή για μεγάλα διαστήματα παρατήρησης) με το μήκος του τόξου (και δεν εξαρτάται ούτε από τη θέση του τόξου στον κύκλο ούτε από την αρχική θέση του σημείου ούτε καν από την τιμή της γωνίας).

Μπορούμε τώρα να βρούμε την κατανομή των πρώτων ψηφίων των

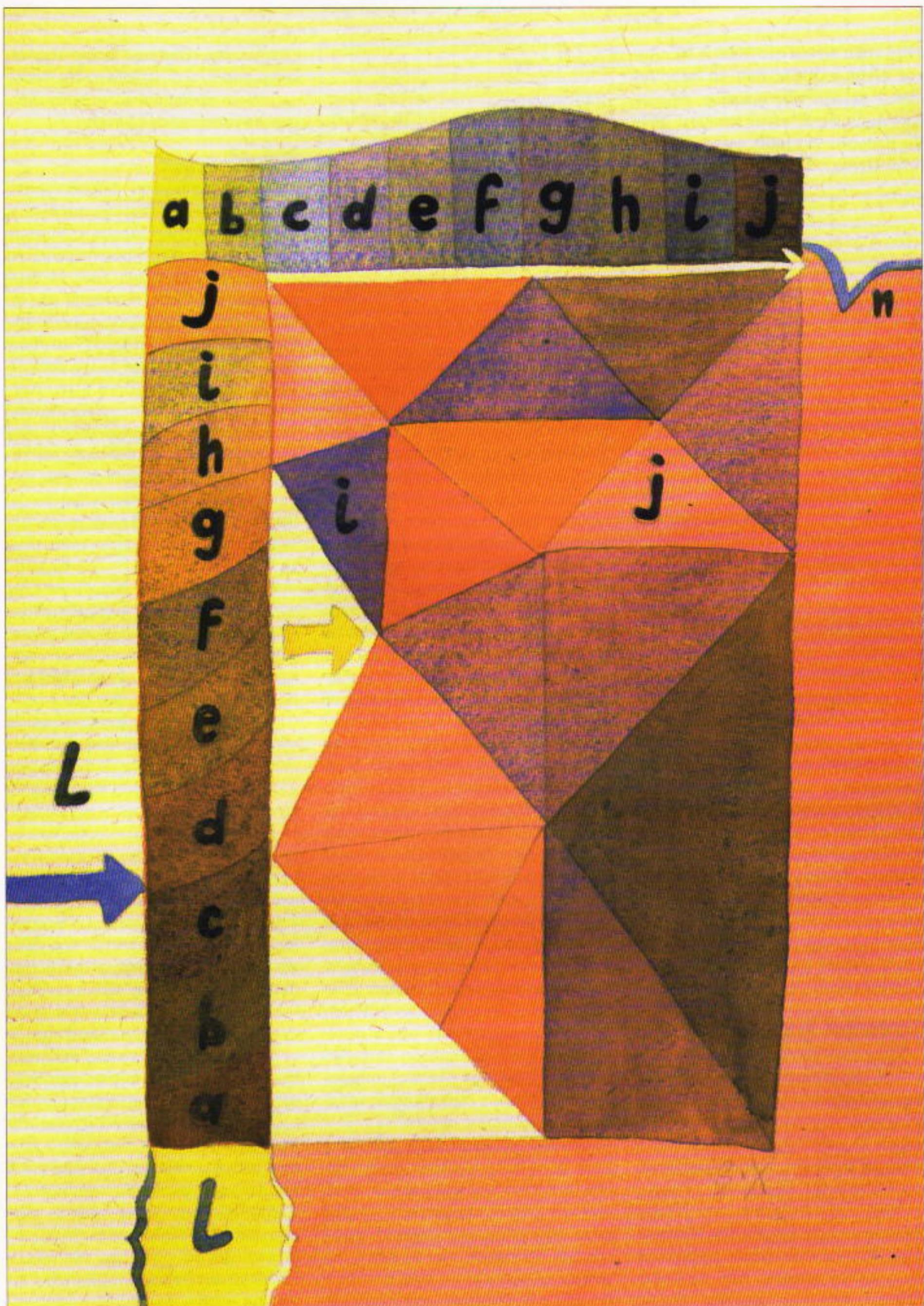


Σχήμα 1

Η τροχιά ενός σημείου που περιστρέφεται συνεχώς κάνοντας άλματα ίσα με μια γωνία ασύμμετρη ως προς τη 2π .

αριθμών 2^n με τον εξής τρόπο. Θεωρούμε την ακολουθία των αριθμών $\log_{10}(2^n) = nx$. Ο αριθμός $x = \log_{10} 2$ είναι άρρητος. Από το θεώρημα του Weyl έπειται ότι η ακολουθία των κλασματικών μερών των nx κατανέμεται ομοιόμορφα στο $(0, 1)$.

Το πρώτο ψηφίο, i , του 2^n καθορίζεται από το διάστημα μεταξύ των αριθμών $\log_{10}(i+1)$ και $\log_{10}(i)$, μέσα στο οποίο ανήκει το κλασματικό μέρος του αριθμού $\log_{10}(2^n)$. Βάσει του θεωρήματος, το ποσοστό των αριθμών 2^n που αρχίζουν με το ψηφίο i ($= 1, \dots, 9$) ισούται με $p_i = \log_{10}(i+1) - \log_{10}(i)$. Για παράδειγμα, για την περίπτωση $i = 1$, αυτό το ποσοστό ισούται με $\log_{10} 2 = 0,301$ (το ότι αυτός ο αριθμός βρίσκεται κοντά στο $3/10$ αντανακλά το γεγονός ότι το $2^{10} =$

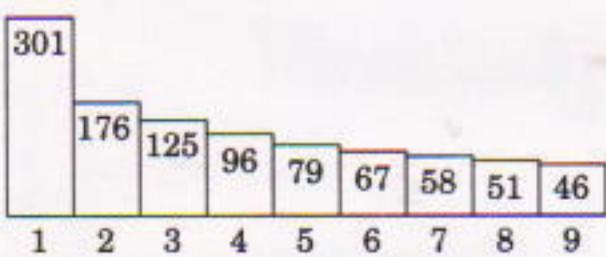


1024 είναι κοντά στο $1000 = 10^3$. Αυτός είναι ο λόγος που το ποσοστό των 1 μεταξύ των πρώτων ψηφίων των αριθμών 2^n είναι περίπου 30%. Το ποσοστό για κάθε ψηφίο δίνεται στον Πίνακα 1.

i	1	2	3	4	5
$100 \times p_i$	30	17	12	10	8
i	6	7	8	9	
$100 \times p_i$	7	6	5	5	

Πίνακας 1

Το 9 εμφανίζεται περίπου έξι φορές λιγότερο από το 1 (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Κατανομή των πρώτων ψηφίων των δυνάμεων του 2.

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξαγάγουμε ένα συμπέρασμα σημαντικό για την περαιτέρω ανάλυσή μας: η παράδοξα ανομοιόμορφη κατανομή των πρώτων ψηφίων των αριθμών 2^n εξηγείται από την ομοιόμορφη κατανομή των κλασματικών μερών των λογαρίθμων αυτών των αριθμών.

Τούτο το συμπέρασμα εξηγεί την παρόμοια κατανομή των πρώτων ψηφίων πολλών διαφορετικών ακολουθιών (π.χ., των γεωμετρικών προσδονών 2^n και 3^n , αλλά και άλλων ειδών ακολουθιών).

Πληθυσμοί χωρών

Πριν από είκοσι περίπου χρόνια, ο N.N. Konstantinov μού επέστησε την προσοχή στο γεγονός ότι τα πρώτα ψηφία των πληθυσμών των διαφόρων χωρών έχουν την ίδια κατανομή με τα πρώτα ψηφία των δυνάμεων του 2 (βλ. Πίνακα 2).

Ιδού η εξήγηση που του έδωσα. Σύμφωνα με τη θεωρία του Malthus, ο πληθυσμός κάθε χώρας αυξάνει με γεωμετρική πρόσοδο. Από το προηγούμενο θεώρημα του Weyl έπειται

πρώτο ψηφίο	1	2	3	4	5
πλήθος χωρών (%) , 1995	29	21	10	11	6
πρώτο ψηφίο	6	7	8	9	
πλήθος χωρών (%) , 1995	6	8	3	6	

Πίνακας 2

ότι τα πρώτα ψηφία του πληθυσμού μιας ορισμένης χώρας κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο όπως τα πρώτα ψηφία των δυνάμεων του 2 (βλ. Σχήμα 2). Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα (ή, ακριβέστερα, την εργοδική αρχή), μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μέση τιμή ως προς το χρόνο με τη μέση τιμή ως προς το χώρο — με άλλα λόγια, η κατανομή ως προς τις διάφορες χώρες σε διάστημα ενός χρόνου τείνει να είναι ταυτόσημη με την κατανομή για μία χώρα σε διαφορετικά χρόνια.

Για να επαληθεύσω αυτή την εικασία, συνέκρινα την κατανομή του πλήθους των σελίδων στα βιβλία της βιβλιοθήκης μου, τα μήκη των ποταμών και τα ύψη των βουνών. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα ποσοστά των 1 και των 9 μεταξύ των ψηφίων αυτών των αριθμών ήταν πρακτικώς ίσα: $p_i \approx 1/q$. Τα βιβλία, οι ποταμοί και τα βουνά δεν αυξάνουν με γεωμετρική πρόσοδο, και συνεπώς η θεωρία του Malthus δεν εφαρμόζεται. Έτσι, η διαφορά μεταξύ της στατιστικής των πρώτων ψηφίων των αριθμών που αντιπροσωπεύουν πληθυσμούς και, ας πούμε, των αριθμών που αντιπροσωπεύουν μήκη ποταμών μάς δίνει μια έμμεση επιβεβαίωση του τύπου του Malthus (σύμφωνα με την οποία ο πληθυσμός αυξάνει με γεωμετρική πρόσοδο).

Ωστόσο, πριν από δέκα χρόνια, ο M.B. Sevryuk ανακάλυψε ότι δχι μόνον οι πληθυσμοί αλλά και οι εκτάσεις των χωρών ακολουθούν τον ίδιο νόμο κατανομής των πρώτων ψηφίων των δυνάμεων του 2. Αφού δεν μπορεί προφανώς να εφαρμοστεί η θεωρία του Malthus, ανακύπτει το

ζήτημα της εξήγησης αυτής της συμπεριφοράς των εμβαδών. Επιτρέψτε μου να προσπαθήσω να απαντήσω στο συγκεκριμένο ερώτημα.

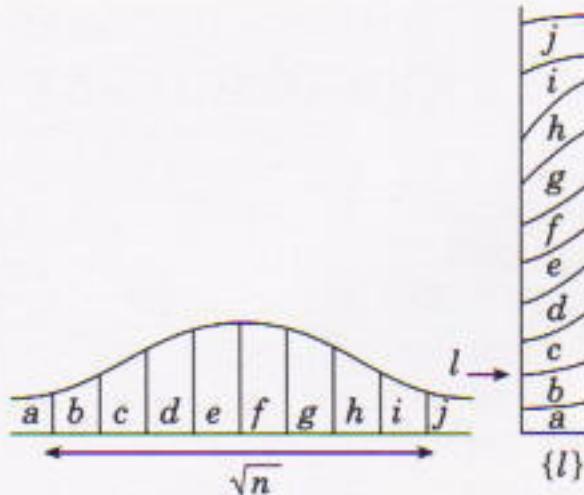
Εμβαδά χωρών

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι η αιτία της παράξενης συμπεριφοράς των πρώτων ψηφίων των εμβαδών των χωρών πρέπει να αναζητηθεί στη σχέση τους με γεωμετρικές προσδούς. Η ιστορία μάς διδάσκει ότι τα εμβαδά των χωρών (ειδικά των αυτοκρατοριών) μερικές φορές αυξάνονται και άλλες μειώνονται, με την προσάρτηση ή την απόσχιση χωρών. Στην αρχή εξετάζουμε το πλέον πρωτόγονο μοντέλο αυτού του φαινομένου. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι ανά μονάδα χρόνου κάθε χώρα διαιρείται σε δύο ίσα μέρη με πθανότητα 0,5 και ενώνεται με μία άλλη ίσου εμβαδού, πάλι με πιθανότητα 0,5.

Θεώρημα. Η κατανομή των κλασματικών μερών του λογαρίθμου του εμβαδού που καταλαμβάνει μια τέτοια χώρα τη γρανική στιγμή n τείνει σε ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$ όταν το n τείνει στο άπειρο.

Με άλλα λόγια, η πιθανότητα να είναι το πρώτο ψηφίο του εμβαδού ίσο με 1 τείνει στο $\log_{10} 2 \approx 0,301, \dots$, και η πιθανότητα αυτό το ψηφίο να είναι το 9 ισούται περίπου με 0,046.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την ακολουθία $l_n = \log_{10} S(n)$, όπου $S(n)$ είναι το εμβαδόν κατά τη γρανική στιγμή n . Την επόμενη στιγμή, τη $n+1$, το σημείο l_n μετατοπίζεται κατά $\log_{10} 2$ είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά με ίσες πιθανότητες (βεβαίως, η επιλογή του τι θα κάνουμε — συγχώνευση ή διαμέλιση — είναι ανεξάρτητη από τις επιλογές που έγιναν τις άλλες γρανικές στιγμές). Σύμφωνα με τους νόμους της θεωρίας πιθανοτήτων, η κατανομή των l_n για μεγάλα n συγκεντρώνεται κυρίως σε ένα μεγάλο ευθύγραμμο τμήμα (τάξης μεγέθους \sqrt{n}) και είναι συμμετρική με ομαλή κλίση (βλ. Σχήμα 3). Όταν περάσουμε στα κλασματικά μέρη (δηλαδή όταν τυλίξουμε τον άξονα l γύρω από τον κύκλο $l \bmod 1$), αυτή η κατανομή στον l δίνει μια συγεόν ομοιόμορφη κατανο-



Σχήμα 3

Όταν η γραμμή με την ομαλά κατανεμημένη κλίση τυλιχτεί γύρω από τον κύκλο, προκύπτει μια σχεδόν ομοιόμορφη κατανομή.

μή στον κύκλο (για μεγάλα n). Αφήνουμε τους αναγνώστες να συμπληρώσουν τις λεπτομέρειες της απόδειξης. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι η ακολουθία των κλασματικών μερών των αριθμών $m \log_{10} 2$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

Υπάρχει μεγάλο πλήθος περισσότερο πολύπλοκων μοντέλων για την επαναχάραξη των συνόρων στον κόσμο, τα οποία παράγουν, σε αριθμητικά πειράματα, το ίδιο αποτέλεσμα. Είναι πιθανόν ότι η οριακή ομοιόμορφία της κατανομής των κλασματικών μερών των λογαρίθμων του εμβαδού των χωρών μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά για ολόκληρες κλάσεις αυτών των μοντέλων. Ιδού μερικά παραδείγματα.

1. Αρχικά υπάρχουν k χώρες με εμβαδά S_1, \dots, S_k . Σε κάθε διαδοχική στιγμή, μια τυχαία επιλεγμένη χώρα διαιρείται στα δύο με πιθανότητα 50% ή ενώνεται με μία άλλη (τυχαία επιλεγμένη) χώρα με πιθανότητα 50%. Βεβαίως, οι επιλογές που γίνονται κάθε χρονική στιγμή θεωρούνται ανεξάρτητες, και κάθε χώρα έχει ίδιες πιθανότητες επιλογής.

Οι υπολογισμοί που εκτέλεσε ο M. Khesina (Πανεπιστήμιο του Τορόντο, Ιούνιος 1997) δείχνουν ότι για $S_i = i, k = 100$, η κατανομή των πρώτων ψηφίων των εμβαδών γίνεται πρακτικά ίση με την κατανομή των πρώτων ψηφίων των δυνάμεων του 2 έπειτα από εκατό μόλις βήματα.

2. Εάν επιτρέψουμε τη διαίρεση σε άνισα τμήματα βάσει ενός συγκεκριμένου νόμου κατανομής τμημά-

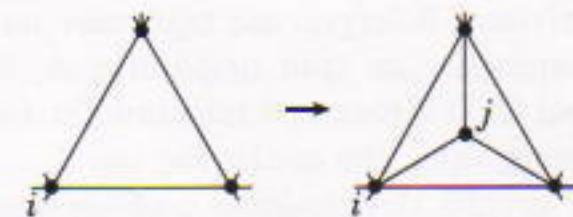
	A	B	C
αρχικό πλήθος χωρών, n	100	62	100
πλήθος επαναληπτικών βημάτων, T	200	150	200
μέσο πλήθος χωρών τη στιγμή T	98	114	898
πιθανότητα διαίρεσης, p	0,5	0,6	0,5
ποσοστό του εμβαδού που αποσχίζεται, a	0,5	0,5	0,3

Πίνακας 3

των (για παράδειγμα, την ομοιόμορφη), προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

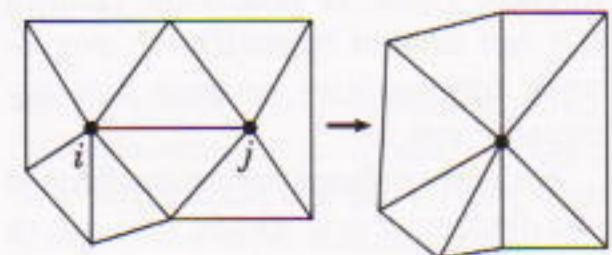
3. Σε μοντέλα όπου επιτρέπουμε τη συνένωση μόνο σε διορες χώρες, βρίσκουμε την ίδια κατανομή των πρώτων ψηφίων. Για παράδειγμα, σε ένα από τα μοντέλα του F. Aicardi (Τεργέστη, Ιούνιος 1997), οι χώρες αντιπροσωπεύονται από τέξα κύκλου και το εμβαδόν τους από τα μήκη αυτών των τόξων. Πολύ σύντομα καταλήγουμε σε μια κατανομή που είναι σχεδόν ίδια με αυτή των πρώτων ψηφίων των δυνάμεων του 2.

4. Σε ένα άλλο μοντέλο του Aicardi, ο κόσμος αντιπροσωπεύεται από ένα γράφημα που περιγράφει τη διαμέριση μιας σφαίρας σε σφαιρικά τρίγωνα (οι n κορυφές των οποίων αντιπροσωπεύουν n χώρες με εμβαδόν που κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(1, n)$). Κατασκευάζουμε το γράφημα ξεκινώντας από ένα εικοσάεδρο και επαναλαμβάνοντας την επόμενη πράξη: επιλέγουμε τυχαία μια



Σχήμα 4

Απόσχιση μιας νέας χώρας j από τη χώρα i .



Σχήμα 5

Ένωση των δύο χωρών, i και j .

τριγωνική έδρα, προσθέτουμε μια κορυφή στο κέντρο της και τη συνδέουμε και με τις τρεις κορυφές αυτής της έδρας.

Σε αυτό το μοντέλο, η αναδιανομή των χωρών του κόσμου οργανώνεται ως εξής. Κάθε χρονική στιγμή επιλέγεται τυχαία μια κορυφή i και μετά ο αριθμός των χωρών αυξάνεται με πιθανότητα $1 - p$. Στην πρώτη περίπτωση επιλέγεται τυχαία μια τριγωνική έδρα που περιέχει την κορυφή i και δημιουργείται μια νέα κορυφή στο κέντρο της έδρας. Αυτή η κορυφή συνδέεται με τις τρεις κορυφές της έδρας και η δημιουργούμενη χώρα καταλαμβάνει ένα κλάσμα a του εμβαδού της χώρας i (βλ. Σχήμα 4).

Στη δεύτερη περίπτωση, επιλέγεται τυχαία μια κορυφή j γειτονική της i και ενώνονται οι χώρες i και j . Κατά τη διαδικασία, η ακμή ij και οι έδρες που χωρίζονται από αυτή την ακμή διαγράφονται (βλ. Σχήμα 5). Ο

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,297	0,183	0,123	0,107	0,073	0,058	0,065	0,046	0,049
B	0,309	0,180	0,123	0,106	0,069	0,059	0,058	0,050	0,045
C	0,294	0,181	0,111	0,091	0,084	0,077	0,059	0,052	0,048
D	0,301	0,176	0,125	0,096	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

Πίνακας 4

Πίνακας 3 δείχνει τις τιμές των παραμέτρων σε τρία πειράματα A, B και C. Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει τις μέσες τιμές της αναλογίας των 1, ..., 9 μεταξύ των πρώτων ψηφίων του εμβαδού των χωρών που προκύπτουν έπειτα από πενήντα επαναλήψεις του πειράματος με διαφορετικές αρχικές τιμές. Η τελευταία γραμμή (D) του πίνακα εμφανίζει τη συχνότητα των πρώτων ψηφίων των δυνάμεων του 2.

Θα ήταν ενδιαφέρον να αποδειχθεί ένα θεώρημα που εκτός από το να προσδιορίζει το πεδίο εφαρμογής της ομοιόμορφης κατανομής των κλασματικών μερών των λογαρίθμων θα έλεγχε, για παράδειγμα, και αν τα μεγέθη των εταιρειών ή των τζίρων των εταιριών υπακούν στον εν λόγω νόμο.

Η εμφάνιση αυτής της παράξενης κατανομής των πρώτων ψηφίων σε πολλές διαφορετικές καταστάσεις έχει σχολιαστεί σε πάμπολλα άρθρα. Δεν έχω, όμως, συναντήσει ποτέ κάποιο μαθηματικό θεώρημα ή μια υπόθεση (όπως αυτές που σχολιάσαμε σε τούτο το άρθρο) που να εξηγεί το αναπόφευκτο αυτής της κατανομής (με εξαίρεση, φυσικά, το θεώρημα του Weyl). ◻

ΣΤΟΔ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

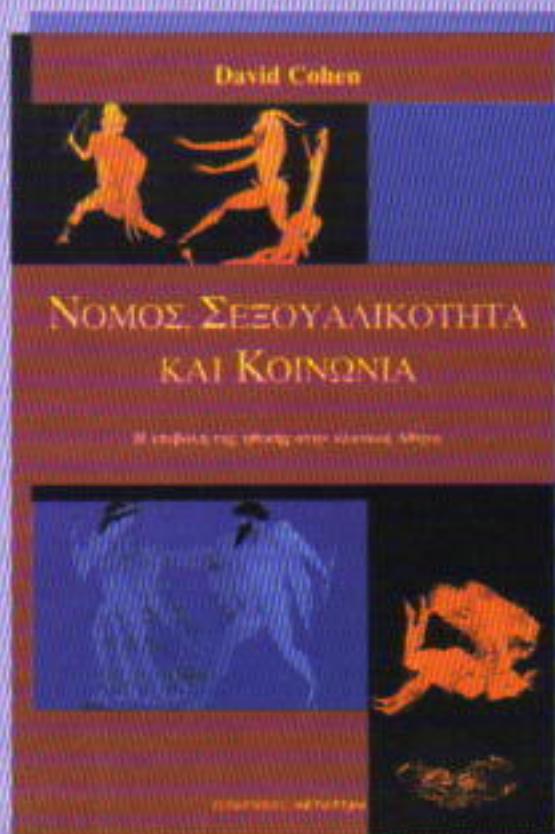


ΚÁΤΟΠΤΡΟ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785
Web site: www.katoptro.gr
e-mail: katoptro@otenet.gr

ΣΤΗ ΣΕΙΡΑ «ΙΣΤΟΡΗΤΗΣ» ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



David Cohen

ΝΟΜΟΣ, ΣΕΞΟΥΑΛΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

Η επιβολή της ηθικής στην κλασική Αθήνα

«Όσοι από εμάς νομίζαμε πως είχαμε προχωρήσει αρκετά στην κατανόηση των προτύπων που δομούν τις πρακτικές της ανδρικής ομοφυλοφιλίας και της μοιχείας στην αρχαία Αθήνα [...] θα πρέπει να αναθεωρήσουμε τη θέση μας [...].»

—The Times Higher Education Supplement

«Το έργο Νόμος, σεξουαλικότητα και κοινωνία του D. Cohen είναι μια φιλόδοξη και πολύπλευρη προσπάθεια να ερμηνευθούν οι σχέσεις νόμου και κοινωνίας στους ιδιαίτερα ολισθητρούς τομείς της μοιχείας, της ομοφυλοφιλίας [...] και της θρησκείας». —The Times Literary Supplement

Επικεντρώνοντας στην εξέταση του κοινωνικού και νομικού πλαισίου της μοιχείας, της ομοφυλοφιλίας, της ασέβειας και της διχοτόμησης δημόσιου-ιδιωτικού στην αρχαία αθηναϊκή κοινωνία, το βιβλίο αυτό επιχειρεί να εξετάσει τα προβλήματα του κοινωνικού ελέγχου και της ρύθμισης της σεξουαλικότητας, με τρόπο που να ενδιαφέρει ένα εξαιρετικά ευρύ αναγνωστικό κοινό: απενθύνεται τόσο στους ιστορικούς, τους φιλολόγους, τους νομικούς, τους κοινωνιολόγους και τους ανθρωπολόγους δύο και στον ανήσυχο γενικό αναγνώστη που ενδιαφέρεται για μια ολοκληρωμένη εικόνα της Αθήνας της Κλασικής εποχής.

Σελ.: 321, 25 × 17 εκ., 7.000 δρχ.

ΕΚΛΟΣΕΙΣ ΚÁΤΟΠΤΡΟ

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M176

Απογευματινοί περίπατοι. Η απόσταση μεταξύ των σπιτιών μιας καθηγήτριας και του βοηθού της είναι μικρή, και τα απογεύματα τους αρέσει να περπατούν από το ένα σπίτι στο άλλο, διασχίζοντας πολλές φορές την ίδια διαδρομή. Μια μέρα ξεκίνησαν και οι δύο την ίδια στιγμή από τα σπίτια τους. Για πρώτη φορά συναντήθηκαν σε απόσταση 55 m από το σπίτι της καθηγήτριας για δεύτερη, σε απόσταση 85 m από το σπίτι του βοηθού. Σε απόσταση 25 m από το σπίτι του βοηθού βρίσκεται ένα περίπτερο, ενώ κοντά στο σπίτι της καθηγήτριας βρίσκεται ένα άλλο μαγαζί που πουλά παγωτά. Γνωρίζουμε ότι αφού έφυγαν από τα σπίτια τους, η καθηγήτρια και ο βοηθός της πέρασαν από το πλησιέστερό τους μαγαζί την ίδια ακριβώς στιγμή. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο μαγαζιά;

M177

Εκθετικό πρόβλημα. Λύστε την εξισώση

$$x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

M178

Για να μη ξεχνάμε τον απειροστικό λογισμό. Αποδείξτε ότι η ανισότητα $\eta_m + \tau \xi_m > 2x$ ισχύει για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x \leq 1$.

M179

Γεωμετρικός τόπος. Φέρουμε τη χορδή AB σε έναν κύκλο κέντρου O και ακτίνας r . Θεωρούμε σημεία P και Q στις προεκτάσεις της χορδής πέρα από τα σημεία A και B , αντίστοιχα, έτσι ώστε $AP = BQ$. Τα σημεία P και Q , καθώς κινούνται κατά

μήκος της ευθείας AB , καθορίζουν δύο ζεύγη εφαπτομένων στον κύκλο O . Αυτές οι εφαπτόμενες, με τη σειρά τους, ορίζουν τέσσερα νέα σημεία —τα σημεία όπου τέμνονται μεταξύ τους. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο όλων αυτών των σημείων τομής.

M180

Πρόβλημα εμβαδού. Η πλευρά BC ενός τριγώνου ABC έχει μήκος a ενώ το μέτρο σε μοίρες της απέναντι γωνίας είναι θ . Η ευθεία που διέρχεται από το μέσον D της BC και το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου τέμνει τις AB και AC στα σημεία M και P , αντίστοιχα. Βρείτε το εμβαδόν του (μη κυρτού) τετραπλεύρου $BMPC$.

Φυσική

Φ176

Παγιδευμένο σφαιρίδιο. Ένα μικρό και βαρύ σφαιρίδιο εισέρχεται διαμέσου μιας τρύπας στο λείο εσωτερικό μιας σφαίρας, η οποία έχει την ίδια μάζα με αυτό αλλά πολύ μεγαλύτερη ακτίνα R . Το σφαιρίδιο κινείται κατά μήκος ευθείας που απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση ίση με $R/2$. (Αφού παγιδεύετε το σφαιρίδιο, η τρύπα από την οποία εισήλθε κλείνει αυτόματα.) Υποθέτοντας ότι οι κρούσεις του σφαιριδίου με τα τοιχώματα της σφαίρας είναι τελείως ελαστικές, προοδιορίστε τις τροχιές του σφαιριδίου και του κέντρου της σφαίρας στο σύστημα αναφοράς δύπου αρχικά η σφαίρα ηρεμούσε. Ακόμη, βρείτε τις παραμέτρους που προσδιορίζουν αυτές τις τροχιές και σημειώστε επ' αυτών τα σημεία όπου λαμβάνουν χώρα κρούσεις.

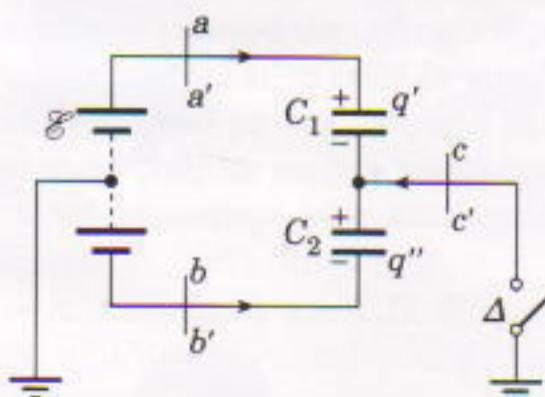
Φ177

Απλώς μια φυσαλίδα. Η εξωτερική

ακτίνα μιας φυσαλίδας από σαπουνοδιάλυμα ισούται με R και το πάχος του τοιχώματός της με h . Ποια είναι η πίεση του αέρα στο εσωτερικό της φυσαλίδας και ποια η πίεση στο εσωτερικό του υμενίου; Θεωρήστε το υμένιο λεπτό ($h \ll R$). Δίνεται η πίεση P_0 του αέρα που περιβάλλει τη φυσαλίδα και ο συντελεστής επιφανειακής τάσης a του σαπουνοδιαλύματος.

Φ178

Τι περνάει; Δύο πυκνωτές με χωρητικότητες $2 F$ και $3 F$ συνδέονται σε σειρά, ενώ οι ελεύθεροι οπλισμοί τους συνδέονται με τους πόλους μιας μπαταρίας με ΗΕΔ $\mathcal{E} = 120$ V, της οποίας το μέσο είναι γειωμένο (Σχήμα 1). Το σύρμα που συνδέει τους δύο πυκνωτές μπορεί επίσης να γειωθεί μέσω ενός διακόπτη Δ . Βρείτε τα φορτία q_1 , q_2 και q_3 τα οποία διέρχονται, κατά τις φορές που υποδεικνύονται στο σχήμα, από τις διατομές aa' , bb' και cc' μόλις κλείσει ο διακόπτης. (I. Slobodetskii)



Σχήμα 1

Φ179

Δικτύωμα LC με δύο ακροδέκτες. Δύο πανομοιότυπα πηνία συντελεστών αυτεπαγωγής L τυλίγονται σε έναν δακτυλιοειδή σιδηρομαγνητικό

Η συνέχεια στη σελ. 69 ↵

Kai ήγα για τα άτομα

«... τούτα τα πρωτογενή σωματίδια ... είναι ασυγκριτόσιμα σκληρά, ώστε ουδέποτε

HΙΔΕΑ ΤΗΣ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ της ύλης αναμφίβολα γεννήθηκε από την πανάρχαια τάση των ανθρώπων να δουν τον κόσμο που τους περιβάλλει ως ένα συστηματικά δομημένο σύνολο. Η αναζήτηση μιας αιώνιας και αμετάβλητης ουσίας από την οποία αποτελούνται όλα τα σώματα ξεκινά από τη μακρινή αρχαιότητα και φτάνει ώς τις μέρες μας. Παρότι δεν έχει ακόμη δοθεί «τελική λύση» σε αυτό το πρόβλημα, στην πορεία έχουν πραγματοποιηθεί ορισμένες εξαιρετικές ανακαλύψεις. Αποδείχθηκε ότι το άτομο και ο πυρήνας του έχουν σύνθετη δομή. Ο πυρήνας αποτελείται από σωματίδια τα οποία δεν μπορούν να ζήσουν για πολύ έχω απ' αυτόν. Και μεταξύ άλλων ανακαλύφθηκαν η ραδιενέργεια, ο μετασχηματισμός διαφόρων ειδών στοιχειωδών σωματιδίων σε άλλα, οι αλυσιδωτές και οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις κ.λπ. Τις τελευταίες δεκαετίες, πληθώρα ανακαλύψεων έχουν αλλάξει ριζικά τις επιστημονικές απόψεις για τη δομή της ύλης και έχουν εγείρει πλήθος νέων προβλημάτων που πρέπει να μελετη-

θούν. Ο χαρακτήρας των φυσικών πειραμάτων έχει αλλάξει ριζικά. Σήμερα, για την εκτέλεση κάποιου πειράματος μπορεί να απαιτούνται οι συντονισμένες προσπάθειες χιλιάδων ανθρώπων. Και οι μέθοδοι της ατομικής και πυρηνικής φυσικής βρίσκουν στις μέρες μας πολλές και εκπληκτικές πρακτικές εφαρμογές.

