

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 3

1.200 ΔΡΧ.



Εκδοση
της Εθνικής Ένωσης
Καθηγητών Θετικών
Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ,
του Γραφείου Kvant
της Ρωσικής Ακαδημίας
Επιστημών,
της Αμερικανικής Ένωσης
Καθηγητών Φυσικής (AAPT),
του Εθνικού Συμβουλίου
Καθηγητών Μαθηματικών
(NCTM) των ΗΠΑ,
του Εκδοτικού οίκου
Springer και των
Εκδόσεων Κάτοπτρο

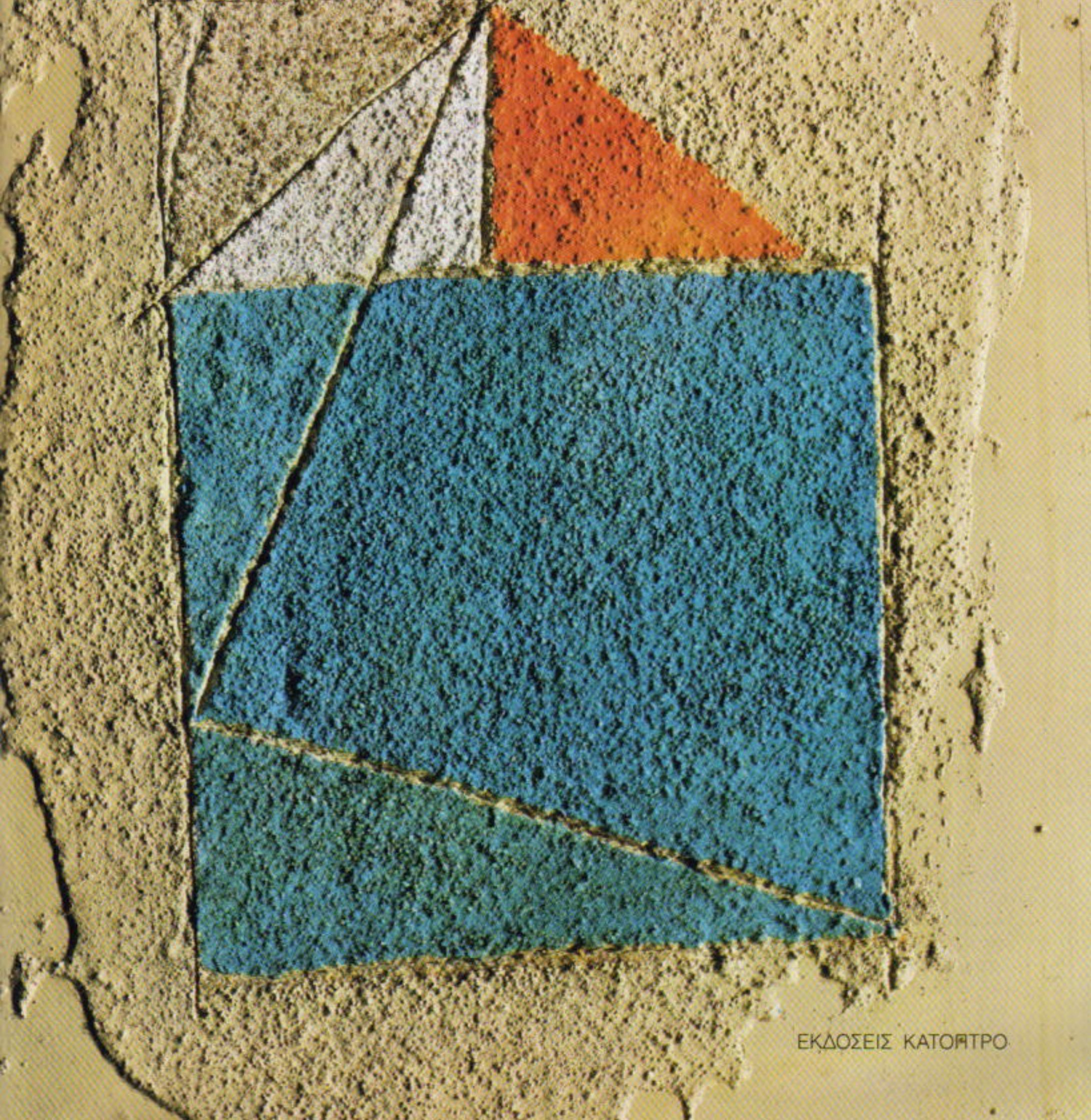
- Διατάξεις Penrose και
ημικρύσταλλοι
- Αστρονομία ακτίνων X
- Κατασκευή τριγώνων
από τρία στοιχεία
- Αριθμοί και υπεραριθμοί
- Ο Δεύτερος Νόμος
της Θερμοδυναμικής

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