Στο παρόν άρθρο σκιαγραφούμε με πολύ αδρές πινελιές τον περίπλοκο κόσμο που κρύβεται στα μικροσκοπικά σωματίδια της ύλης.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Πόσα κβάντα φωτός διαφορετικής ενέργειας μπορεί να εκπέμψει ένα άτομο υδρογόνου αν το ηλεκτρόνιο του καταλαμβάνει την τρίτη ενεργειακή στάθμη (επίπεδο);

2. Πώς εκδηλώνεται η τάση ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται σε κάποιο φλοιό του ατόμου;

3. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στη συχνότητα περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα και τη συχνό-

τητα του εκπεμπόμενου φωτός;

4. Από το βορβαρδισμό ατόμων βορίου με ταχέως κινούμενα πρωτόνια μέσα σε θάλαμο νεφώσεως Wilson εμφανίζονται τρεις σχεδόν πανομοιότυπες τροχιές από σωματίδια τα οποία κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις. Ποια είναι αυτά τα σωματίδια;

5. Γιατί δεν συνοδεύονται όλα τα είδη ραδιενέργειας από μεταβολές στις χημικές ιδιότητες των ουσιών;

6. Πότε μπορεί να θεωρηθεί σταθερή η ενεργότητα (ρυθμός διασπάσεως) μιας ραδιενεργούς ουσίας;

7. Ποιο από τα δύο διαρκεί περισσότερο: τρεις χρόνοι υποδιπλασιού (ημιζωής) ή δύο μέσοι χρόνοι ζωής του πυρήνα του ίδιου ραδιενεργού στοιχείου;

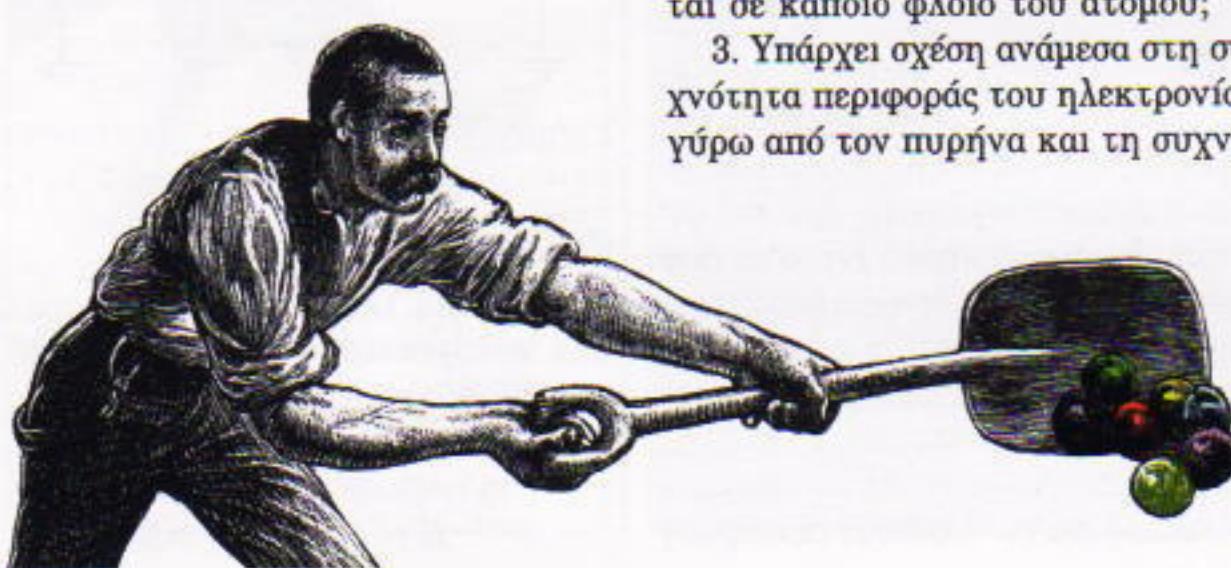
8. Η ενέργεια των σωματιδίων άλφα που εκπέμπει μια ραδιενεργός ουσία λαμβάνει μόνο διακριτές τιμές. Τι συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί για τις πιθανές τιμές της ενέργειας του πυρήνα;

9. Γιατί τα σωματίδια άλφα που εκπέμπονται από ραδιενεργές ουσίες δεν μπορούν να προκαλέσουν πυρηνικές αντιδράσεις βαρέων στοιχείων;

10. Γιατί τα σωματίδια άλφα που εκπέμπονται από ένα συγκεκριμένο είδος πυρήνων έχουν όλα την ίδια ενέργεια, ενώ οι ενέργειες των σωματιδίων βήτα που εκπέμπονται από ένα συγκεκριμένο είδος πυρήνων διαφέρουν;

11. Εφόσον τα νουκλεόνια αλληλεπιδρούν πυρηνικά και έλκονται μεταξύ τους, γιατί δύο οι πυρήνες δεν έχουν ενωθεί σε έναν τεράστιο υπερπυρήνα;

12. Γιατί τα στοιχεία που κατα-



ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΠΥΡΗΝΕΣ ΤΟΥΣ

«σκληρότερα από κάθε σώμα το οποίο συγκροτούν φθείρονται ούτε διασπώνται».

—Ισαάκ Νεύτων

λαμβάνουν τις μεσαίες και τις τελευταίες θέσεις του Περιοδικού Πίνακα είναι ακατάλληλα για να χρησιμοποιηθούν ως επιβραδυντές νετρονίων;

13. Η μάζα ηρεμίας ενός πυρήνα είναι πάντοτε μικρότερη από το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των συστατικών του νουκλεονίων. Μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι κατά το σχηματισμό των πυρήνων παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της μάζας;

Μικροπειραματισμοί

Θερμαίνετε ένα σιδερένιο καρφί με ένα καμινέτο υγραερίου μέχρι να λευκοπυρωθεί. Μπορείτε να θερμαίνετε ένα κομμάτι γυαλί ώστε να φωτοβολεί το ίδιο;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

... Ο Θαλῆς ο Μιλήσιος, ο θεμελιωτής της αρχαίας φιλοσοφίας, ανήγαγε την ποικιλομορφία της ύλης και των φαινομένων σε μια πρωταρχική ουσία: το νερό. Ο Αναξιμένης, μαθητής του Θαλή και μέλος της σχολής των Μιλήσιων φιλοσόφων, απέδωσε το ρόλο της



πρωταρχικής ουσίας στον αέρα, από την πύκνωση και αραίωση του οποίου θεωρούσε ότι δημιουργείται κάθε μορφή ύλης. Απεναντίας, ο Ηράκλειτος ο Εφέσιος, σύγχρονος του Θαλή, προτίμησε τη φωτιά.

... Το πλανητικό μοντέλο του ατόμου, το οποίο πρότεινε ο Rutherford για να εξηγήσει τα πειράματά του πά-

νω στη δομή του ατόμου, είχε επινοηθεί θεωρητικά από τον γάλλο φυσικό Jean Baptiste Perrin, διάσημο για τις πειραματικές μελέτες του στην κίνηση Brown. Η σχετική εργασία του είχε τίτλο «Η πυρηνική-πλανητική δομή του ατόμου».

... Ήδη από το 1815, ο William Prout, γιατρός από το Εδιμβούργο, είχε εισαγάγει την υπόθεση ότι όλα τα χημικά στοιχεία συντίθενται από άτομα υδρογόνου. Το 1911, ο Rutherford πρότεινε ότι ο πυρήνας αποτελείται από σωματιδια αλφα.

... Ο Rutherford υπέθεσε ότι το φορτίο του πυρήνα είναι ανάλογο με το ατομικό βάρος του στοιχείου. Τη σωστή απόψη ότι το φορτίο του πυρήνα είναι ανάλογο με τον αριθμό ταξινόμησης του στοιχείου στον Περιοδικό Πίνακα διατυπώθηκε από τον ολλανδό ερασιτέχνη φυσικό Van der Brook. Ο Rutherford αμφισβήτησε αυτή την ιδέα θεωρώντας την αστεία και αβάσιμη.

... Αν ο Enrico Fermi είχε κατορθώσει να εξηγήσει πλήρως τα αποτελέσματα των πειραμάτων του επί της τεχνητής ραδιενέργειας, η ανθρωπότητα θα γνώριζε ήδη από το 1934 ότι η κατασκευή της ατομικής βόμβας είναι κατ' αρχήν δυνατή. Ο Rutherford, ο οποίος τότε βρισκόταν ακόμη εν ζωή, διέψευσε κατηγορηματικά τη δυνατότητα πρακτικής χρήσης της πυρηνικής ενέργειας.

... Οι μέθοδοι της πυρηνικής φυσι-

κής εφαρμόζονται με επιτυχία στην εγκληματολογία, όπου καθιστούν δυνατή την εξέταση ουσιών με μάζα μικρότερη των 10^{-10} g. Για παράδειγμα, μπορεί να διαπιστωθεί η ταυτότητα ενός ανθρώπου από μία και μόνο τρίχα του.

... Προκειμένου να διατηρείται ζεστό το εσωτερικό του Lunokhod (το πρώτο σεληνιακό ερευνητικό όχημα) και να συντηρείται η λειτουργία του στην επιφάνεια της Σελήνης για αρκετούς μήνες, ήταν εξοπλισμένο με μια συσκευή θέρμανσης η οποία περιείχε σφραγισμένες κάψουλες γεμάτες ραδιενέργεις ουσίες.

... Η σύμφυτη ραδιενέργεια ανδρών και γυναικών διαφέρει, διότι στους οργανισμούς των δύο φύλων περιέχονται διαφορετικές συγκεντρώσεις από το ραδιοϊσότοπο κάλιο-40. □

—A. Leonovich

Δείτε ακόμα τα άρθρα:

- S.L. Glashow, «Τα στοιχειώδη σωματιδια», Ιούλ./Αύγ. 1995.
- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Πεδία εστιασμού», Μάρ./Απρ. 1996.
- H. Schreiber, «Παιχνίδια με τα ονόματα των στοιχείων», Νοέμ./Δεκ. 1996.
- S.R. Filonovich, «Η δύναμη της ομοιότητας», Μάρ./Απρ. 1997.
- A. Korzhuyev, «Το κβαντικό άλμα του Bohr», Μάρ./Απρ. 1999.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63**



Συνεχή κλάσματα

Όταν το αρκετά κοντά είναι αρκετά καλό

Y. Nesterenko και E. Nikishin

MΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ, ΕΝΑ ΠΕΔΙΟ Ερευνας που υπόσχεται πολλά και φαίνεται σημαντικό δεν επαληθεύει τις προσδοκίες. Ο αριθμός των ερευνητών που εργάζονται στο πεδίο μειώνεται, και το θέμα χάνει τη σημασία του. Μια τέτοια περιοχή μαθηματικής έρευνας είναι η θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, συνεχή κλάσματα διαφόρων ειδών εμφανίζονταν συχνά σε μαθηματικές εργασίες. Πολλά σημαντικά θεωρήματα για τα συνεχή κλάσματα αποδείχθηκαν κατά τον 19ο αιώνα και λίγο νωρίτερα. Η προσδοκία ήταν ότι η πλήρης κατανόηση των συνεχών κλασμάτων θα οδηγούσε σε νέα αποτελέσματα στη θεωρία αριθμών και τη μαθηματική ανάλυση. Όμως οι προσδοκίες επαληθεύτηκαν μόνο εν μέρει. Αργότερα, λόγω της ανάπτυξης νέων ισχυρών μεθόδων, ειδικά στη θεωρία αριθμών, η μελέτη των συνεχών κλασμάτων λίγο ώς πολύ εγκαταλείφθηκε.

Ωστόσο, όπως ακριβώς ο Βόρειος Πόλος προσελκύει πάντοτε κάποιους επισκέπτες, έτσι και τα προβλήματα που αφορούν συνεχή κλάσματα, προβλήματα που συχνά έχουν απλή διατύπωση και μοιάζουν εύκολα, δελεάζουν τους μαθηματικούς να ερευνήσουν τη φύση αυτών των παράξενων αντικειμένων. Πολλά σημαντικά προβλήματα των σύγχρονων μαθηματικών και της φυσικής οδηγούν σε αντικείμενα παρόμοια με τα συνε-

χή κλάσματα. Γι' αυτό, οι σχετικές μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί αποδεικνύονται χρήσιμες σε πολλά άλλα προβλήματα. Σε τούτο το άρθρο εξετάζουμε μόνο προβλήματα που συνδέονται με τη θεωρία αριθμών, από την οποία κατάγεται η θεωρία των συνεχών κλασμάτων.

Ημερολόγια και γρανάζια

Πόσες ημέρες έχει ένα έτος; Όλοι γνωρίζουν ότι ένα συνηθισμένο έτος έχει 365 ημέρες, ενώ το δίσεκτο 366. Τα δίσεκτα έτη είναι αυτά που διαιρούνται διά του 4 — για παράδειγμα, 1904, 1908, ..., 1980, 1984, ..., 1996. Όμως, τα 1800, 1900, 2100 και 2200 δεν είναι δίσεκτα, ενώ το 2000 και το 2400 είναι. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Η εξήγηση είναι μάλλον απλή. Η Γη περιστρέφεται ομαλά γύρω από τον άξονά της, εκτελώντας μία περιστροφή κάθε ημέρα. Ακόμη, χρειάζεται 365,2421987... ημέρες για να εκτελέσει μία περιφορά γύρω από τον Ήλιο. Αυτή η περίοδος ονομάζεται έτος. Οι επιπλέον 0,242... ημέρες μοιάζουν μικρό διάστημα, εάν όμως ορίσουμε ως έτος τις 365 ημέρες, τότε το σφάλμα συσσωρεύεται συνεχώς. Στην αρχαιότητα, η διάρκεια του έτους ήταν γνωστή μόνο κατά προσέγγιση, και το συσσωρευμένο σφάλμα είχε καταλήξει αρκετά μεγάλο. Για παράδειγμα, στην αρχαία Ρώμη, το 46 π.Χ. η διαφορά είχε φτάσει τις 90 ημέρες.

Για να βρούμε έναν νόμο για την

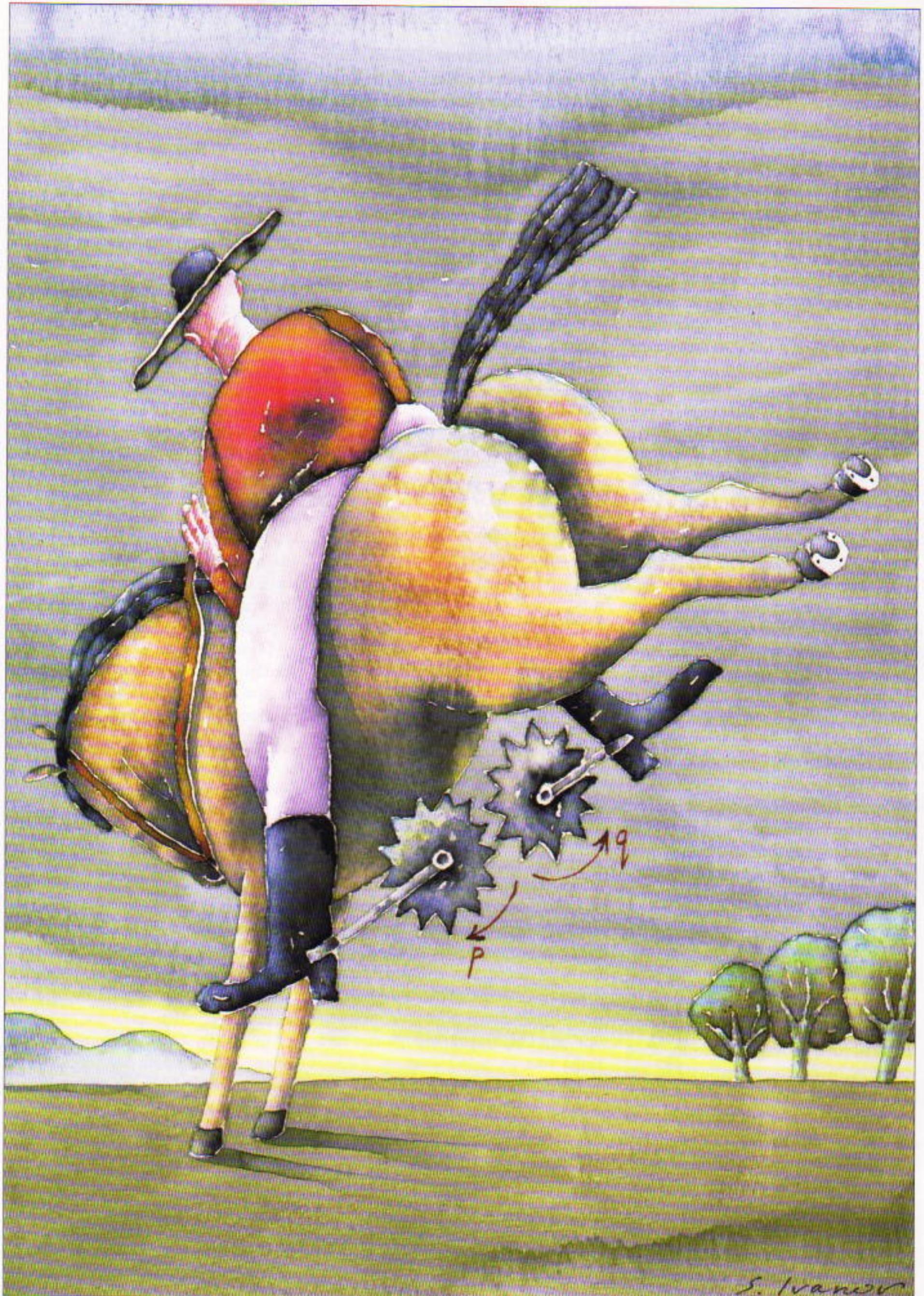
εναλλαγή των συνήθων και των δίσεκτων ετών, πρέπει να επιλέξουμε τη διάρκεια q ενός κύκλου (μετά τον οποίο η ακολουθία συνήθων και δίσεκτων ετών επαναλαμβάνεται) και το πλήθος p των δίσεκτων ετών στη διάρκεια του κύκλου. Ας γράψουμε τη διάρκεια του έτους ως $365 + a$, όπου $a = 0,242\dots$. Οι θετικοί ακέραιοι p και q πρέπει να επλεγούν έτσι ώστε η ποσότητα

$$\beta = qa - p$$

να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη, χωρίς να είναι τα p και q πολύ μεγάλα. Στην πραγματικότητα, χρειάζεται να επιλέξουμε μόνο το q : μετά, το p είναι ο ακέραιος που βρίσκεται εγγύτερα στο qa . Τότε, σε q έτη θα περάσουν $365q + p$ ημέρες. Από την εξίσωση $365q + p = q(365 + a) - \beta$ έπειτα ότι σε $365q + p$ ημέρες η Γη θα εκτελέσει γύρω από τον Ήλιο

$$q - \frac{\beta}{365 + a} \equiv q$$

περιφορές. Σφάλμα μίας ημέρας συσσωρεύεται έπειτα από $1/\beta$ τέτοιους κύκλους, δηλαδή σε q/β έτη. Σήμερα χρησιμοποιούμε το γρηγοριανό ημερολόγιο, για το οποίο $q = 400$. Από αυτά τα 400 έτη, τα 303 είναι συνήθη και τα 97 δίσεκτα — αυτά που διαιρούνται διά του 4. Εξαίρεση αποτελούν τα έτη των εκατονταετιών, τα οποία δεν είναι δίσεκτα, εκτός αν διαιρούνται διά του 400. Επομένως, η μέση διάρκεια του έτους σύμφωνα



με το γρηγοριανό ημερολόγιο είναι 365,242500. Η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική: για να συσσωρευτεί σφάλμα μίας ημέρας, χρειάζονται 3.300 περίπου έτη. Αν είχαμε πάρει $q = 128$ και $p = 31$, θα προέκυπτε ακόμη καλύτερη προσέγγιση. Όμως, ένα ημερολόγιο με κύκλους 28 ετών θα ήταν λιγότερο εξυπηρετικό.

Εδώ αντιμετωπίζουμε ένα σημαντικό μαθηματικό πρόβλημα: αν δοθεί ένας αριθμός a , βρείτε αρκετά μικρούς ακεραίους p και q τέτοιους ώστε $a = qa - p$

$$b = qa - p$$

να είναι δύο το δυνατόν μικρότερος.

Ένα παρόμοιο πρόβλημα ανακύπτει κατά το σχεδιασμό των οδοντωτών τροχών. Για να μεταδοθεί η περιστροφική κίνηση του ενός τροχού στον άλλο, πρέπει να κατασκευάσουμε q δόντια στον ένα και p στον άλλο, έτσι ώστε ο λόγος p/q να βρίσκεται δύο το δυνατόν πλησιέστερα σε δεδομένο αριθμό ω (ω είναι ο ζητούμενος λόγος των ταχυτήτων περιστροφής). Προφανώς για λόγους οικονομίας, τα p και q πρέπει να επλεγούν δύο το δυνατόν μικρότερα.

Υπάρχουν πολλά άλλα παραδείγματα που οδηγούν στο πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης πραγματικών αριθμών από ρητούς. Στα παραδείγματα περιλαμβάνονται οι μουσικές κλίμακες, εφαρμογές στην αριθμητική ανάλυση και θεωρητικά προβλήματα της ουράνιας μηχανικής.

Τα συνεχή κλάσματα μας προσφέρουν ένα εργαλείο για την εντοπισμό των βέλτιστων (με μία συγκεκριμένη έννοια) ρητών προσεγγίσεων. Τα συνεχή κλάσματα έχουν χρησιμοποιηθεί για υπολογιστικούς σκοπούς επί πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Ήδη το 1572, ο ιταλός μαθηματικός και μηχανικός R. Bombelli (1526-1572) τα χρησιμοποίησε για να υπολογίσει τη $\sqrt{13}$. Ο Βρετανός W. Brouncker (1620-1684) τα χρησιμοποίησε αργότερα για να προσεγγίσει καλύτερα την τιμή του π . Ο εξέχων φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός C. Huygens (ο εφευρέτης του ρολογιού με εκκρεμές) περιέγραψε πρώτος κατά ποιά έννοια τα συνεχή κλάσματα δί-

νουν τη βέλτιστη προσέγγιση πραγματικών αριθμών. Και ο μέγας Euler (1707-1783) απέδειξε συγκεκριμένα θεωρήματα που αφορούν τα συνεχή κλάσματα και βρήκε ένα συνεχές κλάσμα για τον αριθμό e (τη βάση των φυσικών λογαρίθμων). Μετά τον Euler, αναρίθμητοι είναι οι μαθηματικοί που συνέβαλαν στη θεωρία των συνεχών κλασμάτων, και είναι δύσκολο να τους παραθέσουμε όλους. Οι εργασίες του εξέχοντος ρώσου μαθηματικού P.L. Chebyshev (1821-1894) εγκαινίασαν την ενεργή ανάπτυξη μιας θεωρίας που ασχολείται με συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται από συνεχή κλάσματα.

Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη και συνεχή κλάσματα

Έστω p και q δύο θετικοί ακέραιοι. Αν εκτελέσουμε διαδοχικές διαιρέσεις λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + q_1, \quad 0 < q_1 < q, \\ q &= a_1 q_1 + q_2, \quad 0 < q_2 < q_1, \\ q_1 &= a_2 q_2 + q_3, \quad 0 < q_3 < q_2, \\ &\dots \\ q_{k-2} &= a_{k-1} q_{k-1} + q_k, \quad 0 < q_k < q_{k-1}, \\ q_{k-1} &= a_k q_k. \end{aligned}$$

Αφού η q_1, q_2, \dots, q_k είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, ένας από αυτούς θα ισούται με 0 (στην πραγματικότητα, βάσει του προηγουμένου συμβολισμού θα ισχύει $q_{k+1} = 0$). Επομένως, η ανωτέρω ακολουθία εξισώσεων είναι πεπερασμένη. Αυτή η διαδικασία καλείται αλγόριθμος του Ευκλείδη. Αποδεικνύεται ότι ο προκύπτων αριθμός q_k είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των p και q . Δεν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός στο άρθρο, και έτσι παραλείπουμε την απόδειξή του.

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{q_1}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{q_2}{q_1}} = \dots \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}}. \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε με την εξής διαδικασία. Έστω μια πραγματικός αριθμός. Θέτουμε

$$\mu = a_0 + \frac{1}{\mu_1},$$

όπου a_0 είναι ακέραιος και $\mu_1 > 1$. Αν το μ_1 δεν είναι ακέραιος, συνεχίζουμε τη διαδικασία γράφοντας το μ_1 ως $\mu_1 = a_1 + 1/\mu_2$, όπου a_1 είναι θετικός ακέραιος και $\mu_2 > 1$. Συνεπώς,

$$\mu = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{\mu_2}}}.$$

Αν το μ_2 δεν είναι ακέραιος, η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί. Επομένως, μετά από k βήματα καταλήγουμε στη σχέση

$$\mu = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\mu_{k+1}}}}} \quad (1')$$

Ο «πολυώροφος» συμβολισμός του κλάσματος στη σχέση (1') είναι ιδιαίτερα άβολος, και έτσι θα χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο, περισσότερο συμπαγή συμβολισμό:

$$\begin{aligned} \mu &= a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{|a_{k-1}|} + \frac{1}{|\mu_k|}, \end{aligned} \quad (1)$$

όπου $\mu_k > 1$.

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι αν $\mu = p/q$ είναι ρητός αριθμός, τότε, για κάποιο k , ο μ_k θα είναι ακέραιος. Είναι επίσης προφανές ότι αν, για κάποιο k , ο μ_k είναι ακέραιος, τότε ο μ είναι ρητός. Όμως, αν ο μ είναι άρρητος, η διαδικασία δεν τερματίζεται ποτέ και καταλήγουμε σε ένα άπειρο συνεχές κλάσμα:

$$\begin{aligned} \mu &= a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{|a_{k-1}|} + \frac{1}{|a_k|} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Εδώ το σύμβολο της ισότητας είναι προσωρινό, διότι δεν είναι πρ

φανές το νόημα της παράστασης στα δεξιά του. Για να αποκτήσει νόημα, θεωρούμε πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής

$$\pi_k = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}},$$

τα οποία καλούνται συγκλίνουσες του συνεχούς κλάσματος (2). Ορίζουμε ότι το δεξί μέλος της (2) είναι το όριο των συγκλίνουσών:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k.$$

Το επόμενο σύνολο προβλημάτων παρουσιάζει τις βασικές ιδιότητες της στοιχειώδους θεωρίας των συνεχών κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται η ισότητα (2). (Σημείωση: δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζετε απειροστικό λογισμό για να λύσετε τα περισσότερα απ' αυτά τα προβλήματα. Για να τα αντιμετωπίσετε, αρκεί η μέθοδος της τέλειας επαγωγής.)

Βασικές ιδιότητες των συνεχών κλασμάτων

1. Έστω $\pi_k = p_k/q_k$ μια συγκλίνουσα του συνεχούς κλάσματος (2). Αποδείξτε τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, \quad p_1 = a_1 p_0 + 1, \quad \dots, \\ p_{k+1} &= a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \quad \dots \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1, \quad \dots, \\ q_{k+1} &= a_{k+1} q_k + q_{k-1}, \quad \dots \end{aligned}$$

(Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τέλεια επαγωγή.)

2. Αποδείξτε τις επόμενες σχέσεις:

- (i) $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1.$
- (ii) $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1}, \quad k \geq 2.$
- (iii) $\pi_{n-1} - \pi_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1.$
- (iv) $\pi_{k-2} - \pi_k = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}, \quad k \geq 2.$

(Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1 και τέλεια επαγωγή για να αποδείξετε τις (i) και (ii). μετά τις (i)

και (ii) για να αποδείξετε τις (iii) και (iv).)

3. Αποδείξτε ότι η ακολουθία των συγκλίνουσών $\pi_0, \pi_2, \pi_4, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα:

$$\pi_0 < \pi_2 < \pi_4 < \pi_6 < \dots,$$

και ότι η ακολουθία των συγκλίνουσών $\pi_1, \pi_3, \pi_5, \dots$ είναι γνησίως φθίνουσα:

$$\pi_1 > \pi_3 > \pi_5 > \dots,$$

(Υπόδειξη: Δείτε τις (iii) και (iv) του προηγούμενου προβλήματος.)

4. Έστω μ_k οι αριθμοί που ορίζονται από την (1). Αποδείξτε τη σχέση

$$\mu = \frac{p_{k-1}\mu_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\mu_k + q_{k-2}}, \quad k \geq 2.$$

(Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τέλεια επαγωγή.)

5. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n\mu - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

(Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 4 για $k = n$ και το Πρόβλημα 1.)

6. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \mu.$$

(Υπόδειξη. Στην πραγματικότητα, έχετε μόνο να αποδείξετε ότι το q_n αυξάνεται επ' άπειρον. Τότε, το αποτέλεσμα του Προβλήματος 5 είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορίου.)

Από τα Προβλήματα 1-6 διαπιστώνουμε ότι οι συγκλίνουσες δίνουν μια αρκετά καλή προσέγγιση του μ . Επομένως, από τις προσεγγίσεις του Προβλήματος 5 και την ανισότητα $q_{n+1} > q_n$, συνεπάγεται ότι αν το μ είναι άρρητος, τότε η ανισότητα

$$\left| \mu - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

ισχύει για όλες τις συγκλίνουσες $\pi_n = p_n/q_n$ του συνεχούς κλάσματος που αντιστοιχεί στο μ .

Αριθμητικά παραδείγματα

Μερικές φορές το συνεχές κλάσμα (2) που αντιστοιχεί στο μ γράφεται ως $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$. Αποδεικνύεται ότι για κάθε ακολουθία ακεραίων a_0, a_1, a_2, \dots (με $a_0 \geq 0$ και $a_j \geq 1$ για $j \geq 1$) υπάρχει ένας μοναδικός θετικός ακέραιος μ τέτοιος ώστε

$$\mu = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Αν είναι γνωστή η ακολουθία a_0, a_1, a_2, \dots , τότε η ακολουθία των συγκλίνουσών υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια των σχέσεων που αποδείχθηκαν στο Πρόβλημα 1 και τη συμπλήρωση του Πίνακα 1.

Παράδειγμα 1. Βρείτε το ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$ ως συνεχές κλάσμα. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_1 = 2 \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_2 = 2. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι όλα τα στοιχεία της ακολουθίας $\mu_j, j = 1, 2, \dots$, ισούνται με $\sqrt{2}+1$, ενώ όλα τα στοιχεία της ακολουθίας $a_j, j = 1, 2, \dots$, ισούνται με 2.

Επομένως,

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

Αν συμπληρώσουμε τον Πίνακα 2, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πρώτες συγκλίνουσες του $\sqrt{2}$. Προκύπτει ότι η ακολουθία συγκλίνουσών $1/1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, \dots$.

Από το Πρόβλημα 5 έπειται ότι

$$\left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right| < \frac{1}{70 \cdot 169} < 10^{-4}.$$

a		a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	...
p	1	a_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n
q	0	1	q_1	q_2	...	q_{n-1}	q_n

Πίνακας 1

a		1	2	2	2	2	2	2	...
p	1	1	3	7	17	41	99		...
q	0	1	2	5	12	29	70	169	...

Πίνακας 2

Άρα, το σφάλμα της προσέγγισης του $\sqrt{2}$ από το ρητό κλάσμα $99/70$ είναι μικρότερο του $0,0001$.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το περιοδικό συνεχές κλάσμα

$$[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots].$$

Αυτό το γράφουμε σε συντομογραφία ως $[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$. Ο αριθμός που αντιστοιχεί σε τούτο το κλάσμα είναι δυνατόν να βρεθεί ως εξής. Ονομάζουμε τον αριθμό μ , και έχουμε την εξίσωση

$$\mu = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \mu}$$

(γιατί);, ή, μετά από απλές πράξεις,

$$\mu = \frac{21 + 8\mu}{8 + 3\mu}.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $\mu^2 = 7$ και, συνεπώς, αφού $\mu > 2$, βρίσκουμε ότι $\mu = \sqrt{7}$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την τιμή οποιουδήποτε περιοδικού συνεχούς κλάσματος.

Βέλτιστες προσέγγισεις και συνεχή κλάσματα

Η βέλτιστη προσέγγιση ενός αριθμού μ είναι ένα κλάσμα p/q ($q > 0$) τέτοιο ώστε

$$|q'\mu - p'| > |qm - p|$$

για κάθε $1 < q' < q$ και για κάθε p' . Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα. Κάθε βέλτιστη προσέγγιση του μ είναι μια συγκλίνουσα του μ , για $k > 1$. Το αντίστροφο αληθεύει επίσης: Κάθε συγκλίνουσα p_k/q_k (για $k > 1$) είναι μια βέλτιστη προσέγγιση του μ .

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος δεν είναι δύσκολη και την αφήνουμε ως άσκηση στους αναγνώστες.

Αποδείξτε ότι οι s και t είναι ισοδύναμοι.

9. Αποδείξτε ότι αν οι s και t είναι ισοδύναμοι, τα συνεχή τους κλάσματα έχουν τη μορφή (3).

Δευτεροβάθμια ριζικά

Οι άρρητοι αριθμοί που είναι ρίζες δευτεροβάθμιων εξιώσεων με ακέραιους συντελεστές ονομάζονται δευτεροβάθμια ριζικά. Μπορούν να γραφούν ως

$$\pm \frac{P + \sqrt{D}}{Q},$$

όπου τα P , Q και D είναι ακέραιοι και το D δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Για παράδειγμα, οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $1 + \sqrt{2}$ και $(5 - \sqrt{7})/2$ ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Το 1770, ο Lagrange απέδειξε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα. Τα δευτεροβάθμια ριζικά, και μόνον αυτά, έχουν περιοδικά συνεχή κλάσματα.

Όπως και στην περίπτωση των περιοδικών δεκαδικών αναπτυγμάτων (των ρητών αριθμών), η περίοδος μπορεί να ξεκινά μετά μια συγκεκριμένη θέση του αναπτύγματος.

Το γεγονός ότι η τιμή ενός περιοδικού συνεχούς κλάσματος είναι δευτεροβάθμιο ριζικό αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο Παράδειγμα 2. Η απόδειξη της αντίστροφης πρότασης είναι πολύ δυσκολότερη. Θα την αποδείξουμε μόνο για μια σημαντική ειδική περίπτωση: τα ανηγμένα ριζικά. Ένα δευτεροβάθμιο ριζικό μ ονομάζεται ανηγμένο αν $\mu > 1$ και αν η δεύτερη ρίζα μ' της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που έχει ρίζα το μ (η καλούμενη συζυγής του μ) ικανοποιεί τις ανισότητες

$$-1 < \mu' < 0.$$

Προβλήματα

10. Αποδείξτε την επόμενη πρόταση: Αν μ είναι ένα ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό, τότε

$$\mu = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}, \quad (4)$$

όπου

$$0 < P < \sqrt{D}.$$

Επιπλέον, το $P^2 - D$ διαιρείται διά του Q .

11. Αν το μ είναι ένα ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό και

$$\mu = a_0 + \frac{1}{\mu_1},$$

όπου $a_0 = |\mu|$, τότε το μ_1 είναι επίσης ανηγμένο δευτεροβάθμιο ριζικό.

Από το Πρόβλημα 11 έπειται ότι όλοι οι αριθμοί μ_n της ακολουθίας που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\mu_n = a_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}, \quad a_n = [\mu_n]$$

θα είναι επίσης ανηγμένοι. (Με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x , δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το x .) Επιπλέον, θα εκφράζονται όλοι από τον τύπο (4) με το ίδιο D . Από την ανισότητα (5) έπειται ότι αυτή η ακολουθία περιέχει πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών αριθμών και, επομένως, για συγκεκριμένους αριθμούς m και n έχουμε,

$$\mu_n = \mu_m.$$

Τότε, $\mu_{n+1} = \mu_{m+1}$, $\mu_{n+2} = \mu_{m+2}$, κ.ο.κ. Συνεπώς η ακολουθία $\{\mu_n\}$ είναι περιοδική. Το θεώρημα αποδείχθηκε για τα ανηγμένα ριζικά.

Αν μ είναι ένα τυχαίο δευτεροβάθμιο ριζικό, τότε η ακολουθία $\{\mu_n\}$ θα περιέχει έναν ανηγμένο αριθμό. Από αυτό το γεγονός έπειται χωρίς δυσκολία η απόδειξη του θεωρήματος για τη γενική περίπτωση. Για να αποδείξουμε αυτό το γεγονός, μπορούμε να εκφράσουμε το μ_n συναρτήσει των όρων του Προβλήματος 4 και των αριθμητών και παρονομαστών των συγκλινουσών του μ . Για να αποδείξουμε ότι οι συγκλινουσες του μ τείνουν στο μ , πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και το Πρόβλημα 5. Με αυτές τις υποδείξεις, ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται θα πρέπει να είναι σε θέση να ολοκληρώσει την απόδειξη.

Αποδεικνύεται ότι η περίοδος των συνεχών κλασμάτων των ανηγμένων δευτεροβάθμιων ριζικών ξεκινά από την αρχή του αναπτύγματος. Τέτοια συνεχή κλάσματα καλούνται καθαρώς περιοδικά. Αληθεύει και η αντίστροφη πρόταση. Το γεγονός αυτό αποδείχθηκε για πρώτη φορά το 1828 από τον γάλλο μαθηματικό Évariste Galois (τότε, μαθητή λυκείου).

Περίοδοι των συνεχών

κλασμάτων

Οι ιδιότητες των περιόδων δεν έχουν μόνο κομψότητα αλλά μας βοηθούν επίσης να επιλύσουμε συγκεκριμένες εξισώσεις. Ας αποδείξουμε μερικές από αυτές.

Έστω ο αριθμός

$$a = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ανηγμένος. Έπειτα από απλές πράξεις προκύπτει το εξής ανάπτυγμα ως συνεχές κλάσμα με περίοδο μήκους 4:

$$a = [1; 1, 1, 4].$$

Ο συζυγής του a είναι

$$a' = \frac{-\sqrt{7} + 2}{3}.$$

Αν αναπτύξουμε τον αριθμό

$$-\frac{1}{a'} = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \sqrt{7} + 2$$

ως συνεχές κλάσμα, βρίσκουμε

$$-\frac{1}{a'} = [4; 1, 1, 1].$$

Η περίοδος του κλάσματος μας έχει αντιστραφεί. Είναι τυχαίο αυτό το φαινόμενο;

Πρόβλημα 12. Αν ένα δευτεροβάθμιο ριζικό εκφράζεται από το καθαρώς περιοδικό συνεχές κλάσμα

$$[a_0; a_1, \dots, a_n],$$

τότε ο αριθμός $-1/a'$, όπου a' είναι ο συζυγής του a , εκφράζεται από το καθαρώς περιοδικό συνεχές κλάσμα

$$[a_n; a_{n-1}, \dots, a_0]$$

με περίοδο ίση με του a , αλλά γραμμένη με την αντίστροφη σειρά.

Αν το D είναι θετικός ακέραιος αλλά όχι τέλειο τετράγωνο και $a_0 = [\sqrt{D}]$, τότε ο $a = a_0 + \sqrt{D}$ είναι ανηγμένος αριθμός ($a' = a_0 - \sqrt{D}$ και $-1 < a_0 - \sqrt{D} < 0$). Επομένως,

$$\sqrt{D} + a_0 = [2a_0; a_1, \dots, a_n],$$

και άρα

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, \dots, a_n, 2a_0]. \quad (6)$$

Με τη βοήθεια της πρότασης του Προβλήματος 12 μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το επόμενο γεγονός.

Πρόβλημα 13. Αν το D δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε το συνεχές κλάσμα του D έχει τη μορφή της εξισώσης (6), όπου $a_0 = [\sqrt{D}]$ και το τμήμα a_1, a_2, \dots, a_n της περιόδου είναι συμμετρικό.

Η εξίσωση Pell

Τον 3ο αιώνα π.Χ., ο μεγάλος ελληνας μαθηματικός Αρχιμήδης διατύπωσε το διάσημο βοεικό πρόβλημα. Δεν θα δώσουμε την πλήρη περιγραφή του εδώ (θα απαιτούσε περισσότερο από μία σελίδα). Αρκεί να επισημάνουμε ότι για τη λύση του απαιτείται να εισαγάγουμε 10 μεταβλητές που ικανοποιούν 7 γραμμικές και 2 δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Αν μετασχηματίσουμε και απαλείψουμε μεταβλητές, το πρόβλημα ανάγεται στην εξίσωση

$$x^2 - 4729494y^2 = 1, \quad (*)$$

οι λύσεις της οποίας πρέπει να είναι ακέραιοι. Ο Αρχιμήδης και οι σύγχρονοί του δεν μπορούσαν να λύσουν αυτό το πρόβλημα.

Γενικώς, η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = 1, \quad (7)$$

όπου D θετικός ακέραιος¹ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ονομάζεται εξίσωση Pell. Είναι μια διοφαντική εξίσωση, δηλαδή μια αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές που ζητάμε να λύσουμε στο σύνολο των ακεραίων.

Πώς μπορεί να λυθεί η εξίσωση Pell; Μια πρώτη ιδέα είναι η άμεση αναζήτηση: αντικαθιστούμε διαδοχικά τους αριθμούς $x = 1, 2, 3, \dots$ στον τύπο

$$y = \sqrt{(x^2 - 1)/D}$$

έως ότου το υπόρριζο γίνει τέλειο τετράγωνο. Όμως, όπως φανερώνει το επόμενο παράδειγμα, αυτή η προσέγγιση δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη. Η εξίσωση

1. Αν $D = m^2$, $m \in N$, τότε η εξίσωση (7) δεν έχει ακέραιες λύσεις (γιατί);

$$x^2 - 991y^2 = 1$$

έχει ακέραιες λύσεις (x_0, y_0) , αλλά το μικρότερο x_0 μεταξύ αυτών είναι το 379.516.400.906.811.930.638.014.896.080.

Και ο ταχύτερος υπολογιστής του κόσμου δεν μπορεί να βρει αυτή τη λύση με απλή αναζήτηση!

Τα συνεχή κλάσματα μας προσφέρουν ένα εξυπηρετικό εργαλείο για την επίλυση της εξίσωσης Pell. Εδώ θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο χωρίς να δώσουμε την απόδειξή του.

Για κάθε θετικό ακέραιο D που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η εξίσωση (7) έχει άπειρο πλήθος θετικών ακέραιων λύσεων. Μπορούμε να τις βρούμε όλες μέσω του τύπου

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

όπου (x_0, y_0) είναι η λύση με τη μικρότερη τιμή τού y . Για να βρούμε την ελάχιστη λύση (x_0, y_0) , μπορούμε να αναπτύξουμε τη \sqrt{D} ως συνεχές κλάσμα. Αν

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]$$

και p_n/q_n είναι η n -οστή συγκλίνουσα της \sqrt{D} , τότε

$$p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1}. \quad (8)$$

Αν το n είναι περιττό (η περίοδος είναι άρτια), τότε

$$p_n = x_0, \quad q_n = y_0$$

είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης Pell. Αν η περίοδος είναι περιττή (το n άρτιο), τότε η ελάχιστη λύση δίνεται από τον τύπο

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = (p_n + q_n\sqrt{D})^2.$$

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Από το ανάπτυγμα

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}],$$

βρίσκουμε

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}.$$

Αφού η περίοδος είναι άρτια, η ελάχιστη λύση είναι $x_0 = 8, y_0 = 3$, και κάθε άλλη ακέραια λύση (x, y) προκύπτει από τον τύπο

$$x + y\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^k.$$

Για $k = 2$ έχουμε $x = 127, y = 48$.

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 - 13y^2 = 1.$$

Από το ανάπτυγμα

$$\sqrt{13} = [2; \overline{1, 1, 1, 1, 6}],$$

βρίσκουμε

$$\frac{p_4}{q_4} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{18}{5}.$$

Η περίοδος είναι περιττή, και άρα η ελάχιστη λύση δίνεται από τον τύπο

$$x_0 + y_0\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^2 = \\ 649 + 180\sqrt{13},$$

δηλαδή, $x_0 = 649, y_0 = 180$. Η γενική λύση είναι η (x, y) , όπου

$$x + y\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^k.$$

Πρόβλημα 14. Βρείτε την ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 61y^2 = 1.$$

Απάντηση: $y_0 = 226.153.980$.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι το όνομα του άγγλου μαθηματικού J. Pell (1610-1685) συνδέθηκε με την εξίσωση (6) λόγω ενός λάθους του Euler. Πριν από τον Pell, την εξίσωση αυτή είχαν μελετήσει οι συμπατριώτες του J. Wallis και W. Brouncker και ο γάλλος μαθηματικός P. Fermat. Όσον αφορά το πρόβλημα του Αρχιμήδη, αυτό λύθηκε μόλις το 1880. Η ελάχιστη λύση της εξίσωσης (*) περιέχει 41 ψηφία και το συνολικό πλήθος των βοδιών είναι ένας εξαιρετικά μεγάλος αριθμός, της τάξεως του $10^{206.545}$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = p$

Αποδεικνύεται ότι αν το p είναι περιττός πρώτος της μορφής $4k + 1$, τότε η περίοδος του συνεχούς κλάσματος που αντιστοιχεί στο \sqrt{p} είναι περιττή. Από το Πρόβλημα 13 έπειται ότι

$$\sqrt{p} = [a_0;$$

$$\overline{a_1, \dots, a_m, a_m, \dots, a_1, 2a_0}]$$

Συμβολίζουμε a_{m+1} τον αριθμό με το εξής ανάπτυγμα ως συνεχές κλάσμα:

$$p_{m+1} = [a_m;$$

$$\overline{a_{m-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_m}]$$

Αφού αυτό το κλάσμα είναι καθαρώς περιοδικό, ο p_{m+1} είναι ανηγμένος αριθμός και, επομένως, βάσει του Προβλήματος 10,

$$p_{m+1} = \frac{A + \sqrt{p}}{B},$$

όπου $A > 0$ και $B > 0$. Από την πρόταση του Προβλήματος 12 έπειται ότι ο $-1/p'_{m+1}$ έχει το ίδιο ανάπτυγμα ως συνεχές κλάσμα με τον p_{m+1} . Από τη μοναδικότητα του συνεχούς κλάσματος έπειται ότι

$$p_{m+1} = -\frac{1}{p'_{m+1}}.$$

Με άλλα λόγια, $p_{m+1} \cdot p'_{m+1} = -1$. Αφού

$$p_{m+1} = \frac{A - \sqrt{p}}{B},$$

έχουμε ότι

$$\frac{A^2 - p}{B^2} = -1,$$

$$\text{ή } A^2 + B^2 = p.$$

Αυτοί οι συλλογισμοί μάς δίνουν έναν αλγόριθμο για την εύρεση της ακέραιας λύσης της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = p. \quad (9)$$

Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια λύση είναι μοναδική (αν δεν λάβουμε υπόψη την εναλλαγή των x και y) και ότι η εξίσωση (9) δεν έχει ακέραιες λύσεις όταν το p είναι πρώτος αριθμός της μορφής $4k + 3$.

Παράδειγμα 5. Βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = 1009.$$

Το ανάπτυγμα της $\sqrt{1009}$ ως συνεχές κλάσμα είναι

$$\sqrt{1009} = [31; \overline{1, 3, 3, 1, 62}].$$

Συνεπώς,

$$p_1 = \frac{31 + \sqrt{1009}}{48}, \quad p_2 = \frac{17 + \sqrt{1009}}{48},$$

$$p_3 = \frac{28 + \sqrt{1009}}{15}.$$

Επομένως, το ζεύγος των αριθμών x

$= 28$, $y = 15$ είναι η ζητούμενη λύση. Αυτή η μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης (9) επινοήθηκε από τον γάλλο μαθηματικό Legendre (1808).

Πρόβλημα 15. Βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = 1129.$$

Η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = -1$

Αν η περίοδος, $n + 1$, του συνεχούς κλάσματος που εκφράζει τη \sqrt{D} είναι περιττή, τότε από την εξίσωση (8) έπειτα ότι οι αριθμοί

$$x_0 = p_n, \quad y_0 = q_n$$

είναι λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$x^2 - Dy^2 = -1. \quad (10)$$

Όλες οι λύσεις (x, y) αυτής της εξίσωσης προκύπτουν από τον τύπο

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{2k+1}, \\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Για παράδειγμα, οι λύσεις της

$$x^2 - 13y^2 = -1$$

δίνονται από τον τύπο

$$x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^{2k+1}, \\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Αποδεικνύεται ότι αν η περίοδος του συνεχούς κλάσματος που αποτελεί ανάπτυγμα της \sqrt{D} είναι άρτια, τότε η εξίσωση (10) δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος της \sqrt{D}

Η ταχύτητα των αλγορίθμων που περιγράψαμε εξαρτάται από το μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος της \sqrt{D} . Όμως, γνωρίζουμε πολύ λίγα πράγματα γι' αυτή την εξάρτηση. Το μήκος της περιόδου είναι πολύ ιδιόμορφο. Για παράδειγμα, για $D = 986.045$, το ανάπτυγμα

$$\sqrt{986045} = [992; \\ 1, 495, 2, 495, 1, 1984]$$

έχει περίοδο μήκους 6. Όμως, το μήκος της περιόδου του αναπτύγματος της $\sqrt{20989}$ είναι 205.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε D το μήκος της περιόδου δεν υπερβαίνει το

$$4\sqrt{D} \ln D.$$

Από την άλλη, αποδεικνύεται ότι οι αριθμοί $D = 5^{2k+1}$ έχουν περιόδους με μήκος τουλάχιστον

$$\frac{1}{4}\sqrt{D}(\ln D)^{-1}.$$

Επομένως, η περίοδος αυξάνεται ταχύτατα με το k . Μια τεράστια ποσότητα αριθμητικών δεδομένων υποστηρίζει την υπόθεση ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών D που δεν διαιρούνται με το τετράγωνο κάποιου ακέραιου και για τους οποίους το μήκος της περιόδου του συνεχούς κλάσματος της \sqrt{D} είναι μεγαλύτερο από $D^{1/2-\epsilon}$ για κάθε δοθέντα σταθερό θετικό ϵ .

Το γεγονός ότι η περίοδος του συνεχούς κλάσματος της \sqrt{p} είναι περιττή για κάθε πρώτο αριθμό p της μορφής $4k + 1$ αποδείχθηκε από τον Legendre το 1785. Αργότερα, ο γερμανός μαθηματικός Dirichlet απέδειξε ένα παρόμοιο θεώρημα για $D = p \cdot q$, όπου οι p και q είναι πρώτοι που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Μόνο πρόσφατα, το 1980, ο (ελληνικής καταγωγής) αμερικανός μαθηματικός Lagarias ανακάλυψε έναν αλγόριθμο που μπορεί να καθορίσει κατά πόσον η εξίσωση (10) έχει ακέραιες λύσεις (ή, ισοδύναμα, αν η περίοδος του συνεχούς κλάσματος της \sqrt{D} είναι περιττή) έπειτα από περίπου $(\log D)^{5+\epsilon}$ πράξεις.

Συνεχή κλάσματα ιδιαίτερων αριθμών

Γνωρίζουμε ήδη ότι τα δευτεροβάθμια ριζικά, και μόνο αυτά, έχουν ως αναπτύγματα περιοδικά συνεχή κλάσματα. Επομένως, η δομή των συνεχών κλασμάτων των δευτεροβάθμιων ριζικών είναι αρκετά καλά ορισμένη. Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε ποιων άλλων κλάσεων ριζικών τα αναπτύγματα έχουν καλώς δομημένα συνεχή κλάσματα. Όμως, δεν γνωρίζουμε κάποια ικανοποιητική απάντηση. Για παράδειγμα, δεν γνωρίζουμε αν οι επί μέρους όροι $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ στο ανάπτυγμα της $\sqrt{2}$ ως συνεχές κλάσμα,

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots ,$$

είναι φραγμένοι ή όχι.

Με τη βοήθεια υπολογιστή έχουν βρεθεί αρκετές χιλιάδες από τους αρχικούς αριθμούς a_0, a_1, \dots . Ιδού οι πρώτοι όροι της ακολουθίας:

$$\sqrt{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 9, 2, 3, 3, 1, 1, 69, 1, 12, \dots].$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε από αυτό το ανάπτυγμα ότι η a_0, a_1, \dots συμπεριφέρεται ως φραγμένη ακολουθία, και λίγες μόνο μεμονωμένες υπερβάσεις (για παράδειγμα, 534 ή 121) διαταράσσουν την εικόνα.

Επιπλέον, δεν έχουμε ικανοποιητικές πληροφορίες για το ανάπτυγμα ως συνεχές κλάσμα για έστω και έναν αλγεβρικό αριθμό που δεν είναι δευτεροβάθμιο ριζικό (οι αλγεβρικοί αριθμοί είναι ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα αναπτύγματα σε συνεχή κλάσματα συγκεκριμένων κλασσικών σταθερών. Γνωρίζουμε τα συνεχή κλάσματα για ελάχιστες από αυτές.

Ο L. Euler βρήκε το επόμενο ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του ε

$$e = 2 + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|2|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|3|} + \frac{1}{|2|} + \dots , \quad (11)$$

όπου οι επί μέρους όροι a_0, a_1, \dots δίνονται από τον τύπο

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \\ a_4 = 1, \quad a_5 = 4, \dots, \\ a_{3m} = a_{3m-2} = 1, \quad a_{3m-1} = 2m, \\ (m = 1, 2, \dots).$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ = 2.718281828459045\dots$$

Αν και όχι στοιχειώδης, η απόδειξη του τύπου (11) δεν είναι δύσκολη. Δεν γνωρίζουμε κάποιο παρόμοιο «καλό» ανάπτυγμα ως συνεχές κλάσμα για τον αριθμό π . □

Ελεύθερες πτώσεις σε σύραγγες

«Διερωτώμαι κατά πόσο πέφτοντας θα διασχίσω τη Γη! Σκέψου τι αστείο θα ήταν να βγαίνα ανάμεσα σε ανθρώπους που περπατάνε με το κεφάλι!»
—Lewis Carroll, Η Αλική στη Χώρα των Θαυμάτων

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΣΑΣ ΑΡΕΣΟΥΝ ΤΑ ΜΗΛΑ; ΤΑ ΜΗΛΑ του Κήπου της Εδέμ μάς έφεραν τη γνώση και οδήγησαν στην εξορία του ανθρώπου από τον Παράδεισο. Τα μήλα που τράβηξαν την προσοχή του Νεύτωνα εδώσαν το έναυσμα για μια ριζική αναμόρφωση της αντίληψής μας για τη Φύση, η οποία απετέλεσε θεμελιώδη συνιστώσα των ιδεών του διαφωτισμού· έτσι, τα μήλα εκείνα προκάλεσαν μιαν άνευ προηγουμένου επανάσταση στην επιστήμη και γενικότερα στη σκέψη, η οποία αντανακλάστηκε στην πολιτική, την ποίηση, τη λογική και τη φιλοσοφία.

Ο Νεύτων ασφαλώς και δεν υπήρξε ο πρώτος άνθρωπος που είδε ένα μήλο να πέφτει από κάποιο δέντρο. Κατά πάσα πιθανότητα, όμως, υπήρξε ο πρώτος που διανοήθηκε να θεωρήσει την κίνηση του μήλου και της Σελήνης ως ένα και το αυτό πράγμα. Το μήλο πέφτει στη γη. Πρόκειται για μια καθ' όλα αξιόλογη παρατήρηση, αλλά όχι και για τίποτε το ιδιαίτερα συνταρακτικό. Για να διακηρύξει κανείς ότι και η Σελήνη πέφτει στη γη, όταν οι πάντες γνωρίζουν ότι διατηρείται σε σταθερή απόσταση από τον πλανήτη μας, χρειάζεται μεγαλοφυΐα. Ο Νεύτων σκεφτόταν τη βαρυτική δύναμη με την οποία ο πλανήτης μας έλκει το μήλο. Στα μάτια του, η Σελήνη δεν αντιπροσώ-

πειε παρά ένα πολύ μεγαλύτερο μήλο που βρίσκεται πολύ μακρύτερα. Και η Σελήνη, επομένως, πέφτει προς τη Γη. Αν κάτι την εμποδίζει να μας πλησιάσει, αυτό είναι η εφαπτομενική ταχύτητά της. Και αν η Σελήνη διατηρείται σε τροχιά γύρω από τη Γη, τούτο οφείλεται στη βαρυτική έλξη.

Ο Νεύτων λοιπόν άρχισε να σκέφτεται για την ελκτική δύναμη της βαρύτητας που αναπτύσσεται ανάμεσα στη Γη και το μήλο. Κατόπιν συνειδητοποίησε ότι επρόκειτο για δύναμη η οποία αναπτύσσεται ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο μάζες και που φθίνει ως το αντίστροφο τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Η σταθερά αναλογίας G δεν προσδιορίστηκε πειραματικά παρά μόνο αφού πέρασε ένας αιώνας, το 1798, και η τιμή γι' αυτό τον άθλο ανήκει στον Cavendish. Ο Cavendish αναρτούσε ζεύγη σφαιρών, μάζας 15 και 125 χιλιογράμμων, και παρατηρούσε την εξαιρετικά μικρή έλξη που αναπτυσσόταν μεταξύ τους. Επρόκειτο όντως για μια ελάχιστη ελκτική δύναμη, η οποία όμως αρκούσε για να προκαλέσει τη στρέψη ενός λεπτότατου σύρματος· ο Cavendish κατόρθωσε να μετρήσει τη στρέψη αυτή και να προσ-

διορίσει τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης, η οποία, σύμφωνα με τα αποτέλεσματά του, είχε την τιμή $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Αλλά ας επιστρέψουμε στον Νεύτωνα. Δεν μπορεί παρά να εντυπωσιάζεται κανείς από την ανυποχώρητη επιμονή του ότι οφείλουμε να μην παρασυρθούμε στην αβάσιμη, πλην όμως φαινομενικά εύλογη, παραδοχή πως η απόσταση μεταξύ δύο σφαιρών πρέπει, ανεξάρτητα από την κατανομή της μάζας τους, να μετριέται από το κέντρο της μιας ως το κέντρο της άλλης. Ο Νεύτων επινόησε τον ολοκληρωτικό λογισμό ακριβώς για να αποδείξει ότι οι μικρές έλξεις που ασκούσαν στο μήλο όλα τα στοιχειώδη τμήματα της Γης ισοδυναμούσαν, όταν αθροίζονταν, με την έλξη που θα του ασκούσε όλη η μάζα της Γης αν βρισκόταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της, σε απόσταση μίας γήινης ακτίνας από το μήλο.

Το πόσο επιτυχής στάθηκε αυτή η αντιμετώπιση του ζητήματος μπορεί κανείς να το διαπιστώσει στους δύο υπολογισμούς της επιτάχυνσης της Σελήνης που παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Στον πρώτο υπολογισμό στρέφουμε την προσοχή μας στην κατά προσέγγιση κυκλική τροχιά που διαγράφει η Σελήνη γύρω από τη Γη. Η περίοδος περιφοράς της Σελήνης ανέρχεται στις 27,3 ημέρες, ενώ η α-



πόστασή της από τη Γη ισούται με 60 γήινες ακτίνες. Δεδομένου ότι $R_\Gamma = 6,37 \cdot 10^6$ m, μπορεί εύκολα να υπολογίσουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Σελήνης:

$$\gamma_* = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0,0029 \text{ m/s}^2.$$

Ένας νόμος αντίστροφου τετραγώνου για τη βαρύτητα θα προέβλεπε ότι η επιτάχυνση της Σελήνης πρέπει να είναι $(60)^2$, ή 3.600, φορές μικρότερη από εκείνη του μήλου:

$$(9,8 \text{ m/s}^2)/3.600 = 0,0027 \text{ m/s}^2.$$

Τόσο πολύ θαυμάστηκε η βαθύνοια των συλλογισμών μέσω των οπίων ο Νεύτων κατέληξε στο περίφημο συμπέρασμά του ότι η βαρύτητα ακολουθεί το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου, ώστε ειπώθηκε πως ο μεγάλος επιστήμονας «μπόρεσε να ακούσει το Θεό να σκέφτεται». Ο Νεύτων μάς έδειξε ότι το μήλο δεν διαφέρει από τη Σελήνη και, συνάμα, ότι η Γη δεν διαφέρει από τα ουράνια. Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης περιγράφει την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, τις περιπλανήσεις του Ήλιου μέσα στον Γαλαξία, καθώς και το χορό που σέρνουν όλα τα σμήνη γαλαξιών στο σύμπαν όπου ενοικούμε.

Η γνώση της βαρυτικής δύναμης μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την τροχιά ενός δορυφόρου που περιφέρεται γύρω από τη Γη σε χαμηλό ύψος. Η ιδέα ενός δορυφόρου που εκτελεί τροχιά γύρω από τη Γη εμφανίζεται πρώτη φορά στα *Principia*, το μνημειώδες έργο του Νεύτωνα που δημοσιεύθηκε το 1686. Η εξίσωση κίνησης για ένα δορυφόρο που περιφέρεται γύρω από τη Γη σε τροχιά χαμηλού ύψους ($R \approx R_\Gamma$) γράφεται με τη μορφή

$$F = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2} = \frac{mv^2}{R_\Gamma} = \frac{4\pi^2 m R_\Gamma}{T^2}.$$

Συνεπώς, η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου δίνεται από την έκφραση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_\Gamma^3}{GM_\Gamma}},$$

βάσει του οποίας καταλήγουμε στην τιμή των 88 λεπτών.

Ένα κάπως πιο εξεζητημένο πρόβλημα θα ήταν να υπολογίσουμε την περίοδο κίνησης ενός μήλου που πέφτει ελεύθερα μέσα σε μια τεράστια σήραγγα η οποία έχει διανοιγεί κατά μία διάμετρο της Γης. Αφ' ης στιγμής το μήλο αρχίσει το ταξίδι του μέσα στη σήραγγα, κάθε στοιχειώδες τμήμα της Γης ασκεί πάνω του μια δύναμη, η οποία άλλοτε τείνει να το τραβήξει προς τα έξω και άλλοτε προς τα μέσα. Τίθεται λοιπόν το ζήτημα να προσδιορίσουμε τη συνολική δύναμη που ασκεί η Γη στο μήλο. Μια παρατήρηση που αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη για την επίλυση του προβλήματος έγκειται στο εξής. Ας φανταστούμε μια σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με τη Γη η οποία διέρχεται από τη θέση που κατέχει το μήλο μιαν ορισμένη στιγμή· τότε, στο μήλο ασκείται ολική δύναμη ίση με τη δύναμη που θα ασκούσε πάνω του το μέρος εκείνο της μάζας της Γης το οποίο περικλείεται στη φανταστική σφαιρική επιφάνεια αν βρισκόταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της Γης. Σε αυτή τη δύναμη δεν συνεισφέρει η μάζα στον εξωτερικό φλοιό. Σ' ένα σημείο που απέχει από το κέντρο απόσταση r , η μάζα η οποία περικλείεται στη φανταστική σφαίρα και έλκει το μήλο ισούται με

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3},$$

όπου με ρ συμβολίζουμε την πυκνότητα της Γης — την οποία, για τις ανάγκες του υπολογισμού, μπορούμε να θεωρήσουμε παντού σταθερή. Εάν υποθέσουμε ότι μέσα στη σήραγγα δεν υπάρχει τριβή, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη δύναμη που ασκείται στο μήλο σε κάθε σημείο της διαδρομής του:

$$F = \frac{GM'm}{r^2} = \frac{G\rho 4\pi r^3 m}{3r^2} = \left(\frac{G\rho 4\pi m}{3}\right)r,$$

Είναι φανερό ότι η εν λόγω δύναμη είναι ελκτική για κάθε θέση του μήλου (όταν το μήλο βρίσκεται δεξιότερα από το κέντρο της Γης, η δύναμη ασκείται προς τα αριστερά, και αντιστρόφως). Συνεπώς, αν λάβουμε

υπόψη και τη φορά της δύναμης, η έκφρασή μας πρέπει να γραφεί με τη μορφή $F = -kr$, όπου $k = (G\rho 4\pi m)/3$.

Αναγνωρίζουμε αμέσως ότι αυτός είναι ο τύπος που περιγράφει τη δύναμη η οποία ασκείται σε μια μάζα προσδεδεμένη στην άκρη ελατηρίου. Συνεπώς, το μήλο θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση: θα κινείται μπροστινά κατά μήκος της γήινης διαμέτρου. Η περίοδος της ταλάντωσης T θα δίνεται από την εξίσωση

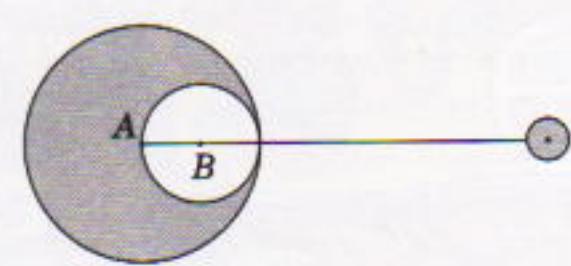
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{4\pi m G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Υποθέτοντας λοιπόν ότι η πυκνότητα της Γης ισούται με $5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, βρίσκουμε περίοδο 84 λεπτών, η οποία λίγο διαφέρει από την περίοδο του δορυφόρου που εκτελεί τροχιά γύρω από τη Γη σε χαμηλό ύψος.

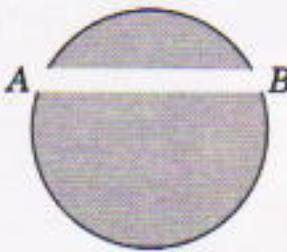
Στο παρόν τεύχος θέτουμε μερικά κλασικά προβλήματα σε συνδυασμό με ορισμένες νέες ιδέες.

A. Το παρακάτω πρόβλημα τέθηκε στην Ολυμπιάδα της Μόσχας το 1946. Στο εσωτερικό μιας μολύβδινης σφαίρας ακτίνας R έχει δημιουργηθεί σφαιρική κοιλότητα κατά τέτοιον τρόπο ώστε η επιφάνεια της να εφάπτεται με την εξωτερική επιφάνεια της μολύβδινης σφαίρας αλλά και να διέρχεται από το κέντρο της A (βλ. Σχήμα 1). Με ποια δύναμη θα έλκει η μολύβδινη σφαίρα μια μικρή σφαίρα μάζας m η οποία βρίσκεται σε απόσταση d από το A και κείται επί της ευθείας που συνδέει το A και το κέντρο B της κοιλότητας; Δίνεται η μάζα M της μολύβδινης σφαίρας προτού δημιουργηθεί η κοιλότητα.

B. Κατά μήκος της χορδής που συνδέει δύο σημεία A και B της γήινης επιφάνειας ανοίγεται μια σήραγγα (Σχήμα 2). Υπολογίστε την περίοδο κίνησης του μήλου ανάμεσα στο A και το B . Σχολιάστε το ενδεχόμε-



Σχήμα 1



Σχήμα 2

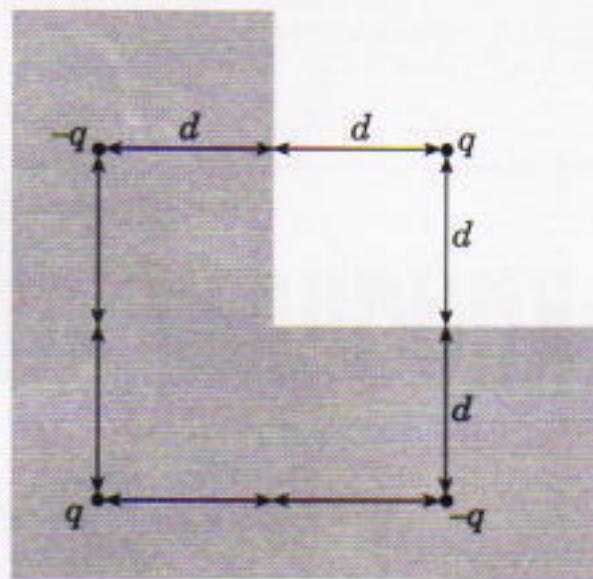
νο να χρησιμοποιηθεί μια τέτοια σήραγγα για ταξιδιά από το ένα σημείο του πλανήτη στο άλλο. Σας φαίνεται ρεαλιστική μια τέτοια προοπτική;

Γ. Προσφέρει η ευθύγραμμη σήραγγα την ταχύτερη διαδρομή από το A στο B; Εάν όχι, μπορείτε να βρείτε μια σήραγγα αποτελούμενη από δύο ευθύγραμμα τμήματα που να απαιτεί μικρότερο χρόνο;

Τι βλέπει ένα φορτίο στον καθρέφτη;

Στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1999 ζητήσαμε από τους αναγνώστες της στήλης να εφαρμόσουν τη μέθοδο των φορτίων-ειδώλων και το θεώρημα μοναδικότητας για να προσδιορίσουν την ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται ανάμεσα σε ένα σημειακό φορτίο q και μια γειωμένη μεταλλική επιφάνεια. Το ερώτημα Α καλούσε τους αναγνώστες να βρουν τη δύναμη αυτή για την περίπτωση όπου το σημειακό φορτίο ισαπέχει από δύο μεγάλες μεταλλικές πλάκες οι οποίες σχημάτιζουν ορθή διεδρη γωνία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα τα οποία εξήχθησαν στο άρθρο για την περίπτωση όπου έχουμε ένα σημειακό φορτίο μπροστά από μια άπειρη μεταλλική πλάκα, καθώς και στα δύο γνωρίζουμε για τα ειδώλα που σχηματίζονται στα επίπεδα κάτοπτρα, μπορούμε να μαντέψουμε ότι τα απαιτούμενα φορτία-ειδώλα είναι εκείνα που φαίνονται στο Σχήμα 3. Μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι το ηλεκτροστατικό δυναμικό μηδενίζεται πάνω σε καθεμία από τις δύο μεταλλικές πλάκες και στο άπειρο.

Η ηλεκτροστατική δύναμη που «αισθάνεται» το φορτίο ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που του ασκούν τα τρία φορτία-ειδώλα. Τα δύο αρνητικά έλκουν το αρχικό φορτίο προς την τομή των δύο μεταλλικών πλακών με δύναμη



Σχήμα 3

$$F_{\text{app}} = 2 \frac{kq^2}{(2d)^2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{kq^2}{d^2},$$

ενώ το θετικό φορτίο-ειδώλο απωθεί το πραγματικό φορτίο κατά την ίδια διεύθυνση με δύναμη

$$F_{\text{ret}} = \frac{kq^2}{(2\sqrt{2}d)^2} = \frac{1}{8} \frac{kq^2}{d^2}.$$

Συνεπώς, η ολική ελκτική δύναμη προς την ακμή της διεδρης γωνίας ισούται με

$$F = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{8} \right) \frac{kq^2}{d^2} = 0,23 \frac{kq^2}{d^2}.$$

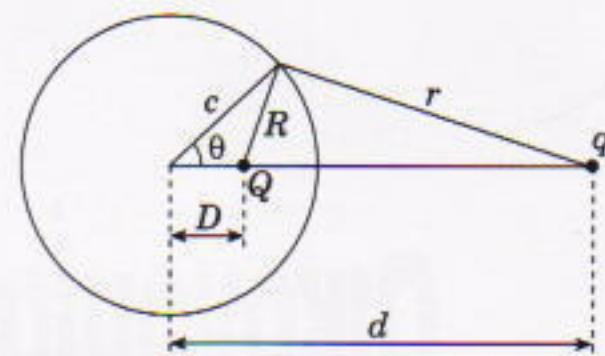
Σημειωτέον ότι το ανωτέρω αποτέλεσμα ελάχιστα διαφέρει από τη δύναμη που υπολογίσαμε στην περίπτωση του άπειρου μεταλλικού επιπέδου.

Στο ερώτημα Β οας ζητήσαμε να προσδιορίσετε την ηλεκτροστατική δύναμη όταν το φορτίο βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο μιας γειωμένης μεταλλικής σφαίρας ακτίνας $c < d$. Ας διαλέξουμε ένα φορτίο-ειδώλο Q τοποθετημένο πάνω στη ευθεία που συνδέει το πραγματικό φορτίο με το κέντρο της σφαίρας και σε απόσταση $D < c$ από το δεύτερο. Σύμφωνα με το Σχήμα 4, ας συμβολίσουμε τις αποστάσεις από το πραγματικό φορτίο και το φορτίο-ειδώλο ως κάποιο σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας με r και R , αντίστοιχα. Το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εν λόγω σημείο δίνεται από την έκφραση

$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kQ}{R},$$

όπου

$$r^2 = d^2 - 2dc \cos \theta + c^2$$



Σχήμα 4

και

$$R^2 = D^2 - 2Dc \cos \theta + c^2.$$

Εφόσον το ηλεκτροστατικό δυναμικό πρέπει να μηδενίζεται σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας, ισχύει $Qr = -qR$. Τετραγωνίζουμε και τα δύο μέλη της ανωτέρω σχέσης, εισάγουμε τις τιμές των r^2 και R^2 και αναπτύσσουμε αμφότερα τα μέλη σε δυνάμεις του συνθ. Έτσι, καταλήγουμε στη σχέση

$$Q^2(d^2 + c^2) - 2dcQ^2 \cos \theta = \\ q^2(D^2 + c^2) - 2Dcq^2 \cos \theta.$$

Επειδή η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές της γωνίας θ , οι συντελεστές κάθε δύναμης του συνθ στα δύο μέλη πρέπει να είναι ίσοι. Έτσι παίρνουμε τις εξισώσεις

$$Q^2d = q^2D$$

και

$$Q(d^2 + c^2) = q^2(D^2 + c^2).$$

Εν συνεχείᾳ λύνουμε και τις δύο εξισώσεις ως προς το λόγο Q^2/q^2 , οπότε εξισώνοντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε στη νέα εξίσωση

$$\frac{D}{d} = \frac{D^2 + c^2}{d^2 + c^2}.$$

Εδώ έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση για το D με δύο ρίζες:

$$D = d \quad \text{και} \quad D = c^2/d.$$

Η πρώτη ρίζα αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το πραγματικό φορτίο και το φορτίο-ειδώλο είναι ίσα και αντίθετα και συμπίπτουν στο χώρο. Εν τοιαύτη περιπτώσει, το δυναμικό μηδενίζεται παντού. Ως εκ τούτου, μας ενδιαφέρει η δεύτερη ρίζα, για την οποία παίρνουμε

Η συνέχεια στη σελ. 53

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΚΑΥΣΙΜΩΝ ΣΤΗ ΣΕΛΗΝΗ

A. Stasenko

ΔΥΣΚΟΛΟ ΝΑ ΜΗΝ ΑΠΟΦΕΡΕΙ καρπούς ένα τέτοιο κολοσσιαίο σχέδιο: μια σήραγγα κατά τη διάμετρο της Σελήνης. Ας αφήσουμε λοιπόν ελεύθερο ένα σώμα (ένα οικιακό σίδερο, για παράδειγμα) να κινηθεί μέσα σ' αυτό το διαμπερές διάνοιγμα (Σχήμα 1). Κοντά στην επιφάνεια της Σελήνης (σημείο Z) το σίδερο δέχεται δύναμη ίση με mg_{Σ} , όπου m είναι η μάζα του και g_{Σ} η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης (περίπου το $1/6$ της αντίστοιχης τιμής της στην επιφάνεια της Γης). Το σίδερο πέφτει, και μόλις διέρχεται το κέντρο της Σελήνης (σημείο O) η βαρυτική δύναμη που δρα πάνω του μηδενίζεται (εφόσον η Σελήνη είναι σφαιρικά συμμετρική) —στο συγκεκριμένο σημείο οι στοιχειώδεις βαρυτικές δυνάμεις τις οποίες δημιουργούν διαφορετικά μάζας της Σελήνης αλλη-

«Το σκάψιμο της Σελήνης με ένα γιγαντιαίο τρυπάνι, από τη μία άκρη της μέχρι την άλλη —αυτό ήταν το αντικείμενο της ομιλίας του κ. Lund! Δεν απέχουμε πολύ από την εποχή όπου τη Σελήνη θα την κοσμεί μια τρύπα. Και η τρύπα αυτή θα ανήκει στη Μεγάλη Βρετανία.»
—Άντον Τσέχωφ.

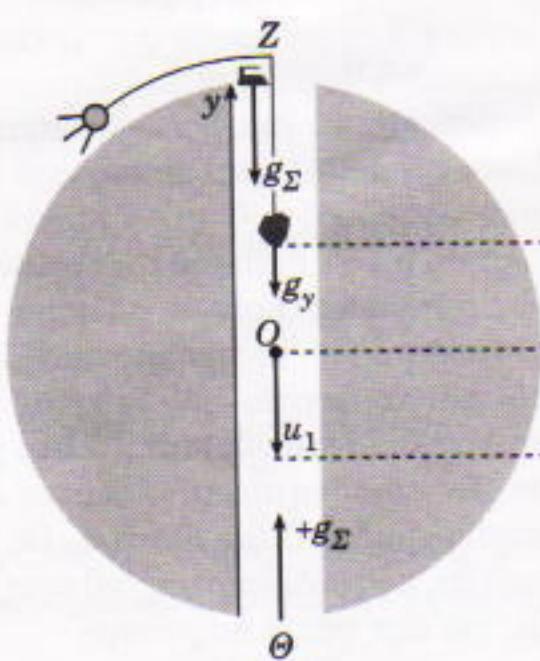
λοεξουδετερώνονται. Επομένως, στο σημείο αυτό το σίδερο παύει να αυ-

ξάνει την ταχύτητά του και, αφού το διέλθει, αρχίζει σταδιακά να τη μειώνει. Διαισθητικά συμπεραίνουμε ότι θα σταματήσει να κινείται όταν φτάσει στο σημείο Θ , το αντιδιαμετρικό του σημείου Z . Πράγματι, εφόσον η Σελήνη δεν διαθέτει ατμόσφαιρα και το σίδερο δεν έρχεται σε επαφή με τα τοιχώματα της σήραγγας, η κίνησή του θα γίνεται χωρίς τριβή. Επομένως, η μηχανική ενέργεια του σώματος θα παραμένει σταθερή, και εφόσον δεν διακόψουμε εμείς την κίνησή του στο σημείο Θ , το σώμα θα αντιστρέψει την κίνησή του και θα κινηθεί πάλι προς το κέντρο O της Σελήνης. Στη συνέχεια, θα περάσει ανεμπόδιστα από το O , θα φτάσει ξανά στο σημείο Z της επιφάνειας, και ούτω καθεξής. Το σίδερο θα ταλαντώνεται διαρκώς ανάμεσα στα σημεία Z και Θ .

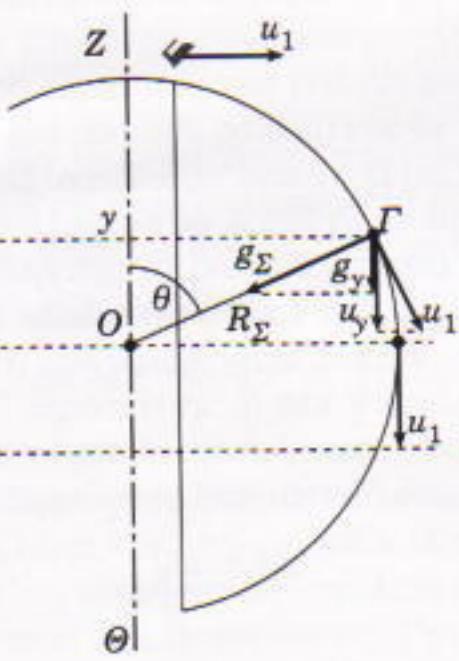
Όπως ήδη αναφέραμε, η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει διαφορετικές τιμές στο κέντρο της Σελήνης ($g = 0$) και στην επιφάνεια της (g_{Σ}). Συνεπώς, η επιτάχυνση θα περιγράφεται ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο O . Η απλούστερη εξάρτηση που μπορεί να έχουν τα δύο αυτά μεγέθη είναι η γραμμική (προς το παρόν, θεωρήστε το ως υπόθεση):

$$g_y = -g_{\Sigma} \frac{y}{R_{\Sigma}} \quad (1)$$

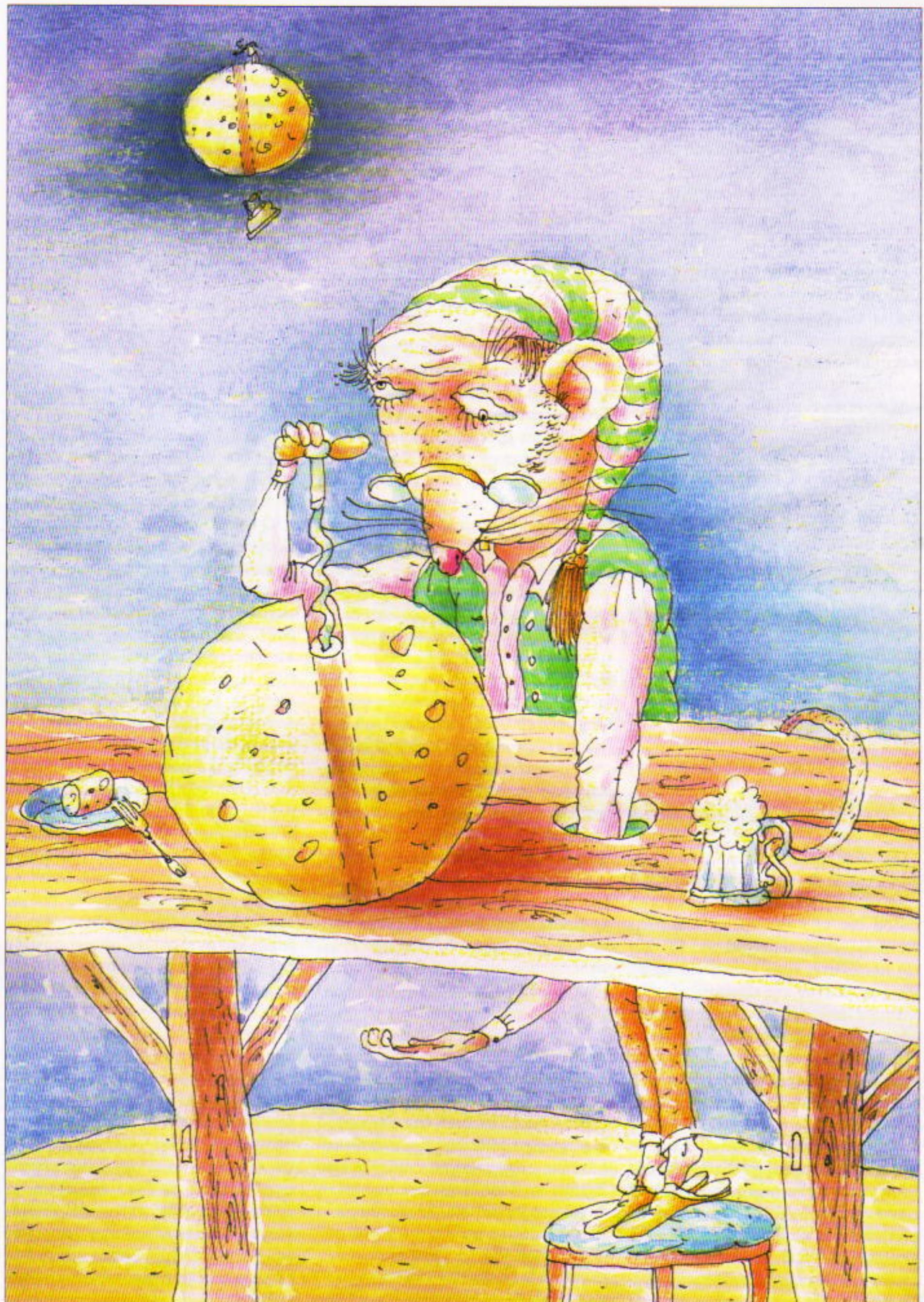
Ας εκαφενδονίσουμε τώρα το ίδιο σίδερο εφαπτομενικά στην επιφάνεια της Σελήνης έτσι ώστε, αφού κινηθεί κυκλικά κοντά στην επιφάνεια, να φτάσει και πάλι στο σημείο Θ (Σχήμα 2). Για να το πετύχουμε, πρέ-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



πει να του προσδώσουμε τροχιακή ταχύτητα u_1 . Το μέτρο της μπορούμε να το βρούμε εξισώνοντας την επιτάχυνση της βαρύτητας (σταθερή σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας) με την κεντρομόλο επιτάχυνση: $g_\Sigma = u_1^2/R_\Sigma$. Έτσι προκύπτει ότι

$$u_1 = \sqrt{g_\Sigma R_\Sigma} = \text{σταθ.} \quad (2)$$

Αυτή η τροχιακή ταχύτητα ονομάζεται πρώτη κοσμική ταχύτητα (γι' αυτό φέρει το δείκτη 1). Σημειώστε ότι παρόλο που το μέτρο της ταχύτητας του σώματος παραμένει σταθερό σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς η κίνησή του είναι επιταχυνόμενη —το διάνυσμα της ταχύτητας αλλάζει συνεχώς διεύθυνση.

Τη χρονική στιγμή t το σίδερο θα βρίσκεται στο σημείο Z του κύκλου, το οποίο έχει πολική συντεταγμένη θ . Το μήκος που διέγραψε από το σημείο εκκίνησης Z (για το οποίο ισχύει $t = 0, \theta = 0$), το τόξο ZG , θα ισούται με $u_1 t$. Στο σημείο Z , λοιπόν, ας προβάλουμε όλες τις παραμέτρους της κίνησης του σώματος (την επιβατική ακτίνα R_Σ , την ταχύτητα u_1 και την επιτάχυνση g_Σ) πάνω στον άξονα $Z\Theta$ (δηλαδή, στον άξονα y του Σχήματος 2):

$$y = R_\Sigma \sin \theta \quad (3)$$

$$u_y = -u_1 \eta \mu \theta \quad (4)$$

$$g_y = -g_\Sigma \sin \theta. \quad (5)$$

Παρατηρήστε ότι η γωνία θ μεταβάλλεται ανάλογα με το χρόνο, αφού ισούται με το μήκος του κυκλικού τόξου διά της ακτίνας: $\theta = u_1 t / R_\Sigma$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3) και (5) προκύπτει ένας τύπος για το g_y , ίδιος με εκείνον της εξίσωσης (1). Τονίζουμε και πάλι ότι με αυτό τον τρόπο δεν αποδεικνύουμε τον τύπο (1), απλώς αποκτάμε μια ιδέα για το πώς συμπεριφέρεται η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα στο εσωτερικό της σεληνιακής σήραγγας.

Προφανώς, αν οι προβολές της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της θέσης του περιστρεφόμενου σίδερου πάνω σε μια διάμετρο της Σελήνης ισούνται με τις αντίστοιχες τιμές για ένα παρόμοιο σίδερο που κινείται ελεύθερα πάνω στην ίδια διάμετρο, τότε και τα δύο σώματα, τόσο εκείνο

που περιστρέφεται όσο και εκείνο που πέφτει (το ταλαντούμενο), θα φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο Θ . Κατόπιν, θα φτάσουν και πάλι ταυτόχρονα στο σημείο εκκίνησης Z . Ο συλλογισμός αυτός είναι σωστός, δεδομένου ότι αληθεύει ο τύπος (1). Στην πραγματικότητα, γραμμική εξάρτηση υπάρχει μόνο όταν το ουράνιο σώμα είναι απολύτως ομογενές, έχοντας παντού σταθερή πυκνότητα.

Τα τελευταία 300 χρόνια, το παραπάνω ζήτημα σχολιάζεται σχεδόν σε όλα τα σχολικά βιβλία φυσικής. Οι σημερινοί μαθητές λυκείου γνωρίζουν ότι ένα σφαιρικό σώμα μάζας M και ακτίνας r έλκει ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται πάνω στην επιφάνειά του με τη νευτώνεια δύναμη της βαρύτητας $F = GMm/r^2$, σαν να ήταν όλη η μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο του. Αν αντικαταστήσουμε στον παραπάνω τύπο τη σχέση $M = (4/3)\pi r^3 \rho_0$ (όπου ρ_0 η πυκνότητα του ομογενούς σφαιρικού σώματος), προκύπτει

$$F = mg = mG(4/3)\pi \rho_0 r^3 / r^2,$$

απ' όπου $g(r) = G(4/3)\pi \rho_0 r$. Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση στο εσωτερικό της Σελήνης είναι πράγματι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο της. Βασικό στοιχείο της συλλογιστικής που ακολουθήσαμε είναι ότι η μάζα του σφαιρικού φλοιού (κελύφους) ακτίνας $r = \text{σταθ.}$ δεν επηρεάζει το βαρυτικό πεδίο στην περιοχή που περικλείεται απ' αυτόν. Το συμπέρασμα δεν είναι τόσο προφανές. Ο Νεύτων καθυστέρησε εννέα ολόκληρα χρόνια την έκδοση των *Principia* ώσπου να το αποδείξει.

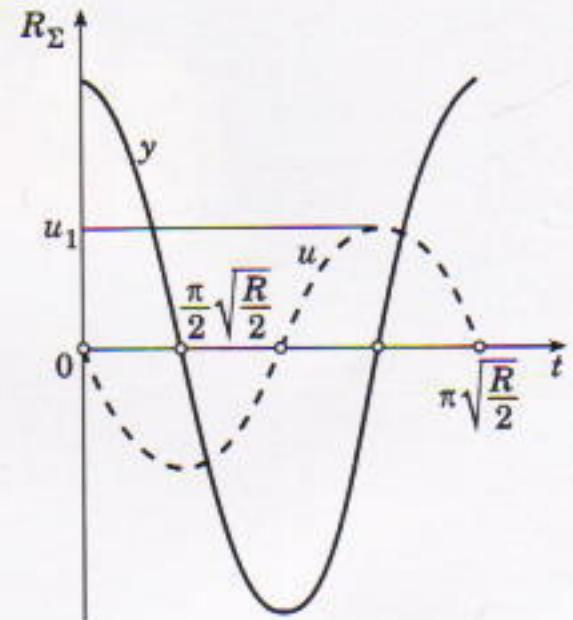
Αν γράψουμε τώρα τη σχέση (3) με τη μορφή

$$y = R_\Sigma \sin(u_1 t / R_\Sigma),$$

λαμβάνουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος εντός της σεληνιακής σήραγγας. Άλλα αυτή δεν είναι παρά η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης (η συνεχής καμπύλη στο Σχήμα 3). Βάσει της εξίσωσης (4), η ταχύτητα θα μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο

$$u_y = -u_1 \eta \mu (u_1 t / R_\Sigma),$$

και θα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της



Σχήμα 3

στη θέση $y = 0$, δηλαδή στο κέντρο της Σελήνης (διακεκομένη καμπύλη στο Σχήμα 3).

Ο τελευταίος τύπος μας δείχνει ότι στο κέντρο της Σελήνης το σίδερο αποκτά ταχύτητα ίση με την πρώτη κοσμική ταχύτητα (την τροχιακή ταχύτητα του σεληνιακού δορυφόρου). Στο σημείο αυτό, όμως, ίσως λάμψει ξαφνικά στον πρακτικό νου ενός ευφυούς μαθητή η εξής ιδέα: Γιατί να αφήνουμε το σίδερο να ταλαντώνεται άσκοπα μεταξύ των δύο πόλων; Η βενζίνη στη Σελήνη έχει αστρονομικό κόστος. Γιατί λοιπόν να μην εξικονομήσουμε βενζίνη με τη βοήθεια του βαρυτικού πεδίου;

Έτσι, προκειμένου να αξιοποιήσουμε τη βαρύτητα της Σελήνης, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σίδερο με έναν πολύ μεγάλο βράχο, στον οποίο έχουμε προσδέσει ένα αβαρές και ανελαστικό σκοινί μήκους R_Σ . Το άλλο άκρο του σκοινιού προσαρτάται σε ένα διαστημόπλοιο ή δορυφόρο που πρόκειται να εκτοξευτεί. Καθώς ο βράχος θα πέφτει μέσα στη σήραγγα, θα επιταχύνει το διαστημόπλοιο εφαπτομενικά πάνω στην επιφάνεια της Σελήνης (θα πρέπει να υποθέσουμε, βέβαια, ότι η κίνησή του πραγματοποιείται χωρίς τριβή). Όταν ο βράχος θα διέρχεται το κέντρο της Σελήνης, το διαστημόπλοιο θα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το διάνοιγμα (σημείο Z). Αυτήν ακριβώς τη χρονική στιγμή, καθώς και τα δύο σώματα θα έχουν αποκτήσει την ταχύτητα u_1 , θα αποσυνδέσουμε το

σκοινί από το διαστημόπλοιο. Έτσι, στο εξής το διαστημόπλοιο θα κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Σελήνη, ενώ ο βράχος θα συνεχίσει να κινείται προς τον πόλο Θ. Εκεί, πάλι, το σκοινί που συνδέεται με το βράχο μπορεί να προσαρτηθεί σε έναν άλλο δορυφόρο. Συνεπώς, ο ταλαντούμενος βράχος θα μπορούσε να χρησιμεύσει για τη διαδοχική εκτόξευση δορυφόρων! Το σχέδιο θα προσέφερε μεγάλη εξοικονόμηση καυσίμων, γεγονός εξαιρετικής σημασίας στη μακρινή Σελήνη!

Αλλά χωρίς ίσως να το συνειδητοποιήσουμε, βασιστήκαμε σε μια πολύ σημαντική παραδοχή. Υποθέσαμε ότι ο βράχος έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα απ' δι το διαστημόπλοιο και το σκοινί. Εν ολίγοις, ο βράχος δεν πρέπει να είναι απλώς μεγάλος αλλά τεράστιος!

Ας αναλύσουμε λίγο περισσότερο την κατάσταση. Από τις εξισώσεις (3) και (4) λαμβάνουμε:

$$\sin \theta = \frac{y}{R_\Sigma}, \quad \eta \mu \theta = -\frac{u_y}{u_1}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και τις δύο σχέσεις και στη συνέχεια τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\left(\frac{u_y}{u_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_\Sigma}\right)^2 = \eta \mu^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Διαιρώντας διά του 2 και αντικαθιστώντας το u_1 από την εξίσωση (2), προκύπτει

$$\frac{u_y^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{g_\Sigma y^2}{R_\Sigma} = \frac{u_1^2}{2} = \frac{g_\Sigma R_\Sigma}{2}. \quad (6)$$

Σας θυμίζει κάτι η σχέση αυτή; Ασφαλώς πρόκειται για τον γνωστό σε όλους μας νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας εκφρασμένο για μοναδιαία μάζα. Ο πρώτος όρος στο αριστερό μέλος της (6) αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια του σώματος όταν βρίσκεται σε απόσταση y από το κέντρο της Σελήνης. Ο δεύτερος όρος εξαρτάται μόνο από τη θέση του σώματος, επομένως πρόκειται για τη δυναμική του ενέργεια. Το άθροισμα των δύο όρων είναι σταθερό (δεξιό μέλος της (6)), και ισούται τόσο με την κινητική ενέργεια του σώματος στο κέντρο της Σελήνης (ό-

που η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν) όσο και με τη δυναμική του ενέργεια στην επιφάνειά της Σελήνης, ακριβώς στις εισόδους του διανούματος (όπου η ταχύτητα, άρα και η κινητική του ενέργεια, μηδενίζονται).

Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση y από το κέντρο της Σελήνης μπορεί να γραφεί ως

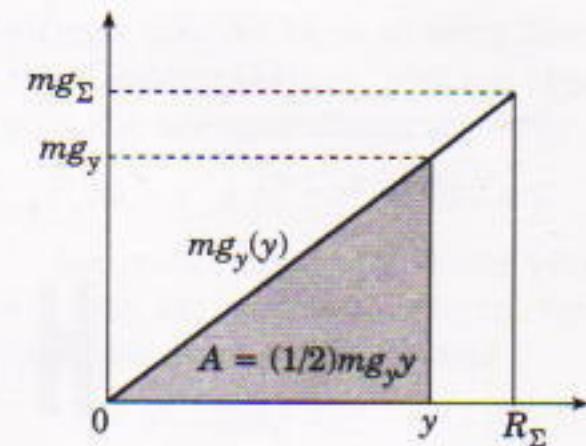
$$(1/2)mg_\Sigma y^2/R_\Sigma = (1/2)mg_y y.$$

Παρατηρήστε ότι ο νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ενός σώματος που βάλλεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης και φτάνει σε ύψος y γράφεται ως

$$\frac{mu^2}{2} + mg_0 y = \frac{mu_0^2}{2} = mg_0 y_{max},$$

όπου u_0 η αρχική ταχύτητα με την οποία βάλλεται το σώμα και y_{max} το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει. Στην περίπτωση αυτή, η δυναμική ενέργεια ισούται με mg_y και ισούται με το έργο που πρέπει να παραγάγουμε για να μεταφέρουμε το σώμα στο ύψος y . Όταν όμως το σώμα πέφτει στη μακριά σεληνιακή σήραγγα, πάνω του ασκείται βαρυτική δύναμη μεταβλητού μέτρου (βλ. εξίσωση (1)), οπότε σε αυτή την περίπτωση το συνολικά δαπανόμενο έργο, άρα και η δυναμική ενέργεια, θα ισούται με το γνωστό γινόμενο mg , επί την απόσταση y διαιρεμένο διά του 2 —όπως άλλωστε φαίνεται γεωμετρικά και από το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου στο Σχήμα 4.

Τι γίνεται αν ο βράχος δεν είναι τεράστιος, δηλαδή όταν έχει μάζα συγκρίσιμη με εκείνη του δορυφόρου και του σκοινιού; Τότε πρέπει να τροποποιήσουμε την παραπάνω έκφραση του νόμου διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε την ενέργεια του δορυφόρου και του σκοινιού. (Λάβετε υπόψη σας ότι καθώς ο βράχος πέφτει μέσα στη σήραγγα, το τμήμα του σκοινιού που βρίσκεται στο εσωτερικό της ολοένα θα αυξάνεται. Και το βάρος αυτού του τμήματος θα συνεισφέρει στην επιτάχυνση του δορυφόρου.) Αυτή αποτελεί μια ωραία άσκηση για τις λίγες κρύες νύχτες



Σχήμα 4

που θα ακολουθήσουν. □

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα:

- A. Stasenko, «Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάϊος/Ιούν. 1996.
- A. Byalko, «Μια πτήση στον Ήλιο», Ιαν./Φεβ. 1997.
- V. Surdin, «Πηδώντας από αστρο σε αστρό», Μάϊος/Ιούν. 1997.
- V. Mozhayev, «Το πλανητικό δίχτυ», Μάρη/Απρ. 1998.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 49

$$Q = -\frac{D}{c} q = -\frac{c}{d} q.$$

(Σημειωτέον ότι το φορτίο-είδωλο δεν βρίσκεται στη θέση όπου θα σχηματίζοταν το είδωλο σε ένα σφαιρικό κυρτό κάτοπτρο!)

Χρησιμοποιώντας το φορτίο-είδωλο και την απόστασή του από το πραγματικό φορτίο, βρίσκουμε ότι η ελκτική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο έξω από μια γειωμένη αγώγιμη σφαίρα δίνεται από τον τύπο

$$F = kq^2 \frac{cd}{(d^2 - c^2)^2}.$$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις οριακές περιπτώσεις. Καθώς το φορτίο πλησιάζει την επιφάνεια της σφαίρας, το d τείνει στο c και η δύναμη τείνει να απειριστεί. Και καθώς το φορτίο απομακρύνεται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα, η δύναμη μειώνεται τείνοντας οριακά να μηδενιστεί. Και οι δύο μορφές συμπεριφοράς είναι αναμενόμενες και βρίσκονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματά μας για την περίπτωση του άπιρου αγώγιμου επιπέδου. □

Η εξίσωση Markov

Γενεαλογίες λύσεων

M. Klein

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΠΕΡΙΓΡΑΨΩ την ιστορία μιας εξίσωσης ακέραιων μεταβλητών (μιας διοφαντικής εξίσωσης) και θα δώσω τη λύση της. Για τη λύση χρησιμοποιούμε μόνο τις απλούστερες ιδιότητες των ακέραιων και τους «τύπους του Vieta»¹ για τα δευτεροβάθμια πολυώνυμα. Επομένως, μπορούν εύκολα να το κατανοήσουν όσοι έχουν γνώσεις στοιχειώδους άλγεβρας. Η λύση μας βασίζεται σε ορισμένες προτάσεις των οποίων την απόδειξη έχουμε αφήσει ως άσκηση για τους αναγνώστες.

Το 1879, στο Πανεπιστήμιο της Πετρούπολης, ένας νέος άντρας 23 ετών υποστήριξε τη διατριβή του σε επίπεδο master με τίτλο «Δυαδικές τετραγωνικές μορφές με θετικές ορίζουσες». Στη διατριβή αυτή υπήρχαν οι λύσεις μερικών εξαιρετικά δύσκολων προβλημάτων της θεωρίας αριθμών, και έτσι εγκαινιάστηκε μια νέα γραμμή ερευνών σε αυτό το πεδίο. Συγγραφέας της διατριβής ήταν ο Andrei A. Markov (1856-1922), ο μετέπειτα εξέχων μαθηματικός.

Το κύριο μέρος της διατριβής βασίζεται σε δύο άρθρα που είχαν δη-



μοσιευθεί στο φημισμένο μαθηματικό περιοδικό *Mathematische Annalen* το 1879 και το 1880. Όμως, απαιτήθηκαν περισσότερα από 30 χρόνια για να «ανακαλυφθούν» αυτές οι εργασίες του Markov. Το 1913, ο εξέχων γερμανός μαθηματικός Georg Frobenius (1849-1917) δημοσίευσε ένα μνημόνιο με τίτλο *Περί των αριθμών Markov*. Στην εισαγωγή έγραφε δι, παρόλο που οι έρευνες του Mar-

kov «είναι εξαιρετικά σημαντικές», έχουν παραμείνει σχεδόν άγνωστες. Ο Forbenius απέδωσε το γεγονός στην πολυπλοκότητα της παρουσίασης (ο Markov χρησιμοποιούσε συστηματικά τα συνεχή κλάσματα που δεν ήταν δημοφιλή σε αυτό το πεδίο εκείνη την εποχή²).

Στο παρόν άρθρο δεν θα αποπειράθω να παρουσιάσω ούτε καν σε απλοποιημένη μορφή τις βαθιές μελέτες του Markov. Όμως σε κάποιο σημείο των μελετών του, ο Markov εξέτασε την επόμενη βοηθητική διοφαντική εξίσωση (που σήμερα φέρει το όνομα του):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \quad (1)$$

Το καταπληκτικό είναι ότι ο Markov βρήκε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (1) χρησιμοποιώντας μόνο μεθόδους των στοιχειώδων μαθηματικών (ανάμεσα στις οποίες κεντρικό ρόλο κατέχουν οι τύποι του Vieta για δευτεροβάθμια πολυώνυμα).

Πριν παρουσιάσουμε τη λύση της εξίσωσης (1), επιτρέψτε μου να αναφέρω λίγα πράγματα για τις διοφαντικές εξισώσεις, γενικώς.

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διοφαντική εξίσωση των ακέραιων μεταβλητών x, y, \dots, w είναι μια εξίσωση που μπορεί να αναγθεί στη μορφή

2. Στο παρόν τεύχος του *Quantum* υπάρχει άρθρο αφιερωμένο στα συνεχή κλάσματα.

$$P(x, y, \dots, w) = 0,$$

όπου P είναι ένα πολυώνυμο των δεδομένων μεταβλητών με ακέραιους συντελεστές.

Μερικές φορές, απλά προβλήματα οδηγούν σε διοφαντικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να βρούμε πώς μπορούμε να πληρώσουμε ένα ποσό n δραχμών με νομίσματα των 5, 10, 20 και 50 δραχμών, οδηγούμαστε στην επόμενη διοφαντική εξισώση

$$5x + 10y + 20z + 50w = n.$$

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές ανά δύο σύμμετρες είχε ήδη προκύψει στην αρχαία Βαβυλώνα. Το να είναι οι πλευρές σύμμετρες σημαίνει ότι υπάρχει μια κλίμακα στην οποία μπορούμε να εκφράσουμε τις κάθετες πλευρές και την υποτείνουσα με ακέραιους αριθμούς x, y, z . Τότε,

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Επομένως, το πρόβλημα των Βαβυλωνίων ανάγεται στο πρόβλημα της κατασκευής όλων των τριάδων θετικών ακέραιων x, y, z που ικανοποιούν την ανωτέρω εξισώση. Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μια μέθοδο κατασκευής όλων των λύσεων αυτής της εξισώσης. Είναι πιθανό η μέθοδος αυτή να είχε ανακαλυφθεί ακόμη νωρίτερα, στην αρχαία Βαβυλώνα ή την Ινδία. Σε κάθε περίπτωση, οι λύσεις (x, y, z) της εξισώσης $x^2 + y^2 = z^2$ καλούνται πυθαγόρειες τριάδες³.

Το πρόβλημα της εύρεσης των λύσεων μιας διοφαντικής εξισώσης (ακόμη και αν η ίδια η εξισώση μοιάζει απλή) είναι συχνά δύσκολο. Δεν υπάρχει κάποια ομοιόμορφη μέθοδος (ένας αλγόριθμος) που να μας δείχνει αν μια διοφαντική εξισώση έχει ή όχι ακέραιες λύσεις. Η ανάλυση συγκεκριμένων διοφαντικών εξισώσεων συνεχίζεται ως τις μέρες μας. Τα τελευταία χρόνια έχει επιτευχθεί σημαντική πρόοδος με τη βοήθεια του περίπλοκου φορμαλισμού της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας. Όμως, η

εξίσωση του Markov μπορεί να λυθεί με στοιχειώδη μέσα.

Το γενεαλογικό δέντρο της εξισώσης Markov

Μια διατεταγμένη τριάδα ακέραιων (a, b, c) καλείται λύση μιας διοφαντικής εξισώσης με αγνώστους x, y, z αν η εξισώση μετατρέπεται σε αληθή αριθμητική ισότητα όταν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x = a, y = b$ και $z = c$. Οι αριθμοί a, b, c της λύσης (a, b, c) ονομάζονται συντεταγμένες της λύσης. Για την εξισώση Markov (1), θα θεωρήσουμε μόνο τις μη μηδενικές λύσεις (μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αν μία από τις συντεταγμένες μιας λύσης της (1) ισούται με μηδέν, τότε και όλες οι υπόλοιπες συντεταγμένες θα είναι επίσης μηδέν).

Το αριστερό μέλος της (1) είναι θετικό για οποιαδήποτε λύση (a, b, c) . Συνεπώς, είτε και οι τρεις αριθμοί θα είναι θετικοί είτε μόνο ένας. Στην δεύτερη περίπτωση, η $(|a|, |b|, |c|)$ είναι λύση της (1) με θετικές συντεταγμένες. Αντιστρόφως, αν (a, b, c) είναι λύση με θετικές συντεταγμένες, τότε αλλάζοντας το πρόσημο δύο τυχαίων συντεταγμένων παίρνουμε άλλη μία λύση. Για τούτο το λόγο, μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, λύσεις με θετικές μόνο συντεταγμένες.

Από τη συμμετρία της εξισώσης (1) έπειτα ότι αν (a, b, c) είναι μία λύση της, τότε και οι

$$(a, c, b), (c, a, b), (b, c, a), \\ (b, a, c), (a, c, b), (c, b, a)$$

είναι επίσης λύσεις. Επομένως, οι τριάδες που προκύπτουν από τις μεταθέσεις των συντεταγμένων μιας λύσης (a, b, c) είναι επίσης λύσεις.

Άρα, μπορούμε να θεωρούμε και τις έξι λύσεις που προκύπτουν η μία από την άλλη μέσω μεταθέσεων ως μία μοναδική λύση. Με άλλα λόγια, μόνο η τιμές των συντεταγμένων έχουν σημασία και μπορούμε να αγνοούμε τη διάταξή τους.

Εύκολα μαντεύουμε μία λύση της εξισώσης Markov, την $(1, 1, 1)$. Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε άλλες λύσεις της, όταν ήδη γνω-

ρίζουμε μία. Αν (a, b, c) είναι λύση της εξισώσης Markov, τότε ο a είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξισώσης

$$F_a(x) = x^2 + b^2 + c^2 - 3bcx = 0.$$

Από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε ότι η εξισώση αυτή έχει άλλη μία λύση a' τέτοια ώστε

$$a + a' = 3bc, \quad aa' = b^2 + c^2. \quad (2)$$

Είναι προφανές (από τη δεύτερη των ανωτέρω συνθηκών) ότι $a' > 0$, και ότι η (a', b, c) είναι επίσης λύση της εξισώσης (1). Αυτή καλείται παρακείμενη λύση ως προς τη συντεταγμένη a . Προφανώς, αν (a', b, c) είναι η παρακείμενη λύση της (a, b, c) , τότε η (a, b, c) είναι η παρακείμενη λύση της (a', b, c) ως προς τη συντεταγμένη a' .

Παρομοίως, μπορούμε να βρούμε παρακείμενες λύσεις ως προς τις συντεταγμένες b και c .

Ας βρούμε την παρακείμενη λύση της $(1, 1, 1)$. Για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να λύσουμε τη δευτεροβάθμια εξισώση

$$x^2 + 1^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = 0.$$

Εκτός της ρίζας $x = 1$, αυτή η εξισώση έχει τη ρίζα $x = 2$. Επομένως, βρήκαμε τη λύση $(2, 1, 1)$. Οι δύο λύσεις $(1, 1, 1)$ και $(2, 1, 1)$ παίζουν σημαντικό ρόλο. Ακολουθώντας τον Markov, θα τις ονομάσουμε ιδιάζουσες λύσεις.

Οι ιδιάζουσες λύσεις είναι οι μοναδικές που έχουν δύο συντεταγμένες ίσες.

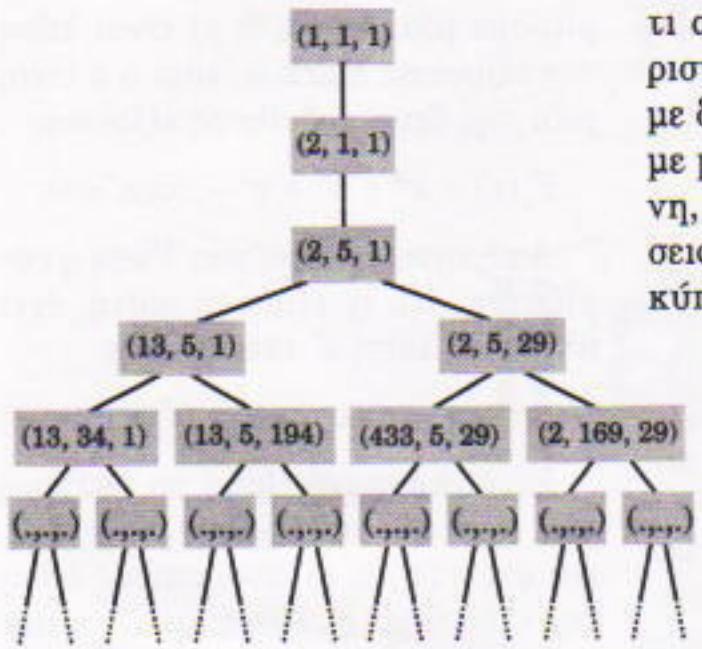
Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι μια λύση (a, b, c) της εξισώσης Markov είναι ιδιάζουσα αν και μόνο αν δύο συντεταγμένες της είναι ίσες.

Η πρώτη ιδιάζουσα λύση $(1, 1, 1)$ έχει μία μόνο παρακείμενη λύση. Η δεύτερη ιδιάζουσα λύση έχει δύο παρακείμενες: τις $(1, 1, 1)$ και $(2, 5, 1)$. Η δεύτερη είναι παρακείμενη της $(2, 1, 1)$ ως προς τη συντεταγμένη 1 και προκύπτει από την εξισώση

$$2^2 + y^2 + 1^2 = 3 \cdot 2 \cdot y \cdot 1.$$

Η λύση $(2, 5, 1)$ έχει, με τη σειρά της, τρεις παρακείμενες λύσεις: μία από αυτές είναι, φυσικά, η $(2, 1, 1)$, και οι άλλες δύο είναι οι $(13, 5, 1)$ και $(2, 5, 29)$. Γενικώς, κάθε μη ιδι-

3. Οι πυθαγόρειες τριάδες εξετάστηκαν στο άρθρο «Αναζήτηση πυθαγόρειων τριάδων» του τεύχους Μαρτίου/Απριλίου 1999.



Σχήμα 1

άζουσα λύση (a, b, c) παράγει τρεις παρακείμενες λύσεις

$$(a', b, c), (a, b', c), (a, b, c'),$$

όπου έχουμε (συγκρίνετε με τη (2))

$$a' = 3bc - a, \quad b' = 3ac - b,$$

$$c' = 3ab - c.$$

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι αν η λύση (a, b, c) δεν είναι ιδιάζουσα, μία από τις παρακείμενές της λύσεις έχει μικρότερη μέγιστη συντεταγμένη και οι άλλες δύο μεγαλύτερη μέγιστη συντεταγμένη.

Θεώρημα Markov. Κάθε λύση της εξίσωσης (1) συνδέεται μέσω μιας αλυσίδας παρακείμενων λύσεων με την ιδιάζουσα λύση $(1, 1, 1)$.

Απόδειξη. Έστω (a, b, c) μια μη ιδιάζουσα λύση της εξίσωσης (1). Τότε, υπάρχει μια παρακείμενη λύση (a_1, b_1, c_1) με μικρότερη μέγιστη συντεταγμένη (Πρόβλημα 2). Αν και αυτή η λύση δεν είναι ιδιάζουσα, έχει μια παρακείμενη λύση (a_2, b_2, c_2) με ακόμη μικρότερη μέγιστη συντεταγμένη, κ.ο.κ. Όμως, οι θετικοί ακέραιοι δεν μπορούν να σχηματίζουν μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία. Επομένως, αυτή η διαδικασία αναγκαστικά τερματίζεται. Η τελική λύση (a_n, b_n, c_n) θα έχει ίσες συντεταγμένες. Συνεπώς, η τελική λύση θα είναι ιδιάζουσα (Πρόβλημα 1). Αν είναι η $(1, 1, 1)$, η πρόταση αποδείχθηκε διαφορετικά είναι η $(2, 1, 1)$, που γνωρίζουμε ότι έχει την παρακείμενη λύση $(1, 1, 1)$. Συνεπώς, το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Από το θεώρημα Markov έπειται ό-

τι αν ξεκινήσουμε από τη χαρακτηριστική λύση $(1, 1, 1)$ και μεταβούμε διαδοχικά σε παρακείμενες λύσεις με μεγαλύτερη μέγιστη συντεταγμένη, μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις. Κατ' αυτή τη διαδικασία προκύπτει ένα γενεαλογικό δέντρο (βλ. Σχήμα 1).

Με τη βοήθεια αυτού του δέντρου, όταν δίνεται ένας $N \geq 1$, μπορούμε να βρούμε, σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων, όλες τις λύσεις της εξίσωσης Markov οι συντεταγμένες των οποίων δεν υπερβαίνουν τον N .

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι οι συντεταγμένες οποιασδήποτε λύσης της εξίσωσης Markov είναι, ανά δύο, αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.

Η αποκλειστικότητα της εξίσωσης Markov

Ας θεωρήσουμε το επόμενο πρόβλημα που, σε πρώτη ματιά, φαίνεται παράξενο: Αν το άθροισμα των τετραγώνων τριών θετικών ακέραιων διαιρείται διά του γινομένου τους, ποια τιμή μπορεί να πάρει ο λόγος τους;

Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: Για ποιους θετικούς ακέραιους k έχει μη μηδενικές λύσεις η διοφαντική εξίσωση

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = kXYZ; \quad (3)$$

Για $k = 3$, η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση Markov. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση (3) έχει λύσεις για $k = 1$. Για παράδειγμα, την $(3, 3, 3)$. Οι Hurwitz και Frobenius ανέλυσαν την εξίσωση (3) και απέδειξαν ότι έχει λύσεις μόνο όταν $k = 3$ και $k = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει με στοιχειώδη μέσα.

Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση $k = 1$. Αποδεικνύεται ότι η αναζήτηση λύσεων σε αυτή την περίπτωση ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης Markov.

Πρόβλημα 4. Έστω A, B και C θετικοί ακέραιοι. Τότε, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $A^2 + B^2 + C^2$ διά του 3 ισούται με το πλήθος των αριθμών μεταξύ των A, B και C που δεν διαιρούνται διά του 3 —όταν το πλήθος αυτό είναι μικρότερο του 3· διαφορετικά, το υπόλοιπο είναι 0.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ \quad (4)$$

δίνονται από τους τύπους

$$A = 3a, \quad B = 3b, \quad C = 3c,$$

όπου (a, b, c) είναι μια τυχαία λύση της εξίσωσης Markov

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \quad (6)$$

Ας στραφούμε τώρα στην περίπτωση $k = 2$.

Πρόβλημα 6. Έστω A, B και C θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $A^2 + B^2 + C^2$ διά του 4 ισούται με το πλήθος των περιττών αριθμών μεταξύ των A, B και C .

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση (3) δεν έχει λύσεις για $k = 2$.

Θεώρημα. Η εξίσωση (3) έχει μη μηδενικές λύσεις μόνο όταν $k = 1$ και $k = 3$.

Απόδειξη. Για $k = 1$, οι λύσεις προκύπτουν με τον τρόπο που περιγράφεται στο Πρόβλημα 5. Για $k = 2$, η εξίσωση (3) δεν έχει λύσεις, όπως αποδείχθηκε στο Πρόβλημα 7. Θεωρούμε την περίπτωση $k > 3$.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση (3) έχει μια λύση (a, b, c) για κάποιο $k > 3$. Αποδεικνύουμε ότι οι συντεταγμένες της a, b και c πρέπει να είναι ανά δύο διαφορετικές. Για παράδειγμα, έστω $b = c$. Τότε, $a^2 = kab^2 - 2b^2 = (ka - 2)b^2$. Συνεπώς, $a = bd$, όπου το d είναι ακέραιος. Άρα, έχουμε $b^2d^2 = (kbd - 2)b^2$, $d^2 = kbd - 2$ και άρα $2 = d(kb - d)$. Επομένως, το 2 διαιρείται διά του d , και συνεπώς $d = 1$ ή $d = 2$. Και στις δύο περιπτώσεις, $kb = 3$, που αντιτίθεται στη συνθήκη $k > 3$.

Επομένως, για $k > 3$, κάθε λύση της εξίσωσης (3) έχει ανά δύο διαφορετικές συντεταγμένες. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a > b > c$.

Αν χρησιμοποιήσουμε το δευτερόβαθμο τριώνυμο

$$P(x) = x^2 + b^2 + c^2 - kxbc,$$

μπορούμε να βρούμε για τη λύση (a, b, c) την παρακείμενη λύση (a', b, c) ως προς τη συντεταγμένη a . Έχουμε ότι

$$P(b) = 2b^2 + c^2 - kb^2c < \\ 3b^2 - kb^2c \leq 3b^2 - kb^2 < 0,$$

και, επομένως, διαπιστώνουμε ότι το b βρίσκεται μεταξύ των ριζών a και a' του πολυωνύμου $P(x)$. δηλαδή, $a > b > a'$. Συνεπώς, η μέγιστη συντεταγμένη της λύσης (a', b, c) είναι μικρότερη από αυτή της λύσης (a, b, c) . Άρα, για κάθε λύση (a, b, c) , μπορούμε να βρούμε μια λύση (a_1, b_1, c_1) με μικρότερη μέγιστη συντεταγμένη. Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία και να βρούμε μια λύση (a_2, b_2, c_2) με ακόμη μικρότερη μέγιστη συντεταγμένη. Αφού οι συντεταγμένες κάθε λύσης είναι ανά δύο διαφορετικές, η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί επ' άπειρον και να μας δώσει μια άπειρη ακολουθία λύσεων της εξίσωσης (3) με φθίνουσα μέγιστη συντεταγμένη. Άλλα αυτό είναι αδύνατο, διότι οι συντεταγμένες είναι θετικοί ακέραιοι. Επομένως, το θεώρημα αποδείχθηκε.

Πόρισμα. Σε κάθε λύση (a, b, c) της εξίσωσης $Markou$, οι αριθμοί a, b , και c είναι, ανά δύο, πρώτοι προς αλλήλους.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι a και b έχουν έναν κοινό διαιρέτη $d > 1$. Λόγω της εξίσωσης (1), ο d είναι διαιρέτης του c . Συνεπώς υπάρχουν αριθμοί X, Y και Z τέτοιοι ώστε $a = dX$, $b = dY$ και $c = dZ$. Από την (1) έχουμε ότι $X^2 + Y^2 + Z^2 = 3dXYZ$, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα που αποδείξαμε.

Η επόμενη εξίσωση αποτελεί άμεση γενίκευση της εξίσωσης $Markou$ στην περίπτωση των n μεταβλητών ($n > 3$):

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = nx_1x_2\dots x_n. \quad (7)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μερικές από τις προηγούμενες προτάσεις γενικεύονται και σε αυτή την περίπτωση (υπάρχει μια ιδιάζουσα λύση $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$, για κάθε λύση υπάρχει παρακείμενη λύση, κ.ο.κ.) Πάντως, δεν γνωρίζω να έχει αναπτυχθεί μια πλήρης θεωρία της εξίσωσης (7). Η κατασκευή μιας τέτοιας θεωρίας θα μπορούσε να αποτελέσει το θέμα ενός μικρού ανεξάρτητου ερευνητικού προγράμματος.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Οι υπολογιστές στο παρόν και το μέλλον

Οι θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τη δομή και τη λειτουργία τους

To πώς λειτουργούν οι υπολογιστές αποτελεί ένα ζητήμα που προκαλεί δέος στους περισσότερους ανθρώπους: εκείνο το οποίο δεν γνωρίζουν — γεγονός που καταδεικνύει με εξαιρετική σαφήνεια το παρόν βιβλίο — είναι ότι οι φανομενικά περίπλοκες λειτουργίες των υπολογιστών στρίζονται σε απλές ιδέες οι οποίες υπερβαίνουν την τεχνολογία: Ισχυρά στο παρελθόν και θα ισχύουν για πάντα. Ο «μάγος των υπολογιστών» Daniel Hillis παρέχει μια τόσο εύληπτη εξήγηση για το πώς γίνεται η επεξεργασία των δεδομένων, ώστε οι λειτουργίες του υπολογιστή να φαίνονται τον αναγνώστη τόσο απλές όσο και εκείνες του ποδήλατου.

Ξεκινά δίνοντας ένα γενικό περίγραμμα της βασικής λογικής ώστε να προετοιμάσει το έδαφος για την περιγραφή των γλωσσών προγραμματισμού, των αλγορίθμων και της μνήμης που έπειται. Κατόπιν οδηγεί τον αναγνώστη με απλά βήματα έως τις ποιναρπαστικές εξελίξεις στην υπολογιστή του σήμερα: τους κβαντικούς υπολογιστές, τις μανθάνουσες μηχανές, τα νευρωνικά δίκτυα, τα αυτοοργανούμενα συστήματα.

Το βιβλίο έχει όλες τις αρετές οι οποίες θα το αναδείξουν σε έναν απολύτως αναγκαίο οδηγό για όσους επιθυμούν να κατανοήσουν σε βάθος πώς λειτουργεί η πλέον διαδεδομένη και σημαντική από τις μηχανές που κατασκεύασε ποτέ ο άνθρωπος: ο υπολογιστής.

- «Δεν μπορεί παρά να εντυπωσιάζεται κανείς από την ικανότητα του Daniel Hillis να συνδυάζει την πρωτοτυπία με τη σαφήνεια. Ακόμη και όπου νόμιζα ότι γνώριζα το θέμα που πραγματεύόταν, εκείνος πάντοτε είχε κάτι να μου διδάξει, πότε με τη βαθύτητα που χαρακτηρίζει τη γνώση του και πότε με την πρωτοτυπία της οπτικής από την οποία το προσεγγίζει.» —Kelvin Kelley, *Wired*

Σελ.: 222, 21 × 14 εκ., Α/Μ, 6.000 δρ.

Κάτοπτρο ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Το μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου

«Οι γνησίως φιλοσοφήσαντες, ω Σύρε, δοκούσι μοι κεχωρικέναι
το θεωρητικόν της φιλοσοφίας από του πρακτικού».

—Πτολεμαίος, Μεγίστη Σύνταξις, α', 1

Μιχάλης Λάμπρου

ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΒΥΖΑΝΤΙΝΟ ΠΟΛΥΓΙΣΤΟΡΑ ΤΖΕΤΖΗ, ΟΠΩΣ γράφει στις Χιλιάδες του, στην είσοδο της Σχολής του Πλάτωνα υπῆρχε η εντολή να μην εισέρχεται κανείς αν δεν ήταν γνώστης της γεωμετρίας: «Πρὸ τῶν προθύρων τῶν αὐτοῦ, γράψας ὑπῆρχε Πλάτων “Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην”». (Χιλιάδες, viii 972-973).

Η εκτίμηση του Πλάτωνα στη γεωμετρία οφειλόταν πρώτα απ' όλα στην μείζονα εκπαιδευτική της αξία, αλλά όχι μόνο. Ένας εξίσου σημαντικός λόγος, όπως περιγράφεται εκτενώς στους διαλόγους του και ιδίως στην Πολιτεία, ήταν επειδή τη θεωρούσε προπαρασκευαστικό μάθημα στα ανώτερα μαθήματα, τη στερεομετρία, την αστρονομία και τη φιλοσοφία. Παραδείγματος χάριν, στον εν λόγω διάλογο ο Σωκράτης και ο συνομιλητής του ορίζουν ως δεύτερο απαραίτητο μάθημα, μετά την αριθμητική, τη γεωμετρία και τρίτο, αφού παρεμβληθεί η στερεομετρία, την αστρονομία: «Τί δαί; Τρίτον θῶμεν ἀστρονομίαν; Ή οὐ δοκεῖ; Έμοιγ' οὖν ἔφη.» (Τι λοιπόν; Να ορίσουμε τρίτο μάθημα την αστρονομία; Ή δεν συμφωνείς; Συμφωνώ, εἶπε).

Η επρροή της Σχολής του Πλάτωνα όσον αφορά την ανάγκη καλού μαθηματικού υποβάθρου για τη μελέτη της αστρονομίας, μια επρροή που είχε τις ρίζες της στους Πυθαγορείους, άφησε ανεξίτηλα σημάδια στην πρόσοδο της τελευταίας. Μαθηματικοί της πρώτης γραμμής, όπως ο Εύδοξος, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, συνέβαλαν ουσιαστικά στην αστρονομία. Αντίστροφα, κορυφαίοι αρχαίοι αστρονόμοι, όπως ο Αρίσταρχος, ο Ἰππαρχος και ο Πτολεμαίος, είχαν εξαιρετική ευχέρεια στα μαθηματικά, στα οποία συνέβαλαν με πρωτότυπες και σημαντικές ανακαλύψεις.

Στο παρόν άρθρο θα ασχοληθούμε με το μαθηματικό μέρος του σπουδαιότερου αστρονομικού έργου



της αρχαιότητας, την περίφημη *Μεγίστην Σύνταξιν* του αλεξανδρινού αστρονόμου Κλαύδιου Πτολεμαίου (~100 μ.Χ. - ~170 μ.Χ.)

Ο Πτολεμαίος ήταν, μαζί με τον Γαληνό, η εξοχότερη μορφή επιστήμονα του αιώνα του. Δεν σώζονται βιογραφικά του στοιχεία, ενώ οι κατά προσέγγιση χρονολογίες του βίου του προσδιορίζονται από την εξέταση φαινομένων όπως εκλείψεις σελήνης κ.ά., που περιγράφει ο ίδιος με λεπτομέρειες στα κείμενά του μετά από δικές του παρατηρήσεις. Το σημαντικότερο έργο του, που κυριάρχησε για 1.500 χρόνια όλων ανεξαιρέτως των ομοειδών έργων, ήταν η *Μεγίστη Σύνταξις*, γνωστότερη ως *Αλμαγέστη* από μεταγενέστερη αραβική παραφθορά του τίτλου της. Σώζονται επίσης η *Γεωγραφία* του, η *Οπτική* του και το αστρολογικό του έργο *Τετράβιβλος*. Ορισμένα έργα του έχουν χαθεί, ενώ άλλα σώζονται μόνο σε αραβική ή σε λατινική μετάφραση.

Αν και πρωτίστως αστρονομικά, αρκετά έργα του Πτολεμαίου περιέχουν πάμπολλες μαθηματικές θεωρίες. Παραδείγματος χάριν, το *Ἄπλωσις επιφανείας* (μόνο στα αραβικά) περιέχει τη μαθηματική θεωρία της στερεογραφικής προβολής της επιφάνειας σφαίρας σε επίπεδο (πολύ νωρίτερα της εκ νέου ανακάλυψης της από τον Mercator), ενώ το *Ανάλημμα* (μόνο στα αραβικά και λατινικά) μελετά την ορθή προβολή σφαίρας επί μεσημβρινού επιπέδου (προκειμένου να μελετηθεί η χάραξη ηλιακών ρολογιών).

Η *Μεγίστη Σύνταξις* αποτελείται από 13 βιβλία, εκ των οποίων το πρώτο, που θα μας απασχολήσει, είναι καθαρά μαθηματικό. Περιέχει τον περίφημο «πίνακα χορδών» του, ο οποίος είναι ανάλογος των σύγχρονων τριγωνομετρικών πινάκων ημιτόνων. Πέραν αυτού, περιέχει ένα τεράστιο υλικό με συστηματοποίηση και επέκταση των γνωστών κατά την εποχή του αστρονομικών γνώσεων. Ενδεικτικά μόνο αναφέρουμε ότι έχει λεπτομερή περιγραφή αστρονομικών οργάνων, εις βάθος μελέτη του γεωκεντρικού συστήματος, της διάρκειας του έτους, των απλανών αστέρων, μελέτη καθενός χωριστά από τους τότε γνωστούς πλανήτες, των εκλείψεων Σελήνης και Ήλιου, των μεταπτώσεων των ισημεριών (του Ιππάρχου) κ.λπ. Επίσης το κείμενο αποτελεί πλούσια πηγή πληροφοριών για τις γνώσεις των προκατόχων του, πράγμα ιδιαίτερα χρήσιμο για τον σύγχρονο μελετητή, αφού τα αστρονομικά έργα των Πυθαγορείων, του Ευδόξου, του Αριστάρχου, του Απολλωνίου, του Ιππάρχου κ.ά. χάθηκαν εξ ολοκλήρου ή κατά τον κύριο όγκο τους.

Ας έρθουμε στο πρώτο βιβλίο. Εδώ ο στόχος είναι να καταρτίσει τριγωνομετρικούς πίνακες (για να δανειστώ έναν όρο που δεν υπήρχε την εποχή του, αλλά καθιερώθηκε μετά την έκδοση του *De Triangulis omnimodis* του Regiomontanus —μεταφραστού και θαυμαστού του Πτολεμαίου— τον 15ο αιώνα). Οι πίνακες αυτοί αποτελούν βελτίωση άλλων παλαιοτέρων, χαμένων σήμερα, του Ιππάρχου. Αξίζει να προσθέσουμε ότι από τους κατοπινούς πάμπολλους σχολιαστές του Πτολεμαίου, οι περισσότεροι ασχολήθηκαν με το περιγραφικό τμήμα της αστρονομίας του. Ο μνημονευθείς Regiomontanus (1436-1476),

αποτελεί τη μειοψηφία που ασχολήθηκε περισσότερο με το μαθηματικό μέρος, όπως φαίνεται από την *Επιτομή* του της *Αλμαγέστης*, την οποία συνέταξε από το ελληνικό πρωτότυπο: ελληνικά έμαθε από τον καρδινάλιο Βησσαρίωνα, ο οποίος τον εμύησε στους θησαυρούς των αρχαίων χειρογράφων που βρήκαν τον δρόμο προς τη Δύση μετά την άλωση της Κωνσταντινουπόλεως.

Ο πίνακας χορδών, στο πρώτο βιβλίο της *Μεγίστης Συντάξεως*, είναι ένας πίνακας που δίνει το μήκος της χορδής κύκλου ακτίνας 60 μονάδων, ανά μισή μοίρα έως τις 180° . Είναι απλό να δει κανείς ότι αυτό ισοδυναμεί με την κατάρτιση πίνακα ημιτόνων ανά $1^\circ/4$ της μοίρας από $1/4$ έως 90° , αφού

$$\text{χορδή } (\theta) = 2 \eta \mu \frac{\theta}{2}.$$

Το γεγονός ότι ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί ακτίνα 60 μονάδων, ενώ εμείς σήμερα ορίζουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο ως έχοντα ακτίνα 1, δεν δημιουργεί διαφορά· η επιλογή αυτή είναι θέμα σύμβασης, και θα μπορούσαμε κάλλιστα να υιοθετήσουμε σήμερα, χωρίς αλλαγή στην ουσία και μάλλον με κάποια πλεονεκτήματα, ως βάση το 60. Στη χρονομετρία άλλωστε αυτό ακριβώς κάνουμε, ενώ στην αρχαία αστρονομία η βάση 60 ήταν φυσικότερη. Όπως γράφει ο Πλούταρχος στο *Περί Ίσιδος και Οσίριδος*, «τὰ έξήκοντα τῶν μέτρων πρῶτον ἔστι τοῖς περὶ τὰ οὐράνια πραγματευομένοις», ενώ ο Υψηλής στον *Αναφορικό* του ερμηνεύει ότι η επιλογή αυτή έχει τη ρίζα της στην επαστροφή του ζωδιακού στην αρχική του θέση αναφέροντας ότι «όμοίως δὴ καὶ τοῦ χρόνου, ἐν ὃ ὁ ζωδιακὸς ἀφ' οὐ ἔτυχε σημείου ἐπὶ τὸ αὐτὸν σημεῖον παραγίγνεται, εἰς 360 χρόνους ἵσους διηρημένου, ἔκαστος τῶν χρόνων μοῖρα χρονικὴ καλείσθω».

Ας έρθουμε λοιπόν στην περιγραφή της ιδιοφυούς μεθόδου κατάρτισης του πίνακα χορδών (ισοδύναμα, ημιτόνων) στην *Μεγίστη Σύνταξιν*. Ο πρώτος στόχος του Πτολεμαίου είναι να προσδιορίσει το μήκος χορδής τόξου 1 μοίρας. Για ευκολία του αναγνώστη, θα θεωρήσουμε ότι ο κύκλος έχει ακτίνα 1, διότι οι τριγωνομετρικοί τύποι που εμφανίζονται έχουν την οικεία σε εμάς μορφή, αντί να είναι πολλαπλασιασμένοι επί 60.

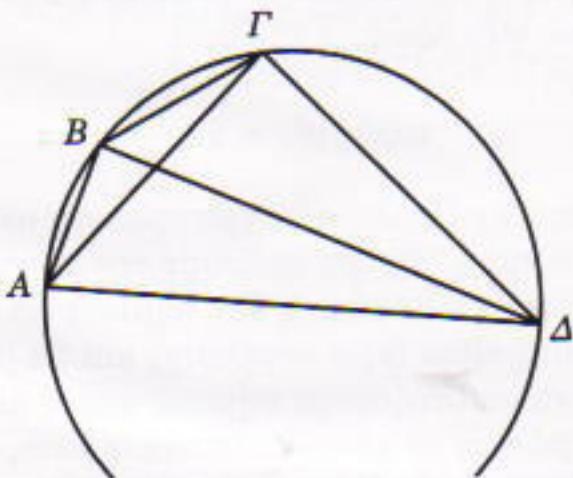
Βήμα 1. Αποδεικνύει το λεγόμενο σήμερα θεώρημα του Πτολεμαίου (της γεωμετρίας), ότι δηλαδή σε εγγράψιμα τετράπλευρα το γινόμενο των διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών. Η δική του διατύπωση (*Μεγίστη Σύνταξις*, 36) είναι: «Ἐστω γάρ κύκλος ἐγγεγραμμένον ἔχων τετράπλευρον τυχὸν τὸ *ΑΒΓΔ*, καὶ ἐπεξεύχθωσαν (= ας ενωθούν) αἱ *ΑΓ* καὶ *ΒΔ*. Δεικτέον ότι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ* καὶ *ΒΔ* περιεχόμενον ὄρθογώνιον ἵσον ἔστι συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΔΓ* καὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΒΓ*.»

Η απόδειξή του είναι η ίδια με αυτή που βρίσκει κανείς στα σύγχρονα εγχειρίδια γεωμετρίας και δεν υπάρχει λόγος να την επαναλάβουμε εδώ.

Βήμα 2. Αποδεικνύει ότι αν στο προηγούμενο βήμα πάρουμε το *ΑΔ* ως διάμετρο (που στην περίπτωσή του έχει γνωστό μήκος 120 μονάδων) τότε, αν είναι γνωστά

τα μήκη δύο χορδών, όπως οι AB , AG , θα είναι γνωστή και η χορδή του τόξου της διαφοράς των τόξων AB , AG : «Προεκτεθέντος έστω ήμικύκλιον το $AB\Gamma\Delta$ ἐπὶ διαμέτρου τῆς AD , καὶ ἀπὸ τοῦ A δύο διήχθωσαν αἱ AB , AG καὶ ἔστω ἑκατέρᾳ αὐτῶν δοθείσα τῷ μεγέθει, οἷων ἡ διάμετρος δοθείσα 120, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ BG . Λέγω δὲ τοῦ καὶ αὐτῆς δέδοται.»

Η απόδειξη του είναι απλή. Πράγματι, οι $B\Delta$, $\Gamma\Delta$ υπολογίζονται από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $AG\Delta$ (Σχήμα 1), και μια εφαρμογή του προηγουμένου δίνει τη ζητούμενη BG .



Σχήμα 1

Ας σταθούμε όμως λίγο σε αυτό το σημείο και ας το δούμε με σύγχρονα σύμβολα. Εδώ φαίνεται η αξία του θεώρημας του Πτολεμαίου.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι από το θεώρημα του Πτολεμαίου έπειται ως ειδική περίπτωση ο τύπος

$$\eta\mu(\theta - \varphi) = \eta\mu\sin\theta - \sin\theta\eta\mu.$$

[Υπόδειξη: Εάν AD διάμετρος, $AD = 2R$, και λάβουμε $\angle A\Delta G = \theta$, $\angle A\Delta B = \varphi$, τότε AG , BG , AB είναι χορδές εγγεγραμένων γωνιών θ , $\theta - \varphi$, φ , αντίστοιχα, και άρα έχουν μήκος $2R\eta\mu\theta$, $2R\eta\mu(\theta - \varphi)$, $2R\eta\mu\varphi$. Επίσης είναι $B\Delta = 2R\sin\varphi$, $\Gamma\Delta = 2R\sin\theta$].

Με άλλα λόγια, αν είναι γνωστοί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των θ και φ , προσδιορίζονται και αυτοί της $\theta - \varphi$. Αυτό μας φέρνει στο επόμενο βήμα.

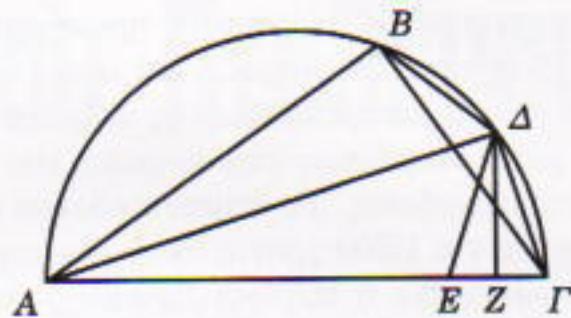
Βήμα 3. Από το προηγούμενο μπορούμε να βρούμε το μήκος χορδών πολλών άλλων τόξων παίρνοντας διαφορές. Παραδείγματος χάριν, από τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι γνωστές οι χορδές τόξων 60° και 72° (το τελευταίο αποτελεί πλευρά κανονικού πενταγώνου), οπότε υπολογίζεται και η χορδή τόξου $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$. Ισοδύναμα, υπολογίζεται το ημίτονο των 6° .

Βήμα 4. Το επόμενο βήμα είναι πάλι θεώρημα της γεωμετρίας, το οποίο όμως συνδέει το μήκος μιας χορδής και το αντίστοιχο της μισής γωνίας. Δείχνει ότι αν AG είναι η διάμετρος ημικυκλίου $AB\Gamma\Delta$, Δ το μέσον του τόξου BG και Z η προβολή τού Δ στην AG , τότε

$$ZG = \frac{1}{2}(AG - AB).$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε την παραπάνω πρόταση.

[Υπόδειξη: Παίρνουμε $AE = AB$ (Σχήμα 2). Με σύγκριση των τριγώνων $AB\Delta$, $A\Delta E$ έπειται $\Delta E = \Delta B$ ($= \Delta \Gamma$). Παρατηρήστε τώρα ότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΔEG το Z είναι μέσον της EG .]



Σχήμα 2

Το ενδιαφέρον είναι να εκφράσουμε την προηγούμενη πρόταση σε πιο γνώριμη τριγωνομετρική μορφή.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι αν θέσουμε $\angle BAG = \theta$, τότε η προηγούμενη πρόταση εκφράζει την ταυτότητα

$$\eta\mu^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin\theta).$$

[Υπόδειξη: Είναι $\angle \Gamma\Delta\Delta = \angle \Delta\Delta A = \theta/2$. Επίσης, από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$, $\Gamma\Delta Z$, είναι $\angle \Gamma\Delta Z = \angle \Gamma\Delta\Delta = \theta/2$. Τέλος, $AB = 2R\sin\theta$, $\Gamma\Delta = 2R\eta\mu\frac{\theta}{2}$, $ZG = \Gamma\Delta\eta\mu\frac{\theta}{2}$.]

Με άλλα λόγια, ο Πτολεμαίος έδειξε τον γνωστό μας τύπο $\sin\theta = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}$. Πάντως, με χρήση των παραπάνω, και αρχίζοντας από την χορδή τόξου 12° , υπολογίζει διαδοχικά τις χορδές τόξων 6° , 3° , $3^\circ/2$ και $3^\circ/4$. Ισοδύναμα, με όρους ημιτόνων, από το $\eta\mu 6^\circ$ προσδιορίζονται τα $\eta\mu 3^\circ$, $\eta\mu \frac{3^\circ}{2}$, $\eta\mu \frac{3^\circ}{4}$, κ.λπ.

Άσκηση 4. Δίνεται ότι $\eta\mu 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ και, ως γνωστόν, $\eta\mu 60^\circ = \sqrt{3}/2$. Να βρεθούν παραστάσεις με ριζικά για τα $\eta\mu 12^\circ$, $\eta\mu 6^\circ$ και $\eta\mu 3^\circ$.

[Υπόδειξη: Με χρήση του τύπου $\eta\mu 12^\circ = \eta\mu(72^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 72^\circ \sin 60^\circ - \sin 72^\circ \eta\mu 60^\circ$, προκύπτει, παραδείγματος χάριν, ότι $\eta\mu 12^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$. Τα $\eta\mu 6^\circ$, $\eta\mu 3^\circ$ προσδιορίζονται από τον τύπο

$$\eta\mu^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \sin\theta).$$

Εδώ πρέπει να κάνουμε μια ανάπauλa. Αν είχαμε στόχο να προσδιορίσουμε την ακριβή τιμή του $\eta\mu 1^\circ$, η παραπάνω διαδικασία θα μας οδηγούσε στα ημίτονα των $3^\circ/2$ και $3^\circ/4$, που βρίσκονται εκατέρωθεν της 1° . Προκύπτει λοιπόν το εύλογο ερώτημα αν υπάρχει τρόπος να φτάσει κανείς απευθείας στη 1° . Το ερώτημα πρέπει να απασχόλησε τον Πτολεμαίο· ωστόσο δεν κατάφερε να το λύσει, διότι εγκύπτουν τεράστιες δυσκολίες για τις οποίες μόνο τα σύγχρονα μαθηματικά μπορούν να δώσουν την απάντηση! Πιο συγκεκριμένα, από τον τύπο $\eta\mu 3^\circ$

$= 3\eta\mu^3 - 4\eta\mu^3\theta$, η εύρεση του $\eta\mu^1$ από το $\eta\mu^3$ απαιτεί τη λύση ως προς $\eta\mu^1$ της τριτοβάθμιας εξίσωσης $4(\eta\mu^1)^3 - 3(\eta\mu^1) + \eta\mu^3 = 0$. Την εποχή του Πτολεμαίου δεν ήταν γνωστή η μέθοδος επίλυσης της γενικής τριτοβάθμιας εξίσωσης (που επιτεύχθηκε τον 16ο αιώνα), αν και ο Αρχιμήδης είχε επιλύσει ορισμένες ειδικές περιπτώσεις που συνάντησε στις γεωμετρικές του έρευνες. Το πρόβλημα όμως δεν έγκειται μόνο σε αυτό. Πρώτα απ' όλα, ας δοκιμάσει ο αναγνώστης το εξής.

Άσκηση 5. Να επιλυθεί με την μέθοδο Cardano ως προς $\eta\mu^1$ η κυβική εξίσωση

$$4(\eta\mu^1)^3 - 3(\eta\mu^1) + \eta\mu^3 = 0,$$

όπου το $\eta\mu^3$ θεωρείται γνωστό. (Συγκεκριμένα, από την Άσκηση 4 προκύπτει

$$\eta\mu^3 = \frac{1}{16} [(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1) - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}].$$

Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι η λύση στην Άσκηση 5 έχει, για κατάλληλους πραγματικούς αριθμούς a και b , τη μορφή

$$\eta\mu^1 = \sqrt[3]{a + bi} + \sqrt[3]{a - bi} \quad (\text{όπου } i = \sqrt{-1}).$$

Με άλλα λόγια, παρόλο που το $\eta\mu^1$ είναι πραγματικός αριθμός, η παράσταση που βρήκαμε περιέχει το $i = \sqrt{-1}$. Είναι άραγε δυνατόν να γράψουμε μια παράσταση όπου το $\sqrt{-1}$ να μην φαίνεται; Ξέρουμε ότι απλοποιείται, αλλά μπορούμε άραγε να το «βγάλουμε από την μέση»; Η απρόσμενη απάντηση είναι ότι, όπως αποδεικνύεται με τη σύγχρονη θεωρία Galois, ότι κι αν κάνει κανείς, η παράσταση του $\eta\mu^1$ με αλγεβρικές εκφράσεις περιέχει την $\sqrt{-1}$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι δχι μόνο ο Πτολεμαίος αλλά και τα ίδια τα μαθηματικά αδυνατούν, από τη φύση τους, να γραφεί η ζητούμενη αλγεβρική παράσταση σε μορφή που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον πραγματικό κόσμο.

Ας επανέλθουμε λοιπόν στο κύριο θέμα μας. Η δεινότητα του Πτολεμαίου φαίνεται από τον τρόπο τον οποίο ανακάλυψε για να παρακάμψει τις εγκύπτουσες δυσκολίες. Η μέθοδος του έγκειται στο να χρησιμοποιήσει προσεγγιστικές τιμές αλλά, όπως γράφει ο ίδιος, οι διαφορές τους από τις ακριβείς τιμές είναι αμελητέες: «τὸ παραλειπόμενον μηδενὶ ἀξιολόγῳ διαφέρῃ τοῦ πρὸς αἴσθησιν ἀκριβοῦς.»

Βήμα 5. Αποδεικνύει την ενδιαφέρουσα πρόταση ότι αν AB, BG δύο χορδές ενός κύκλου, με $AB < BG$, τότε ισχύει

$$\frac{BG}{AB} < \frac{\text{τόξο } BG}{\text{τόξο } AB}.$$

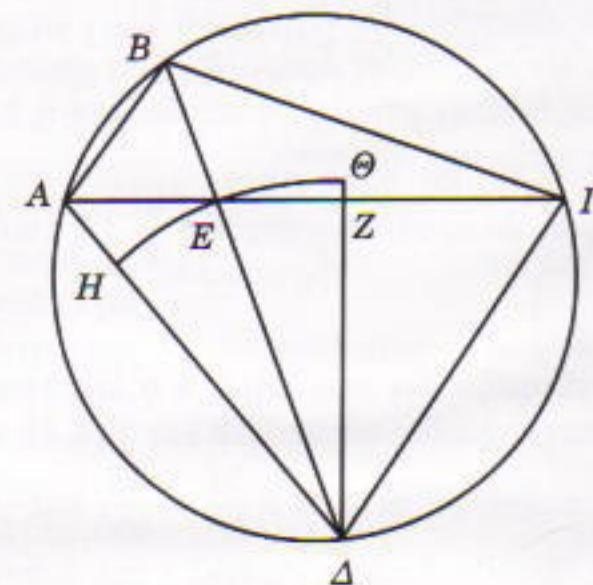
Η διατύπωση του είναι «έάν έν τον κύκλων διαχθῶσιν ἄνισοι δύο εὐθεῖαι (= εύθυγραμμα τμήματα) ή μείζων πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος εὐθείας περιφέρεια (= το τόξο) πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος» (Αλμαγέστη, α', 46).

Άσκηση 6. Αποδείξτε το θεώρημα του Βήματος 5. [Εκτενής υπόδειξη στα βήματα του Πτολεμαίου: Έστω Δ το μέσον του τόξου AG (Σχήμα 3), οπότε $B\Delta$ διχοτόμος της $\angle ABG$, και ισχύει

$$\frac{BG}{AB} = \frac{GE}{EA}. \quad (1)$$

(α). Έστω Z το μέσον του AG , και θέτουμε $\angle A\Delta B = \theta$, $\angle E\Delta G = \varphi$. Δείξτε ότι

$$GE = AE + 2EZ \quad \text{και} \quad \varphi = \theta + 2\angle E\Delta\Theta. \quad (2)$$



Σχήμα 3

(β). Έστω ότι ο κύκλος κέντρου Δ και ακτίνας ΔE τέμνει τις AD, EZ στα H και Θ , αντίστοιχα. Από τις προφανείς ανισότητες

$$(\text{εμβ. τριγώνου } \Delta EZ) < (\text{εμβ. τομέα } E\Delta\Theta),$$

$$(\text{εμβ. τομέα } \Delta EH) < (\text{εμβ. τριγώνου } \Delta EA),$$

δείξτε ότι ισχύει $\frac{EZ}{EA} < \frac{\angle E\Delta\Theta}{\angle E\Delta A}$. Με χρήση των (2) δείξτε ότι $\frac{GE}{EA} < \frac{\varphi}{\theta}$, που είναι η ζητούμενη λόγω της (1).]

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η πρόταση του Πτολεμαίου στο Βήμα 5 ισοδυναμεί με τη σχέση

$$\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta} < \frac{\varphi}{\theta},$$

αν $\theta < \varphi < \pi/2$.

[Υπόδειξη: Η χορδή στην οποία βαίνει η εγγεγραμένη γωνία θ ισούται με $2R\eta\mu\theta$.]

Η ανισότητα στην Άσκηση 7 λέει ουσιαστικά ότι η συνάρτηση $\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι φθίνουσα στο $(0, \pi/2)$. Η απόδειξη του Πτολεμαίου ήταν βέβαια καθαρά γεωμετρική, ενώ σήμερα μάλλον θα την αποδείκνυε κανείς με τη χρήση απειροστικού λογισμού.

Άσκηση 8. Δείξτε με χρήση παραγώγων ότι η συνάρτηση $\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι φθίνουσα στο $(0, \pi/2)$.

[Υπόδειξη: Με χρήση της γνωστής ανισότητας $x < e^x$

στο $(0, \pi/2)$, εύκολα αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της $\frac{\eta}{x}$ είναι αρνητική).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στα *Οπικά* του Ευκλείδη υπάρχει παρεμφερές (αλλά ευκολότερο) θεώρημα το οποίο, με σύγχρονη ορολογία, λέει ότι η συνάρτηση $\frac{\text{εφ}}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, \pi/2)$. Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι καθαρά γεωμετρική, ενώ εύκολα ο αναγνώστης μπορεί να το αποδείξει με παραγώγους. Πάντως, το αποτέλεσμα αυτό το χρησιμοποιεί αργότερα, χωρίς απόδειξη, ο μεγάλος αστρονόμος Αρίσταρχος ο Σάμιος στο *Περί μεγεθών και αποστημάτων* (Πρόταση 7).

Βήμα 6. Με απευθείας εφαρμογή του αποτελέσματος του Βήματος 5 είναι εύκολο να αποδειχτεί η διπλή ανισότητα της επόμενης άσκησης.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι $\frac{4}{3} \text{ χορδή } \left(\frac{3}{4} \right) < \text{ χορδή } (1^\circ) < \frac{2}{3} \text{ χορδή } \left(\frac{3}{2} \right)$.

Σας υπενθυμίζω ότι στο Βήμα 4 ο Πτολεμαίος έχει προσδιορίσει τις χορδές τόξων $3^\circ/2$ και $3^\circ/4$. Οι τιμές του (σε κύκλο ακτίνας 60) είναι $1 + \frac{34}{60} + \frac{15}{60^2}$ και $\frac{47}{60} + \frac{8}{60^2}$, αντίστοιχα. Έτσι οι διπλή ανισότητα της Άσκησης 9 δίνει $1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} < \text{ χορδή } (1^\circ) < 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$. Το σημαντικό είναι ότι οι (προσεγγιστικές) τιμές εκατέρωθεν της χορδής (1°) είναι ίδιες! Συμπεραίνει λοιπόν ότι (με ακρίβεια δύο εξηκονταδικών ψηφίων) ισχύει: χορδή $(1^\circ) = 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$, και από το Βήμα 4 (Άσκηση 3) βρίσκει με πράξεις ότι $\text{ χορδή } \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{31}{60} + \frac{25}{60^2}$.

Οι τιμές του Πτολεμαίου, προσαρμοσμένες στο δεκαδικό σύστημα και σε μοναδιαίο κύκλο, δίνουν $\eta \mu 1^\circ \approx 0,017453703$ —δηλαδή σφάλμα μικρότερο του $0,000001$!

Βήμα 7. Το τελευταίο βήμα του Πτολεμαίου, τώρα που γνωρίζει τη χορδή $\left(\frac{1}{2} \right)$, είναι να «κτίσει προς τα πάνω», ώστε να γεμίσει τις τιμές του πίνακά του. Εκεί κάνει (ισοδύναμα) χρήση μιας άλλης πολύ γνωστής μας ταυτότητας, της $\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$. Τόσο η διατύπωση όσο και η απόδειξη της είναι γεωμετρικές, και αποτελούν παραλλαγές του Βήματος 1.

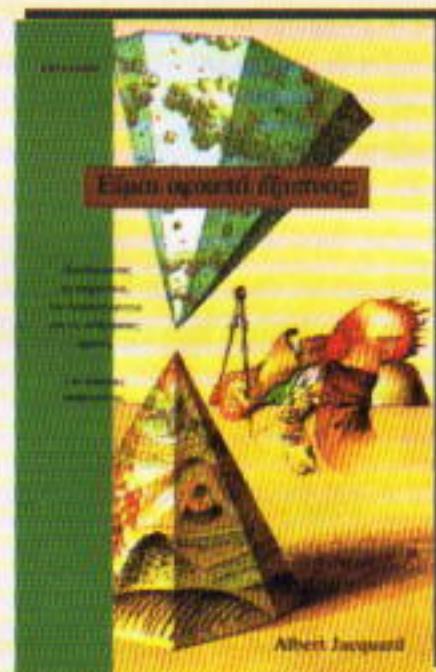
Αρκετά για την αδιαμφισβήτητη αξία του Πτολεμαίου ως μαθηματικού. Στα επόμενα τεύχη θα ασχοληθούμε και με άλλους ισχυρούς μαθηματικούς της αρχαιότητας, όπως είναι ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης.

Ο Μιχάλης Λάμπρου είναι Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα αφορούν τη συναρτησιακή ανάλυση.

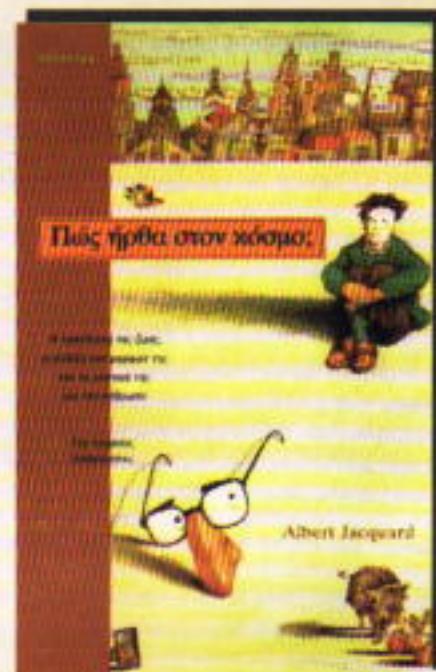
Η στήλη του, που πλέον θα εμφανίζεται τακτικά στο ελληνικό *Quantum*, θα αφορά μαθηματικές ιδέες που άφησαν ανεξίτηλα ίχνη στην ιστορία των μαθηματικών.

To e-mail του είναι: lambrou@itia.math.uch.gr.

ΓΙΑ ΤΡΥΦΕΡΟΥΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΕΣ



Τι είναι η νοημοσύνη: Μπορούμε να τη μετρήσουμε: Βοηθά ο ύπνος στην ανάπτυξη της νοημοσύνης μας: Μπορεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής να αντικαταστήσει τον ανθρώπινο εγκέφαλο: Και αυτός, με τη σειρά του, πώς λειτουργεί: Πώς διαμορφώνεται η προσωπικότητα κάθε ανθρώπου: Και τι πρέπει να ορίζουμε ως επιτυχία στη ζωή: Πώς πρέπει να αντιμετωπίζουμε τους αλλοδαπούς, τους φυλακισμένους, τους διανοητικά καθυστερημένους: Και πόση σημασία πρέπει να δίνουμε στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των ανθρώπων:



Πώς και πότε εμφανίστηκε η ζωή στον πλανήτη μας: Πώς εξελίχθηκαν οι διάφοροι οργανισμοί: Είναι αλήθεια ότι ο άνθρωπος προέρχεται από τον πίθηκο: Ποιοι είναι οι μηχανισμοί της κληρονομικότητας: Υπάρχει πιθανότητα να συναντήσετε κάποτε έναν τέλειο σωσία σας: Και γιατί μοιάζετε στους γονείς σας: Ποιο θα είναι το μέλλον του πλανήτη μας λόγω της εκρηκτικής πληθυσμιακής αύξησης: Θα μπορέσουμε να ξεπεράσουμε τα προβλήματα της μόλυνσης και των πολεμικών συγκρούσεων ώστε να συνεχίσει ο πλανήτης μας να υπάρχει:

Ο γνωστός διανοούμενος *Albert Jacquard*, επιθυμώντας να μεταδώσει την εμπειρία και τις γνώσεις του στο νεαρό αναγνωστικό κοινό, επηγειρεί, με τρόπο πρωτότυπο και χιουμοριστικό, να απαντήσει σε δεκάδες ερωτήσεις που μας απασχολούν σήμερα.

Κάθε τόμος: σελ.: 88, 16 × 25 εκ., Έγχρωμο, Πανόδετο, 4.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M176

Κάθε φορά που συναντιούνται η καθηγήτρια και ο βοηθός της (ή και σε κάθε άλλο χρονικό διάστημα), ο λόγος των αποστάσεων που έχουν διανύσει είναι σταθερός και ισούται με το λόγο των ταχυτήτων με τις οποίες περπατούν. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να λύσουμε το πρόβλημα. Τι απόσταση δύμως έχουν διανύσει ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συναντήσεις του; Την πρώτη φορά που συναντιούνται πρέπει να βρεθούν «πρόσωπο με πρόσωπο». Όμως, η ανάλυση της δεύτερης συνάντησης είναι πιο περίπλοκη.

Έστω S η απόσταση μεταξύ των δύο σπιτιών. Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

(α) Τη στιγμή της δεύτερης συνάντησης, έχουν και οι δύο διανύσει όλη τη διαδρομή μία φορά και γυρίζουν προς τα πίσω. Οι αναλογίες που αναφέραμε μας δίνουν

$$\frac{55}{S - 55} = \frac{S + 85}{2S - 85}.$$

Έχουμε ότι η αναλογία $a/b = c/d$ είναι ισοδύναμη με την αναλογία $a/(a+b) = c/(c+d)$ (μπορείτε να το επαληθεύσετε αν, για παράδειγμα, πολλαπλασιάσετε τους άκρους με τους μέσους). Στη συγκεκριμένη περιπτωση, αυτό σημαίνει ότι $55/S = (S + 85)/3S$, ή $165 = S + 85$. Τότε, δύμως, $S = 80$, και η δεύτερη συνάντηση δεν θα μπορούσε να έχει γίνει σε απόσταση 85 m από το σπίτι του βοηθού. Επομένως, η περίπτωση (α) είναι αδύνατη.

(β) Η καθηγήτρια φτάνει στο σπίτι του βοηθού και επιστρέφει, προλαβαίνοντας το βοηθό πριν αυτός φτάσει στο σπίτι της. Σε αυτή την περίπτωση, η αναλογία μάς δίνει

$$\frac{55}{S - 55} = \frac{S + 85}{2S - 85}.$$

Αυτή η σχέση μας οδηγεί σε μια μάλλον περίπλοκη δευτεροβάθμια εξίσωση με κάπως μεγάλους συντελεστές.

Ωστόσο, μπορούμε επίσης να ακολουθήσουμε τον εξής συλλογισμό. Σε αυτή την περίπτωση, ο βοηθός έχει περπατήσει 85 m ενώ η καθηγήτρια περπατά το διπλάσιο αυτής της απόστασης και κάτι περισσότερο. Επομένως, η ταχύτητά της πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ταχύτητας του βοηθού, και η απόσταση που έχει διανύσει ο βοηθός κατά τη στιγμή της πρώτης συνάντησης πρέπει να είναι μικρότερη από το μισό της απόστασης που είχε διανύσει η καθηγήτρια —δηλαδή, μικρότερη από $55/2 = 27,5$ m. Άρα, η απόσταση μεταξύ των σπιτιών τους θα ήταν μικρότερη από $55 + 27,5 = 82,5 < 85$ m —συνεπώς και αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν λύναμε την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση.

(γ) Ο βοηθός φτάνει στο σπίτι της καθηγήτριας και επιστρέφει, προλαβαίνοντας την καθηγήτρια πριν αυτή φτάσει στο σπίτι του. Σε αυτή την περίπτωση η αναλογία μάς δίνει

$$\frac{55}{S - 55} = \frac{S - 85}{2S - 85}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά ισοδύναμες αναλογίες. Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι η $a/b = c/d$ είναι ισοδύναμη με την $a/b = (c - 2a)/(d - 2b)$. Έπειτα ότι κάθε κλάσμα της αναλογίας μας (το οποίο δηλώνει και το λόγο των αποστάσεων που διανύουν) είναι ίσο με $(S - 195)/25$. Άρα, τη στιγμή που ο βοηθός έχει περπατήσει 25 m η καθηγήτρια έχει περπατήσει $S - 195$ m

και βρίσκεται σε απόσταση 195 mέτρων από το σπίτι του βοηθού. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ των δύο μαγαζιών είναι $195 - 25 = 170$ m.

M177

Θεωρούμε τους λογαρίθμους με βάση 2 των δύο μελών της δεδομένης εξίσωσης:

$$x \log_2 x = -\frac{1}{2}.$$

Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$m = -\log_2 x.$$

Τότε, η εξίσωση γίνεται

$$2^{-m} \cdot (-m) = -2^{-1},$$

και μετά τις αναγωγές έχουμε

$$m = 2^{m-1}.$$

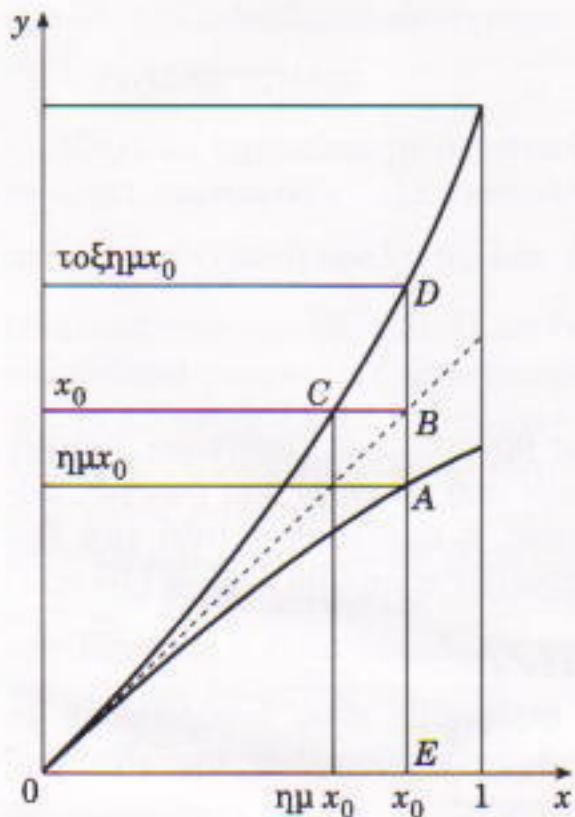
Με λίγη οξυδέρκεια μπορούμε να μαντέψουμε ότι η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες: $m_1 = 1$ και $m_2 = 2$. Οι αντίστοιχες τιμές για το x είναι $x_1 = 1/2$ και $x_2 = 1/4$.

Με τη βοήθεια του απειροστικού λογισμού μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες. Μπορούμε να γράψουμε την αρχική εξίσωση στη μορφή $x \cdot \ln x = a$, όπου $a = -(1/2)\ln 2$. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y = x \cdot \ln x$ λαμβάνει κάποια τιμή a σε τρία διαφορετικά σημεία. Τότε, η παράγωγός της, $y' = 1 + \ln x$, πρέπει να μηδενίζεται σε δύο τουλάχιστον σημεία, κάτι που είναι αδύνατο. Συνεπώς, το πλήθος των ριζών της αρχικής εξίσωσης είναι το πολύ δύο.

Απάντηση: $x_1 = 1/2$ και $x_2 = 1/4$.

M178

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται οι καμπύλες $y = \eta x$, $x = \eta y$ και $y = x$. Πάνω τους σημειώνονται τα σημεία $A(x_0, \eta x_0)$, $B(x_0, x_0)$, $C(\eta x_0, x_0)$ και $D(x_0, \eta x_0)$. Είναι προφανές



Σχήμα 1

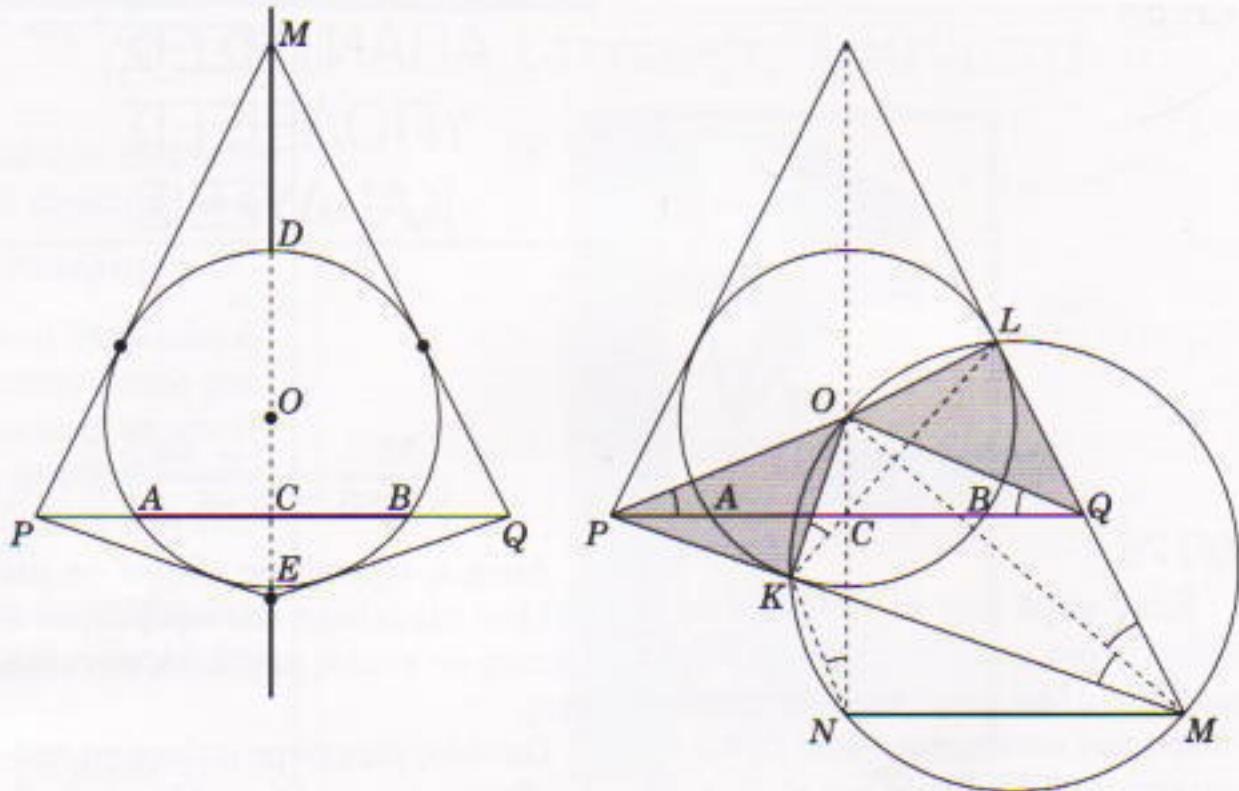
ότι τα σημεία C και D ανήκουν στην ίδια καμπύλη $y = \text{τοξημ}x$, και ότι οι καμπύλες OA και OC είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο OB της γωνίας των αξόνων. Η παράγωγος της $y = \eta μx$ (της καμπύλης OA) είναι $y' = \text{συν}x \leq 1$. Επομένως, η κλίση της OA δεν υπερβαίνει το 1 σε κανένα σημείο. Έπειτα ότι η κλίση της καμπύλης OC (που είναι συμμετρική της OA ως προς την ευθεία OB) δεν μπορεί να είναι μικρότερη του 1 σε κανένα σημείο. Άρα, η κλίση του τμήματος CD είναι μεγαλύτερη των 45° . Συνεπώς, $BD > BC$, και η διαφορά $BD - AB = BD - BC$ είναι θετική. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}\eta μx_0 + \text{τοξημ}x_0 &= EA + ED = \\(EB - AB) + (EB + BD) &= \\2EB + (BD - AB) &> 2EB = 2x_0.\end{aligned}$$

M179

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις (Σχήμα 2).

(1) Τα ζεύγη των εφαπτομένων που είναι συμμετρικά ως προς την κάθετη OC (όπου C το μέσο της AB) θα τέμνονται πάνω σε αυτή την κάθετη (λόγω συμμετρίας). Αντιστρόφως, για κάθε σημείο της ευθείας OC που δεν ανήκει στην διάμετρο DE , μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ζεύγος εφαπτομένων που τέμνουν την ευθεία AB σε σημεία P και Q τέτοια ώστε $PA = QB$. Συνεπώς, ένα μέρος



Σχήμα 2

του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου αποτελείται από εκείνα τα σημεία της κάθετης OC που βρίσκονται εκτός του κύκλου. Αν η AB είναι διάμετρος, τότε αυτός είναι ολόκληρος ο τόπος.

(2) Θεωρούμε ένα μη συμμετρικό ζεύγος εφαπτομένων LQM και PKM . Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία που συνδέει τα σημεία επαφής τους με τον κύκλο διέρχεται από το C . Πράγματι, συνδέουμε το O με τα P και Q και φέρουμε ακτίνες προς τα σημεία επαφής. Έτσι προκύπτει το ζεύγος των ίσων τριγώνων POK και QOL ($\angle PKO = \angle QLO = 90^\circ$, $OK = OL$ και $PO = QO$). Αφού $\angle OKP = \angle OCP = 90^\circ$, τα σημεία P , O , C και K ανήκουν στον ίδιο κύκλο με τη διάμετρο PO . Συνεπώς, $\angle PCK = \angle POK$. Ομοίως, τα σημεία L , O , C και Q ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο OQ και, επομένως, $\angle LCQ = \angle LOQ$. Άρα, $\angle LCQ = \angle PCK$, οπότε τα σημεία K , L και C ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε χορδή που ενώνει τα σημεία επαφής διέρχεται από μέσο της χορδής AB .

Στη συνέχεια φέρουμε την κάθετη MN επί την προέκταση της OC . Η MO φαίνεται υπό ορθή γωνία από τα N , K και L . Επομένως, τα σημεία M , N , K , O και L ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο OM . Αν σχεδιάσουμε αυτό τον κύκλο, θα διαπιστώσουμε ότι $\angle KNO = \angle OKL$, διότι βαίνουν

στις ίσες χορδές OL και OK . Συνεπώς, τα τρίγωνα OCK και OKN είναι όμοια. Έπειτα λοιπόν ότι $ON = (OK)^2/OC$, λόγος ανεξάρτητος από τις θέσεις των σημείων P και Q . Άρα, για κάθε ζεύγος σημείων P και Q , το τμήμα ON έχει σταθερό μήκος και το ζητούμενο τμήμα του γεωμετρικού τόπου είναι μια ευθεία παράλληλη προς την AB . (Σε ποιο προχωρημένη γεωμετρία, η ευθεία αυτή ονομάζεται πολική ευθεία του σημείου C .)

Δεύτερη λύση. Η ευθεία που βρήκαμε στο μέρος (2) μπορεί να προκύψει και με άλλον τρόπο. Παρατηρούμε ότι το $POQM$ είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο, διότι $\angle OPM + \angle OQM = \angle OQL + \angle OQP = 180^\circ$. Συνεπώς, $\angle OMP = \angle OQP = \angle OPC$ και $\angle OMN = \angle OMP + \angle PMN = \angle OPC + \angle QPM = \angle OPK$. Από τις ισότητες αυτές έπειται η ομοιότητα των εξής ζευγών τριγώνων: των OMK και OPC και των OMN και OPK . Συνεπώς, $OK/OM = OC/OP$ και $ON/OM = OK/OP$. Αν διαιρέσουμε τη δεύτερη ισότητα με την πρώτη βρίσκουμε $ON/OK = OK/OC$. Έχουμε λοιπόν ξανά ότι $ON = (OK)^2/OC$, λόγος ανεξάρτητος από τις θέσεις των σημείων P και Q .

Απάντηση: Μια ευθεία παράλληλη στην AB συν το μέρος της ευθείας OC που βρίσκεται εκτός του κύκλου (όπου O είναι το κέντρο του κύκλου και C το μέσο της χορδής AB).

M180

Αφού D είναι το μέσον της BC , έπειτα ότι $S_{BMD} = S_{DMC}$ και $S_{PBD} = S_{PCD}$. Επομένως, έχουμε

$$S_{BMPC} = S_{BMD} + S_{PDC} = \\ S_{CMD} + S_{PDB} = S_{BMPC}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το θεώρημα ότι το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου (κυρτού ή μη κυρτού) δίνεται από το ημιγινόμενο των διαγωνίων του επί το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν. Συνεπώς,

$$S_{BMPC} = S_{BMPC} = \frac{1}{2} BM \cdot CP \cdot \eta\mu\theta.$$

Θέτουμε $\angle ABC = 2\omega$, $\angle ACB = 2\lambda$ και $\angle PDC = \varphi$. Εάν εφαρμόσουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο BMD , βρίσκουμε

$$\frac{BM}{\eta\mu\angle BDP} = \frac{BM}{\eta\mu\varphi} = \frac{a/2}{\eta\mu\angle BMD},$$

ή

$$BM = \frac{\eta\mu\varphi}{2\eta\mu(\varphi - 2\omega)}.$$

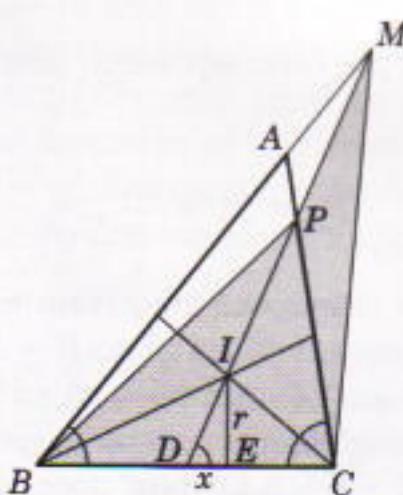
Ομοίως, από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο PCD βρίσκουμε

$$CP = \frac{\eta\mu\varphi}{2\eta\mu(\varphi + 2\lambda)}.$$

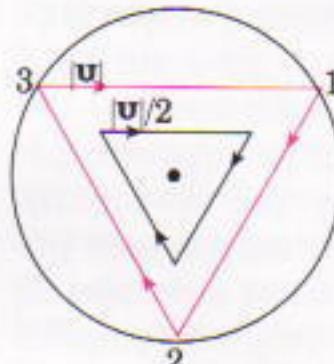
Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις παραστάσεις στον τύπο που δίνει το εμβαδόν του τετραπλεύρου $BMPC$, βρίσκουμε:

$$S_{BMPC} = \frac{a^2 \eta\mu^2 \varphi}{8\eta\mu(\varphi - 2\omega)\eta\mu(\varphi + 2\lambda)}. \quad (*)$$

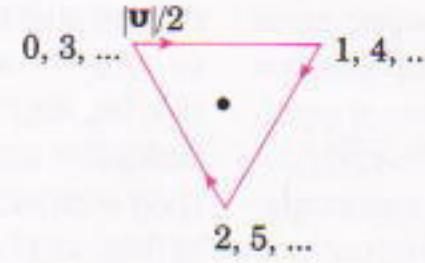
Επιπλέον, από τον τύπο για το ημίτονο του αθροίσματος δύο γωνιών έχουμε,



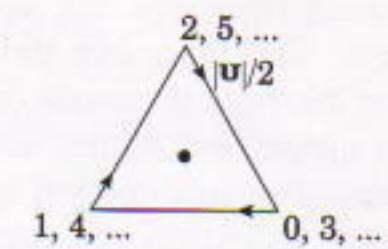
Σχήμα 3



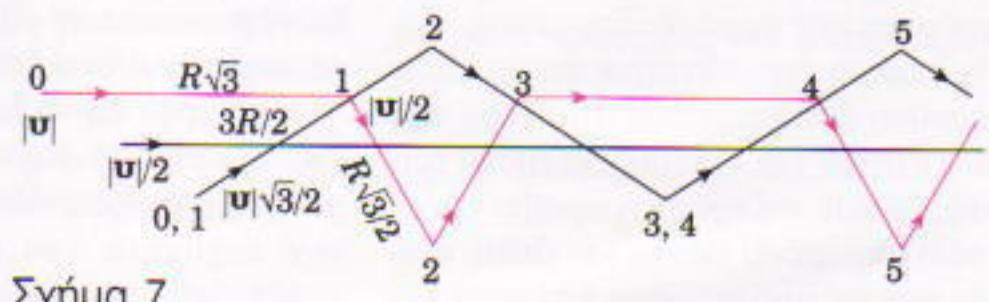
Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

$$\frac{\eta\mu(\varphi - 2\omega)}{\eta\mu\varphi} = \sin 2\omega -$$

$$- \eta\mu 2\omega \cdot \sigma\varphi \quad (1)$$

και

$$\frac{\eta\mu(\varphi + 2\lambda)}{\eta\mu\varphi} = \eta\mu 2\lambda \cdot \sigma\varphi + \sin 2\lambda.$$

Πρέπει τώρα να εκφράσουμε την $\sigma\varphi$ συναρτήσει των ω και λ . Στο Σχήμα 3, I είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC , x η προβολή της ID επί την BC , και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\omega \leq \lambda$. Έχουμε τότε

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\frac{a}{2} + x}{r}, \quad \sigma\varphi\lambda = \frac{\frac{a}{2} - x}{r},$$

$$\text{και } \sigma\varphi = \frac{x}{r}.$$

Αφαιρούμε τώρα τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη και βρίσκουμε

$$2\sigma\varphi = \sigma\varphi\omega - \sigma\varphi\lambda. \quad (3)$$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις σχέσεις για να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις (1) και (2). Προκύπτει:

$$\frac{\eta\mu(\varphi - 2\omega)}{\eta\mu\varphi} = \sin 2\omega - \eta\mu 2\omega \cdot \sigma\varphi =$$

$$\eta\mu^2 \omega ((\sigma\varphi^2 \omega - 1) - \sigma\varphi (\sigma\varphi\omega - \sigma\varphi\lambda))$$

$$= \eta\mu^2 \omega (\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\lambda - 1)$$

$$= \frac{\eta\mu\omega (\sin\omega \cdot \sin\lambda - \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\lambda)}{\eta\mu\lambda} =$$

$$\frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\lambda} \sin(\omega + \lambda) = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\lambda} \eta\mu \frac{\theta}{2}. \quad (1')$$

Ομοίως,

$$\frac{\eta\mu(2\lambda + \varphi)}{\eta\mu\varphi} = \frac{\eta\mu\lambda}{\eta\mu\omega} \eta\mu \frac{\theta}{2}. \quad (2')$$

Αν αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες παραστάσεις στην (*) από τις (1') και (2'), θα βρούμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$\frac{a^2}{4} \sigma\varphi \frac{\theta}{2}.$$

Φυσική

F176

Ας θεωρήσουμε το σύστημα αναφοράς όπου η σφαίρα ηρεμεί πριν από την πρώτη κρούση και ας υποθέσουμε ότι το σφαιρίδιο εισέρχεται από την τρύπα με ταχύτητα u . Προφανώς όλες οι κινήσεις που επακολουθούν λαμβάνουν χώρα στο επίπεδο το οποίο ορίζουν το κέντρο της σφαίρας και το διάνυσμα u .

Εφόσον το σφαιρίδιο και η σφαίρα έχουν ίσες μάζες, το κέντρο μάζας του συστήματος θα κινείται με ταχύτητα $u/2$ κατά μήκος της ευθείας η οποία κείται σε απόσταση $R/4$ από το κέντρο της σφαίρας. Δεδομένου ότι στο σύστημα δεν δρα καμία εξωτερική δύναμη, το κέντρο μάζας θα συνεχίσει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ανεξάρτητα των κρούσεων στο εσωτερικό της σφαίρας.

Από την εκφώνηση του προβλήματος γνωρίζουμε ότι οι κρούσεις είναι τελείως ελαστικές και ότι η εσω-

τερική επιφάνεια της σφαίρας είναι λεία. Συνεπώς, εάν μεταφερθούμε στο σύστημα αναφοράς όπου η σφαίρα ηρεμεί, στο σημείο όπου πραγματοποιείται μια κρούση η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας του σφαιριδίου παραμένει σταθερή ενώ η κάθετη συνιστώσα αλλάζει πρόσημο μετά την κρούση. Επομένως, στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς η κρούση δεν επηρεάζει το μέτρο της ταχύτητας της σχετικής κίνησης του σφαιριδίου ως προς τη σφαίρα (το οποίο παραμένει πάντα ίσο με v), ενώ οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι ίσες. Ως εκ τούτου, το σφαιρίδιο διαγράφει ένα εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με $\sqrt{3}R$ (το κόκκινο τρίγωνο στο Σχήμα 4), γεγονός το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων μεσολαβεί χρονικό διάστημα ίσο με $\sqrt{3}R/v$.

Το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται ως προς τη σφαίρα με ταχύτητα ίση με τη μισή ταχύτητα του σφαιριδίου, και διαγράφει επίσης ένα ισόπλευρο τρίγωνο, μόνο που το μήκος της πλευράς του ισούται με $\sqrt{3}R/2$ (βλ. το μαύρο τρίγωνο στο Σχήμα 4).

Ας θεωρήσουμε τώρα το ευθύγραμμα και ομαλά κινούμενο σύστημα αναφοράς όπου αντί της σφαίρας ηρεμεί το κέντρο μάζας. Σ' αυτό το νέο σύστημα αναφοράς, το σφαιρίδιο και το κέντρο της σφαίρας έχουν ίσες και αντίθετες ταχύτητες (το μέτρο και των δύο ισούται με $v/2$), και η κίνησή τους πραγματοποιείται κατά μήκος των τροχιών που απεικονίζονται με τα αντίστοιχα χρώματα στα Σχήματα 5 και 6.

Τελικά, πρέπει να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα αναφοράς, όπου η σφαίρα ηρεμούσε πριν από την 1η κρούση. Στο συγκεκριμένο σύστημα, το σφαιρίδιο αρχικά κινούνταν με ταχύτητα v , ενώ το κέντρο μάζας κινείται πάντα με σταθερή ταχύτητα $v/2$ (Σχήμα 7). Για να επιτύχουμε τον απαιτούμενο μετασχηματισμό, πρέπει να προσθέσουμε το διάνυσμα $v/2$ σε όλα τα διανύσματα των ταχυτήτων που φαίνονται χαραγμένα στα Σχήματα 5 και 6. Διαπιστώνουμε τότε ότι πριν από την 1η κρούση (ή έπει-

τα από μια πλασματική «μηδενική» κρούση) —και στη συνέχεια μετά την 3η, 6η, ..., $(3n+1)$ -η κρούση— το σφαιρίδιο κινείται με ταχύτητα μέτρου v παράλληλη προς την ταχύτητα και την τροχιά του κέντρου μάζας. Κατά το χρόνο που μεσολαβεί ώς την επόμενη κρούση, το σφαιρίδιο διανύει απόσταση $\sqrt{3}R$, ενώ η σφαίρα παραμένει εντελώς ακίνητη.

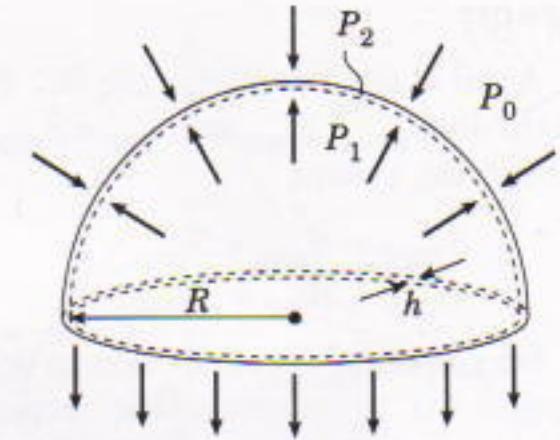
Μετά την 1η —και μετά την 4η, 7η, ..., $(3n+1)$ -η κρούση— της ταχύτητα του σφαιριδίου σχηματίζει με την ταχύτητα του κέντρου μάζας γωνία $-\pi/3$, ενώ το μέτρο της ισούται με $v/2$. Έως τη 2η κρούση το σφαιρίδιο διανύει απόσταση ίση $\sqrt{3}R/2$. Αντιστοίχως, η ταχύτητα της σφαίρας σχηματίζει γωνία $\pi/6$ με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, και το μέτρο της ισούται με $\sqrt{3}v/2$. Σ' αυτό το σκέλος της κίνησης, λοιπόν, η σφαίρα διανύει απόσταση $3R/2$.

Μετά τη 2η —και την 5η, 8η, ..., $(3n+2)$ -η κρούση— της ταχύτητα του σφαιριδίου σχηματίζει με την ταχύτητα του κέντρου μάζας γωνία $\pi/3$. Και τα δύο διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο, $v/2$. Το σφαιρίδιο διανύει την ίδια απόσταση όπως και προηγουμένως, $\sqrt{3}R/2$. Η γωνία κλίσης της ταχύτητας της σφαίρας σ' αυτό το σκέλος της κίνησης ισούται με $-\pi/6$, ενώ το μέτρο της και η απόσταση που διανύει είναι, αντίστοιχα, $\sqrt{3}v/2$ και $3R/2$.

Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται: η σφαίρα ηρεμεί μεταξύ της 3ης και της 4ης κρούσης, ενώ το σφαιρίδιο κινείται με ταχύτητα v , κ.ο.κ.

Φ177

Το πασίγνωστο σφαιρικό σχήμα μιας φυσαλίδας από σαπουνοδιάλυμα αποτελεί συνέπεια της επιφανειακής τάσης. Πράγματι, εάν η δυναμική ενέργεια του υμενίου στο βαρυτικό πεδίο θεωρηθεί αμελητέα εν συγκρίσει προς την επιφανειακή του ενέργεια (κάτι που αληθεύει στην περίπτωση των λεπτών υμενίων), τότε την παρατηρούμενη γεωμετρία της φυσαλίδας την καθορίζει αποκλειστικά και μόνο η επιφανειακή ενέργεια. Εφόσον ο όγκος του αέρα που βρίσκεται παγιδευμένος μέσα στη φυ-



Σχήμα 8

σαλίδα παραμένει σταθερός, η φυσαλίδα πρέπει να έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας για δεδομένο όγκο, πρέπει δηλαδή να λάβει σχήμα σφαίρας.

Ας διαιρέσουμε νοητικά το σφαιρικό κέλυφος σε δύο ίσα μέρη και ας θεωρήσουμε το ένα από αυτά (Σχήμα 8). Μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε τις συνθήκες ισορροπίας για την εξωτερική και την εξωτερική επιφάνεια του άνω ημισφαιρίου.

Στην εξωτερική επιφάνεια ασκείται μια δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο $F_1 = P_0 \pi R^2$ (ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει την έκφραση αυτή μόνος του) λόγω της εξωτερικής πίεσης, μια δύναμη επίσης με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο $F_2 = a \cdot 2\pi R$ λόγω της επιφανειακής τάσης, καθώς και μια ακόμη δύναμη, που εξισορροπεί τις προηγούμενες δύο, με κατεύθυνση προς τα πάνω και μέτρο $F_3 = P_2 \pi R^2$ λόγω του συμπεζόμενου υγρού (το καμπυλωμένο υγρό υμένιο). Για να έχουμε ισορροπία, πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0,$$

ή

$$P_0 \pi R^2 + 2\pi Ra = P_2 \pi R^2,$$

η οποία μας δίνει την πίεση μέσα στο υμένιο:

$$P_2 = P_0 + \frac{2a}{R}.$$

Στην εξωτερική επιφάνεια του άνω ημισφαιρίου, ακτίνας $R - h$, ασκείται μια δύναμη προς τα κάτω από το συμπεζόμενο υγρό μέτρου $F_4 = P_2 \pi (R - h)^2$, η δύναμη προς τα κάτω λόγω επιφανειακής τάσης με μέτρο $F_5 = a \cdot 2\pi(R - h)$ και μια δύνα-

μη προς τα πάνω λόγω της πίεσης του αέρα στο εσωτερικό της φυσαλίδας μέτρου $F_6 = P_1 \pi (R - h)^2$. Η συνθήκη για την ισορροπία του εσωτερικού ημισφαιρίου γράφεται ως

$$F_4 + F_5 - F_6 = 0,$$

σχέση η οποία μας δίνει την πίεση του αέρα στο εσωτερικό της φυσαλίδας:

$$P_1 = P_0 + \frac{2a}{(R - h)},$$

ή

$$P_1 = P_0 + 2a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R - h} \right).$$

Φ178

Εφόσον οι πυκνωτές έχουν συνδεθεί σε σειρά, προτού κλείσει ο διακόπτης τα φορτία τους είναι ίσα:

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}.$$

Αφού κλείσει ο διακόπτης, η τάση στα άκρα κάθε πυκνωτή γίνεται $\mathcal{E}/2$, οπότε τα φορτία τους δίνονται από τις εκφράσεις

$$q' = \frac{1}{2} C_1 \mathcal{E} \quad \text{και} \quad q'' = \frac{1}{2} C_2 \mathcal{E}.$$

Συνεπώς, μέσω των διατομών aa' και bb' ρέουν, κατά τις υποδεικνυόμενες φορές, τα φορτία

$$\begin{aligned} q_1 &= q' - q = \frac{C_1 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)} \mathcal{E} \\ &= -2,4 \cdot 10^{-5} \text{ C} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} q_2 &= q - q'' = \frac{C_2 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)} \mathcal{E} \\ &= -3,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}. \end{aligned}$$

Προτού κλείσει ο διακόπτης, οι συνδεδεμένοι οπλισμοί είχαν ολικό φορτίο μηδέν, ενώ μετά το κλείσιμο του διακόπτη το φορτίο αυτό έγινε $q'' - q'$. Προφανώς τόσο ακριβώς φορτίο θα έρρευσε και διά της διατομής cc' , δηλαδή

$$\begin{aligned} q_3 &= q'' - q' = \frac{1}{2} (C_2 - C_1) \mathcal{E} \\ &= 6 \cdot 10^{-5} \text{ C}. \end{aligned}$$

Φ179

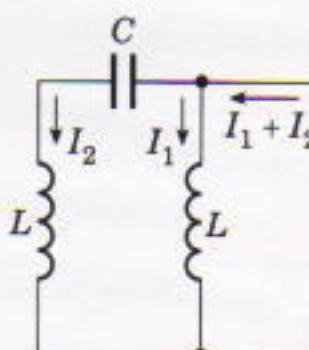
Όταν τα άκρα των δύο πηνίων

συνδεθούν με τον ένα από τους δύο δυνατούς τρόπους, η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα παραμένει πάντοτε μηδενική. Στην προκειμένη περίπτωση, το ρεύμα στον αριστερό κλάδο του κυκλώματος ισούται με μηδέν, ενώ όλο το ρεύμα ρέει διά του δεξιού πηνίου. Συνεπώς, η φωτοβολία του λαμπτήρα θα φθίνει μονοτονικά καθώς θα αυξάνεται η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος (επειδή η επαγωγική αντίσταση του πηνίου είναι ανάλογη με τη συχνότητα).

Εάν εναλλάξουμε τα άκρα οποιουδήποτε από τα δύο πηνία, οι τάσεις στα άκρα των πηνίων θα παραμένουν ίδιες, μόνο που αντί να προστίθενται θα αφαιρούνται. Αναλύουμε το κύκλωμα με τους δύο ακροδέκτες (Σχήμα 9) ως εξής: Εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση $V(t) = V_0 \sin \omega t$ στους ακροδέκτες του, και προσδιορίζουμε το ρεύμα που παρέχει η πηγή. Η τάση στα άκρα του ενός πηνίου ισούται με την τάση της πηγής. Εφόσον αμφότερα τα πηνία τα διαπερνά η ίδια μαγνητική ροή, η τάση στα άκρα του δεύτερου πηνίου θα ισούται επίσης με την τάση της πηγής. Συνεπώς, στους οπλισμούς του πυκνωτή θα εφαρμόζεται η διπλάσια τάση, οπότε για το ρεύμα I_2 βρίσκουμε ότι θα δίνεται από τον τύπο $I_2 = -2V_0 \omega C \eta \omega t$. Το μαγνητικό πεδίο που διαπερνά τις οπείρες κάθε πηνίου καθορίζεται από τη διαφορά των ρευμάτων τα οποία διαρρέουν τα πηνία (λόγω της επιλογής των κατευθύνσεων των ρευμάτων που φαίνεται στο Σχήμα 9):

$$L(I'_1 - I'_2) = V_0 \sin \omega t.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνουμε



Σχήμα 9

$$I_1 - I_2 = \frac{V_0}{\omega L} \eta \omega t.$$

Το ολικό ρεύμα ισούται με

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= (I_1 - I_2) + 2I_2 = \\ &= V_0 \left(\frac{1}{\omega L} - 4\omega C \right) \eta \omega t, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι η εμπέδηση δίνεται από την έκφραση

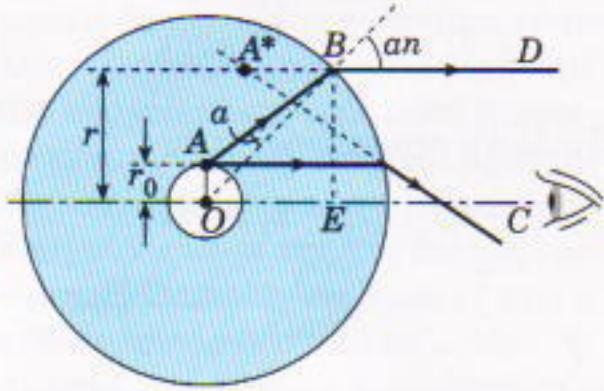
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - 4\omega C} = \frac{\omega L}{1 - 4\omega^2 LC}.$$

Μια τέτοια εξάρτηση της εμπέδησης Z από τη συχνότητα είναι χαρακτηριστική ενός κυκλώματος που αποτελείται από ένα πηνίο συντελεστού αυτεπαγωγής L και έναν πυκνωτή χωρητικότητας $4C$ σε παράλληλη σύνδεση. Προφανώς, στις χαμηλές συχνότητες το δικτύωμα πηνίων-πυκνωτή συμπεριφέρεται ως πηνίο, ενώ στις υψηλές συχνότητες επιδεικνύει συμπεριφορά πυκνωτή. Στη συχνότητα συντονισμού $\omega_0 = 1/(2\sqrt{LC})$, η εμπέδηση του δικτυώματος θα λαμβάνει πολύ υψηλές τιμές. Συνεπώς, ο λαμπτήρας θα φωτοβολεί πολύ αμυδρά. Σε υψηλότερες συχνότητες, η φωτοβολία του λαμπτήρα θα αυξάνεται.

Φ180

Ας ονομάσουμε OC το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μάτι με το κέντρο του σωλήνα, και έστω A το τέλος της εσωτερικής διαμέτρου του σωλήνα που τέμνει κάθετα την ευθεία OC (Σχήμα 10). Η απόσταση του άξονα OC από το φανταστικό είδωλο του σημείου A ισούται με τη φαινόμενη εσωτερική ακτίνα r .

Ένας από τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής ορίζει πως όλες οι ακτίνες που αποκλίνουν από το σημείο A υπό μικρές γωνίες θα ακολουθήσουν, μετά τη διάθλασή τους, τέτοια πορεία ώστε να φαίνεται πως προέρχονται από μια σημειακή φανταστική πηγή A^* . Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η ακριβής θέση του συγκεκριμένου σημείου αλλά μόνο η απόστασή του από το OC , θα αρκεσει να θεωρήσουμε την τροχιά μίας μόνον ακτίνας, της ABD , η οποία αφού εξελ-



Σχήμα 10

θει από το σωλήνα ακολουθεί πορεία παράλληλη προς την OC . Πράγματι, το φανταστικό ειδώλο του A θα κείται κάπου πάνω στην προέκταση της εν λόγω ακτίνας (Σχήμα 10).

Η απόσταση ανάμεσα στις ακτίνες BD και OC ισούται με r , και εμείς επδιώκουμε να προσδιορίσουμε την απόσταση $AO = r_0$. Εφόσον η εξωτερική διάμετρος του σωλήνα θεωρείται κατά πολύ μεγαλύτερη από την εσωτερική, η γωνία πρόσπτωσης α θα είναι πολύ μικρή. Από το τρίγωνο OEB παίρνουμε τη σχέση $r = Ran$ (με R συμβολίζουμε την εξωτερική ακτίνα του σωλήνα), ενώ από το τρίγωνο OAB λαμβάνουμε την ισότητα $r_0 = Ra$. Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $r_0 = r/n$.

Σπαζοκεφαλίες

Σχήμα 11

Το ελάχιστο δυνατό πλήθος κινήσεων είναι τρεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να αναποδογυρίσουμε πρώτα τα ποτήρια 1, 2, 3, 4 και 5, στη συνέχεια τα 1, 2, 3, 6 και 7 και, τέλος, τα 1, 2, 3, 8 και 9. Δύο κινήσεις δεν αρκούν, διότι, εάν γίνουν μόνο δύο κινήσεις, μερικά ποτήρια πρέπει να γυρίσουν ακριβώς δύο φορές —άρα, δεν θα παραμείνουν ανάποδα.

Σχήμα 12

Είναι αδύνατο να αναποδογυρίσουμε 9 ποτήρια γυρίζοντας 6 ποτήρια κάθε φορά. Πράγματι, κάθε ποτήρι πρέπει να γυρίσει περιττό πλήθος φορών. Αφού υπάρχουν 9 ποτήρια, το συνολικό πλήθος των φορών που γυρίζουν πρέπει να είναι επίσης περιττό. Από την άλλη, αν κάθε φορά γυρίζουμε άρτιο πλήθος ποτηριών (6), τότε το συνολικό πλήθος των

φορών που γυρίζουν ποτήρια είναι επίσης άρτιο.

Σχήμα 11

Ο δοθείς αριθμός διαιρείται διά του 3 αλλά όχι διά του 9 (διότι το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται διά του 3 αλλά όχι διά του 9). Επομένως, δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Σχήμα 12

Μια δυνατή κατασκευή παρουσιάζεται στα Σχήματα 11 και 12. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 11), σχεδιάζουμε δύο τυχαίους κύκλους, με κέντρα σημεία της δεδομένης ευθείας, οι οποίοι διέρχονται από το A , και βρίσκουμε το δεύτερο σημείο τομής τους (A'). Η ευθεία AA' είναι η ζητούμενη κάθετος. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 12), με κέντρο ένα σημείο εκτός της δεδομένης ευθείας, σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο που διέρχεται από το A . Το άλλο σημείο τομής αυτού του κύκλου με την ευθεία l είναι ένα σημείο B . Σχεδιάζουμε τη διάμετρο BC . Η ευθεία AC είναι η ζητούμενη κάθετος.

Σχήμα 13

Το χιόνι είναι κακός αγωγός της θερμότητας, με πολύ μεγάλη λανθά-

νουσα θερμότητα τήξεως. Επομένως λιώνει πολύ αργά, και μπορεί να διατηρηθεί αρκετό χρόνο σε θερμοκρασίες που δεν είναι πολύ μεγαλύτερες των 0°C .

Καθειδοσκόπιο

1. Τρία.
2. Διά της εκπομπής ενός φωτονίου, εφόσον το άτομο είναι διεγερμένο.
3. Καμία.

4. Πρόκειται για σωματίδια άλφα (πυρήνες ηλίου): ${}^{11}_{\text{B}} + {}^1_{\text{p}} \rightarrow {}^{3+}_{\text{He}}$.

5. Οι χημικές ιδιότητες ενός στοιχείου καθορίζονται από το φορτίο του πυρήνα του. Έτσι, κατά την εκπομπή ακτίνων γάμμα, το φορτίο του πυρήνα παραμένει αμετάβλητο.

6. Όταν η χρονική διάρκεια της παρατήρησης είναι μικρή συγκριτικά με το χρόνο υποδιπλασιασμού της ραδιενέργους ουσίας.

7. Οι τρεις χρόνοι ημιζωής.

8. Ότι η ενέργεια του πυρήνα λαμβάνει μόνο διακριτές τιμές.

9. Η ενέργεια ενός σωματίδιου άλφα δεν αρκεί για να υπερνικήσει την απωστική δύναμη ενός βαρέος πυρήνα, ο οποίος φέρει μεγάλο ηλεκτρικό φορτίο.

10. Κατά τη διάσπαση βήτα, εκτός από τα ηλεκτρόνια (και ποζιτρόνια) εκπέμπονται και νετρίνα (και αντινετρίνα). Αυτά φέρουν μέρος της ενέργειας του μητρικού πυρήνα —μέρος με ευρύ φάσμα τιμών.

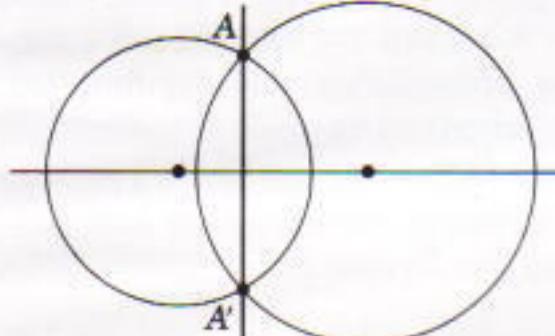
11. Ακόμη και στα πρώτα υπερουράνια στοιχεία, η απωστική δύναμη Coulomb μεταξύ των συστατικών τους πρωτονίων οδηγεί σε αστάθεια του πυρήνα.

12. Στα ελαφρύτερα άτομα μεταβιβάζεται περισσότερη ενέργεια κατά τη σύγκρουσή τους με τα ελεύθερα νετρόνια (από τη μηχανική θυμάστε ότι η μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια ελαστικής κρούσης γίνεται όταν τα δύο σώματα έχουν σχεδόν ίσες μάζες).

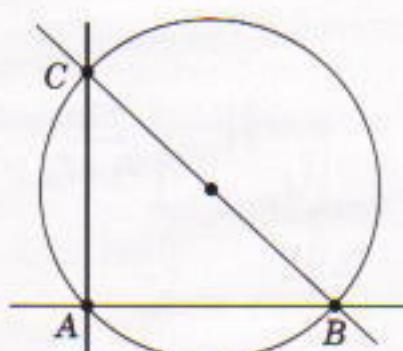
13. Όχι. Η ελλείπουσα μάζα απομακρύνεται υπό τη μορφή ακτίνων γάμμα, οι οποίες εκπέμπονται κατά το σχηματισμό του πυρήνα.

Μικροπειραματισμοί

Τα ηλεκτρόνια σθένους των με-



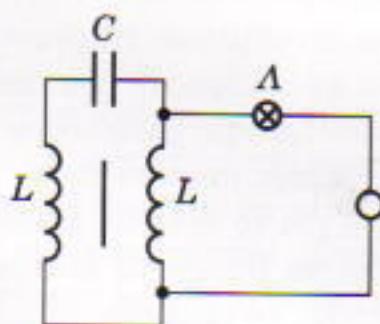
Σχήμα 11



Σχήμα 12

τάλλων μπορούν εύκολα να μεταβούν σε διεγερμένη κατάσταση απόρροφώντας θερμική ενέργεια. Με την ίδια λογική, μπορούν να επανέλθουν στη θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας την επιπλέον ενέργεια με τη μορφή φωτονίων. Ωστόσο, στο γυαλί όλα τα ηλεκτρόνια είναι στενά συνδεδεμένα με τους πυρήνες των ατόμων και, επομένως, είναι πολύ δύσκολο να μεταβάλουν την ενεργειακή τους κατάσταση. Για να φωτοβολήσει, λοιπόν, το γυαλί, απαιτούνται πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 35



Σχήμα 2

πυρήνα πολύ μεγάλης μαγνητικής διαπερατότητας. Τα πηνία συνδέονται σε σειρά με έναν πυκνωτή χωρητικότητας C (Σχήμα 2). Υποθέστε ότι εξετάζετε το κύκλωμα χρησιμοποιώντας έναν δοκιμαστικό λαμπτήρα (αμελητέας αντίστασης) και μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβλητής συχνότητας. Πώς περιμένετε να συμπεριφέρεται η φωτοβολία του λαμπτήρα καθώς μεταβάλλετε τη συχνότητα; Τι θα συμβεί εάν εναλλαγούν οι άκρες ενός από τα πηνία; (A. Zilberman)

Φ180

Εσωτερικός κύκλος. Αν κοιτάζουμε έναν τριχοειδή σωλήνα από τα πλάγια, η φανόμενη εσωτερική του ακτίνα ισούται με r . Ποια είναι η πραγματική τιμή της εσωτερικής ακτίνας; Δίνεται ο δείκτης διάθλασης n του γυαλιού. Θεωρήστε την εξωτερική διάμετρο του τριχοειδούς σωλήνα πολύ μεγαλύτερη από την εσωτερική.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63**

QUANTUM

Τριτοποειδής γρίφος No. 100

M175 Ηλεκτρικό σύστημα

Φ171 Οριόρισμα της Γρίφης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Τριτοποειδής γρίφος No. 100

M175 Ηλεκτρικό σύστημα

Φ171 Οριόρισμα της Γρίφης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 36 τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχους.

To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης. Φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

www.katoptro.gr

Το τυρί του Cantor

Ας το απολαύσουμε καθισμένοι στο χαλί του Sierpinski

Don Piele

KΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΣΤΗΝ ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΑ ΣΤΗΛΗ ΤΟΥ QUANTUM που θα εξερευνήσει προβλήματα της Πληροφορικής —της επιστήμης που χρησιμοποιεί αλγορίθμους υπολογιστών για να περιγράψει και να διαχειριστεί τον κόσμο μας. «Πληροφορική» είναι ο όρος που χρησιμοποιείται συνήθως στην Ευρώπη για να εκφράσει αυτό που στις Ηνωμένες Πολιτείες ονομάζεται συνήθως «επιστήμη των υπολογιστών». Όμως, η πληροφορική είναι στην πραγματικότητα ένας ευρύτερος όρος, ο οποίος έχει υιοθετηθεί και από πεδία πέραν της επιστήμης των υπολογιστών. Είναι πολλά τα επιστημονικά πεδία που πλέον χρησιμοποιούν αλγορίθμους υπολογιστών για να περιγράψουν και να διαχειριστούν τον δικό τους κόσμο. Η βιοπληροφορική αποτελεί θαυμάσιο παράδειγμα. Ο όρος αυτός αναφέρεται στον ταχύτατα αναπτυσσόμενο κλάδο της μοριακής βιολογίας που χρησιμοποιεί τους υπολογιστές για να κατασκευάσει μοντέλα των μορίων και για να γράψει προγράμματα υπολογιστών για ταχεία γονιδιακή χαρτογράφηση και προσδιορισμό αλληλουχιών.

Ένας από τους στόχους αυτής της στήλης είναι η αναζήτηση και η παρουσίαση αλγορίθμων υπολογιστών που έχουν ενδιαφέρον και ταυτόχρονα είναι εύκολο να τους κατανοήσουμε και να τους γράψουμε. Ένας άλλος στόχος είναι να εξοικειώσει τους νέους αναγνώστες με τον προγραμματισμό, ως το εργαλείο επίλυσης προβλημάτων του 21ου αιώνα. Η ικανότητα ανάπτυξης αλγορίθμων είναι όμοια με την ικανότητα κατασκευής καλών μαθηματικών αποδείξεων. Και οι δύο δεξιότητες απαιτούν να είμαστε σε θέση να συλλέγουμε δεδομένα, να εκτελούμε με τη σωστή σειρά μικρά λογικά βήματα και να καταλήγουμε στον επιθυμητό στόχο. Ο καλύτερος τρόπος να μάθουμε προγραμματισμό, όπως και μαθηματικά, είναι να τα «δουλέψουμε». Ελπίζω ότι τα προβλήματα που παρουσιάζουμε θα σας εξάψουν την περιέργεια.

Συχνά θα παρουσιάζω γραφικά, διότι οι εικόνες έχουν αυτές καθαυτές ενδιαφέρον, και η κατασκευή τους είναι διασκεδαστική. Θα εργαστώ με ένα υψηλού επιπέδου προγραμματιστικό εργαλείο, το Mathematica. Αυτό το γενικής χρήσεως περιβάλλον προγραμματισμού υπολογιστών ενσωματώνει πολλά χαρακτηριστικά σε ένα

ενοποιημένο πλαίσιο: αριθμητικούς και συμβολικούς υπολογισμούς, λειτουργικό και διαδικαστικό προγραμματισμό, προγραμματισμό βασισμένο σε κανόνες και προγραμματισμό γραφικών και κινούμενων εικόνων. Με το Mathematica, ο τρόπος που σκεφτόμαστε ένα πρόβλημα και ο τρόπος που το κωδικοποιούμε βρίσκονται σε λογική απόσταση. Οι νέοι άνθρωποι, που δεν έχουν κάποια προσχηματισμένη αντίληψη για το τι είναι γλώσσα προγραμματισμού, πιστεύω ότι θα βρουν το Mathematica φυσικό. Ας αρχίσουμε, λοιπόν, το παιχνίδι.

Αναδρομή

Η αναδρομή είναι ένα ανεκτίμητο εργαλείο της πληροφορικής. Η πασίγνωστη μαθηματική εξαδέλφη της ονομάζεται επαγωγή. Οι επαγωγικές αποδείξεις στα μαθηματικά απαιτούν να αποδείξουμε δύο βήματα: τη λύση Προβλήματος[1] και τη λύση Προβλήματος[n] όταν είναι δεδομένη η λύση Προβλήματος[n - 1]. Αν μπορέσετε να αποδείξετε αυτά τα δύο βήματα, τότε η λύση Προβλήματος[n] ισχύει για κάθε n. Στην πληροφορική εκτελούμε μια παρόμοια διαδικασία. Πρώτα ορίζουμε τη λύση Προβλήματος[1]. Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι έχουμε τη λύση Προβλήματος[k], για $k < n$, ορίζουμε τη λύση Προβλήματος[n]. Ας παραθέσουμε ένα απλό παράδειγμα για να δούμε πώς λειτουργεί ο αναδρομικός ορισμός. Σκοπός είναι να ορίσουμε αναδρομικά το SUM[n] ως άθροισμα των θετικών ακεραίων από το 1 έως το n.

Αναδρομικός ορισμός του άθροισματος θετικών ακεραίων

(* ορίζει το άθροισμα (SUM) από το 1 ώς το 1 *)
SUM[1] = 1;

(* ορίζει το SUM[n] συναρτήσει του SUM[n - 1] και του n *)

SUM[n_] := SUM[n - 1] + n;

(* υπολογίζει το SUM[100] *)

SUM[100]

5050

SUM[255]

32640

SUM[256]

```
$RecursionLimit::reclim : Recursion depth of  
256 exceeded.  
32895 + Hold[SUM[2 - 1]]
```

Αν προσπαθήσετε να υπολογίσετε το SUM[256] με το *Mathematica*, δεν θα πάρετε απάντηση, διότι έχετε ξεπέρασε το προκαθορισμένο όριο αναδρομής. Αυτό είναι μια εξυπηρέτηση που σας προσφέρεται για την περίπτωση που έχετε ορίσει με λάθος τρόπο μια αναδρομική συνάρτηση και επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Αυτό μπορεί να συμβεί αν, για παράδειγμα, ξεχάσετε να αντιστοιχίσετε τιμή στο SUM[1]. Βάσει της προκαθορισμένης ρύθμισης, το *Mathematica* θα εκτελέσει 255 αναδρομικά βήματα και θα σταματήσει. Μπορείτε να αλλάξετε το αναδρομικό όριο του *Mathematica* δίνοντας νέα τιμή στη μεταβλητή του συστήματος \$RecursionLimit.

```
$RecursionLimit = Infinity;  
SUM[1000]  
500500
```

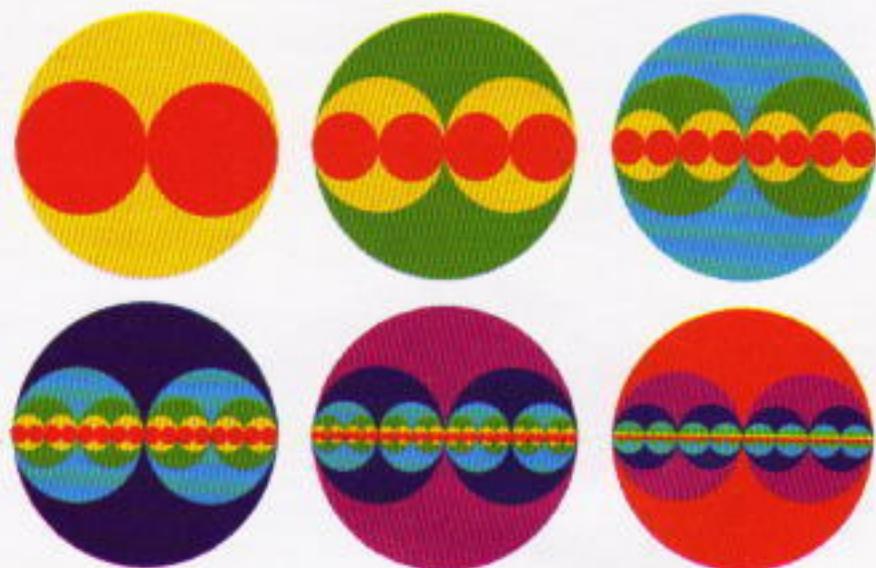
Ένας αναδρομικός ορισμός έχει πολλά πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να θυμόμαστε τι έχουμε ήδη υπολογίσει, και να μη χάνουμε χρόνο επαναλαμβάνοντας την ίδια εργασία. (Παρεμπιπτόντως, αυτό είναι το μυστικό που κρύβει ο δυναμικός προγραμματισμός —ένα θέμα για μια άλλη στήλη.) Ας στραφούμε τώρα στα σχέδια που δημιουργούνται με την αναδρομή.

Αναδρομικός σχεδιασμός

Πρόσφατα, διαβάζοντας το βιβλίο του Clifford A. Pickover *Computers and the Imagination* (Υπολογιστές και Φαντασία), συνάντησα μια εντυπωσιακή εικόνα γραφικών που ονομάζεται «τυρί του Cantor». Ίσως θυμάστε το περίφημο σύνολο Cantor, το οποίο κατασκευάζεται αν ξεκινήσουμε από το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ και αφαιρέσουμε το ανοικτό διάστημα που αποτελεί το ενδιάμεσο τρίτο του, δηλαδή το $(1/3, 2/3)$. Θα απομείνουν δύο μικρότερα διαστήματα $\{[0, 1/3], [2/3, 1]\}$, καθένα με μήκος ίσο με το ένα τρίτο του αρχικού διαστήματος. Αφαιρούμε το ενδιάμεσο τρίτο από τα δύο νέα διαστήματα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Έστω $Cantor[n]$ το σύνολο των 2^{n-1} κλειστών διαστημάτων που προκύπτουν από n αφαιρέσεις των ενδιάμεσων τμημάτων. Το σύνολο του Cantor ισούται με την τομή των $Cantor[n]$ για όλα τα n .

Το τυρί του Cantor κατασκευάζεται με παρόμοιο τρόπο, ξεκινώντας από τον μοναδιαίο κύκλο και αφαιρώντας τα πάντα εκτός από δύο εσωτερικούς κύκλους. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1, όπου σε καθέναν από τους εσωτερικούς κύκλους υποδιπλασιάζουμε την ακτίνα. Ας δούμε πώς δημιουργήθηκαν αυτά τα γραφικά με τη βοήθεια της αναδρομής.

Ας βάλουμε πρώτα σε σειρά μερικά πράγματα. Η επόμενη εντολή του *Mathematica* εξασφαλίζει το σωστό σχεδιασμό των κύκλων και δεσμεύει μια περιοχή του επιπέδου για το τυρί μας.



Σχήμα 1

```
SetOptions[Graphics, AspectRatio →  
Automatic, PlotRange → {{-1}, 1}];
```

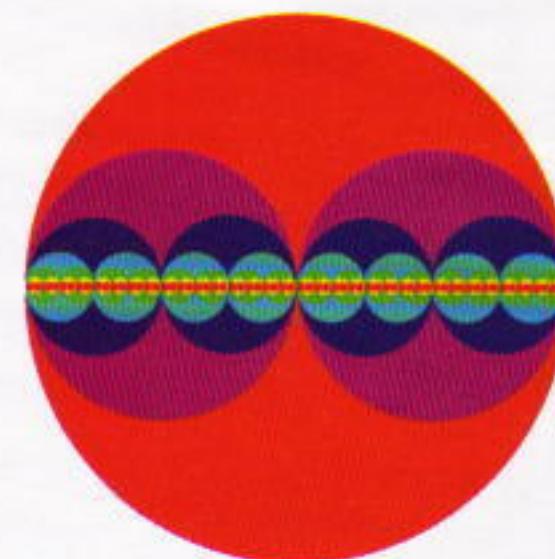
Για να ξεκινήσουμε, πρέπει να κατασκευάσουμε έναν απλό κύκλο με κέντρο $\{x, y\}$ και ακτίνα r . Αυτό επιτυγχάνεται με την ενσωματωμένη διαταγή $Disk[\{x, y\}, r]$. Η παράμετρος $Hue[0]$ είναι το κόκκινο χρώμα.

```
CantorCheese[x_, y_, r_, 0, shrink_] :=  
{Hue[0], Disk[{x, y}, r]}
```

Το αναδρομικό βήμα ορίζει την *CantorCheese* κατά το βήμα n συναρτήσει της *CantorCheese* κατά το βήμα $n-1$ (την οποία γνωρίζετε πώς να κατασκευάσετε). Ο συντελεστής σμίκρυνσης ($shrink$) βρίσκεται υπό τον έλεγχό σας, και πρέπει να είναι $\leq 1/2$. Θα πρέπει να αναρωτηθείτε γιατί οι εντολές *CantorCheese*[$x - r/2, y, shrink^*r, n - 1, shrink$] και *CantorCheese*[$x + r/2, y, shrink^*r, n - 1, shrink$] τοποθετούν τους επόμενους κύκλους στον άξονα a , έναν δεξιά και έναν αριστερά. Ιδού ο αναδρομικός ορισμός. Εξετάστε τον προσεκτικά.

```
CantorCheese[x_, y_, r_, n_, shrink_] :=  
{ {Hue[ .16 n], Disk[{x, y}, r]},  
CantorCheese[x - r/2, y, shrink^*r, n - 1,  
shrink], CantorCheese[x + r/2, y,  
shrink^*r, n - 1, shrink]}
```

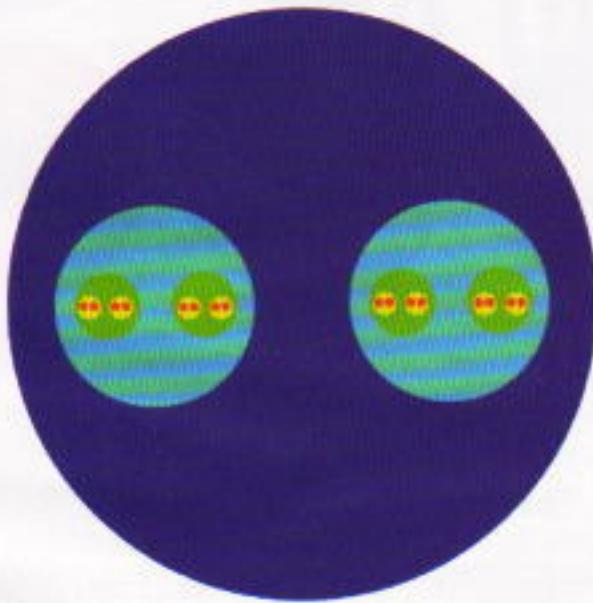
```
Show[Graphics[CantroCheese[0, 0, 1, 6, .5]]]
```



Σχήμα 2

Ιδού το τυρί του Cantor που κατασκευάζεται κατά το βήμα 4 με παράγοντα συρρίκνωσης $1/3$.

```
Show[Graphics[CantorCheese[0, 0, 1, 4,
1, /3]]]
```



Σχήμα 3

Το τρίγωνο του Sierpinski

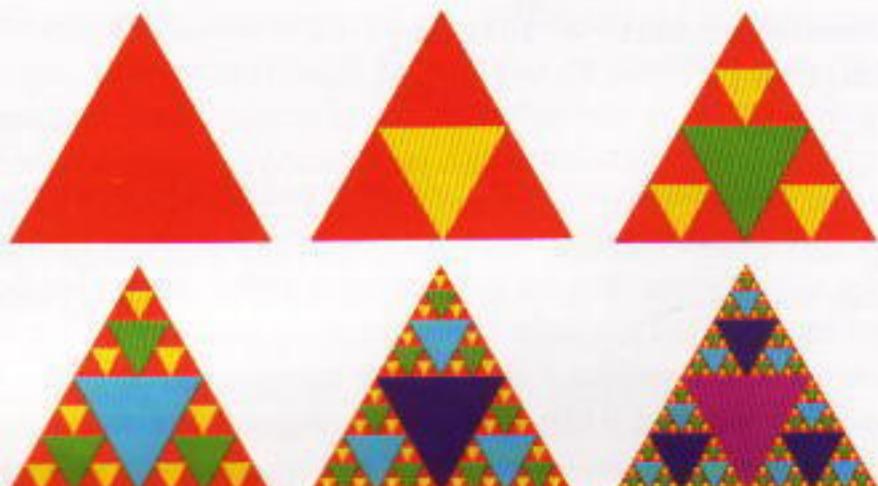
Η αναδρομική κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski είναι παρόμοια με αυτή του τυριού του Cantor. Η εικόνα γραφικών που ακολουθεί παρουσιάζει την κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου από την ενσωματωμένη εντολή Polygon του *Mathematica*. Όταν δίνεται ένα σύνολο σημείων, η Polygon κατασκευάζει το πολύγωνο που συνδέει αυτά τα σημεία. Στη συνέχεια, διαιρούμε το τρίγωνο σε τέσσερα ίσα υποτρίγωνα και αφαιρούμε το μεσαίο. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία αναδρομικά στα υπόλοιπα τρίγωνα, όπως κάναμε κατά την κατασκευή του τυριού του Cantor. Το τρίγωνο του Sierpinski προκύπτει όταν θέσουμε τον παράγοντα σύκρυνσης ίσο με $1/2$.

```
SetOptions[Graphics, AspectRatio →
Automatic, PlotRange → {0, 1}];
SierpinskiTriangle[x_, y_, r_, 0, shrink_] :=
{Hue[0], Polygon[{{x, y}, {x + r, y},
{x + .5 r, y +  $\frac{\sqrt{3.}}{2}$  r}}]},
SierpinskiTriangle[x_, y_, r_, n_,
shrink_] := {Hue[.17 n], Polygon[{{x, y},
{x + r, y}, {x + .5 r, y +  $\frac{\sqrt{3.}}{2}$  r}}],
SierpinskiTriangle[x, y, shrink*r, n - 1,
shrink],
SierpinskiTriangle[x + shrink*r, y, shrink*r,
n - 1, shrink],
SierpinskiTriangle[x + shrink*r/2, y +
shrink* $\sqrt{3}$  r/2., shrink*r, n - 1, shrink]}
Show[Graphics[SierpinskiTriangle[0, 0, 1, 5,
.5]]]
```



Σχήμα 4

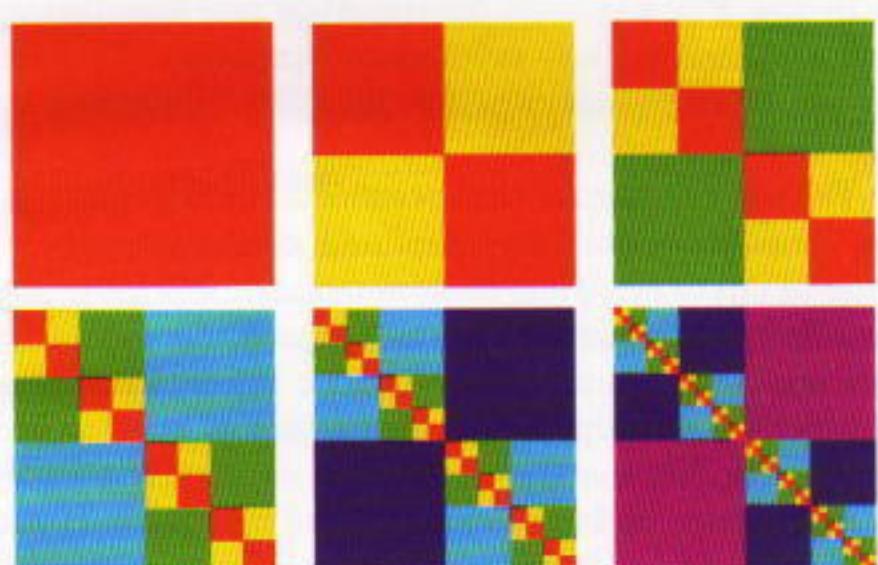
Ιδού τα στάδια κατασκευής του τριγώνου Sierpinski.



Σχήμα 5

Η σειρά σας

Τώρα είναι σειρά σας να προσπαθήσετε να κατασκευάσετε κάτι αναδρομικώς. Ο προγραμματισμός δεν είναι άθλημα για θεατές, και για να μάθετε οτιδήποτε πρέπει απλώς να το προσπαθήσετε. Κατασκευάστε το επόμενο αντικείμενο, παρόμοιας δομής με το τυρί του Cantor, διαιρώντας ένα τετράγωνο σε τέσσερα ίσα μέρη και αφαιρώντας τα δύο τετράγωνα. Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τα μικρότερα τετράγωνα. Και ιδού τα αποτελέσματα των πρώτων σταδίων της διαδικασίας. □



Σχήμα 6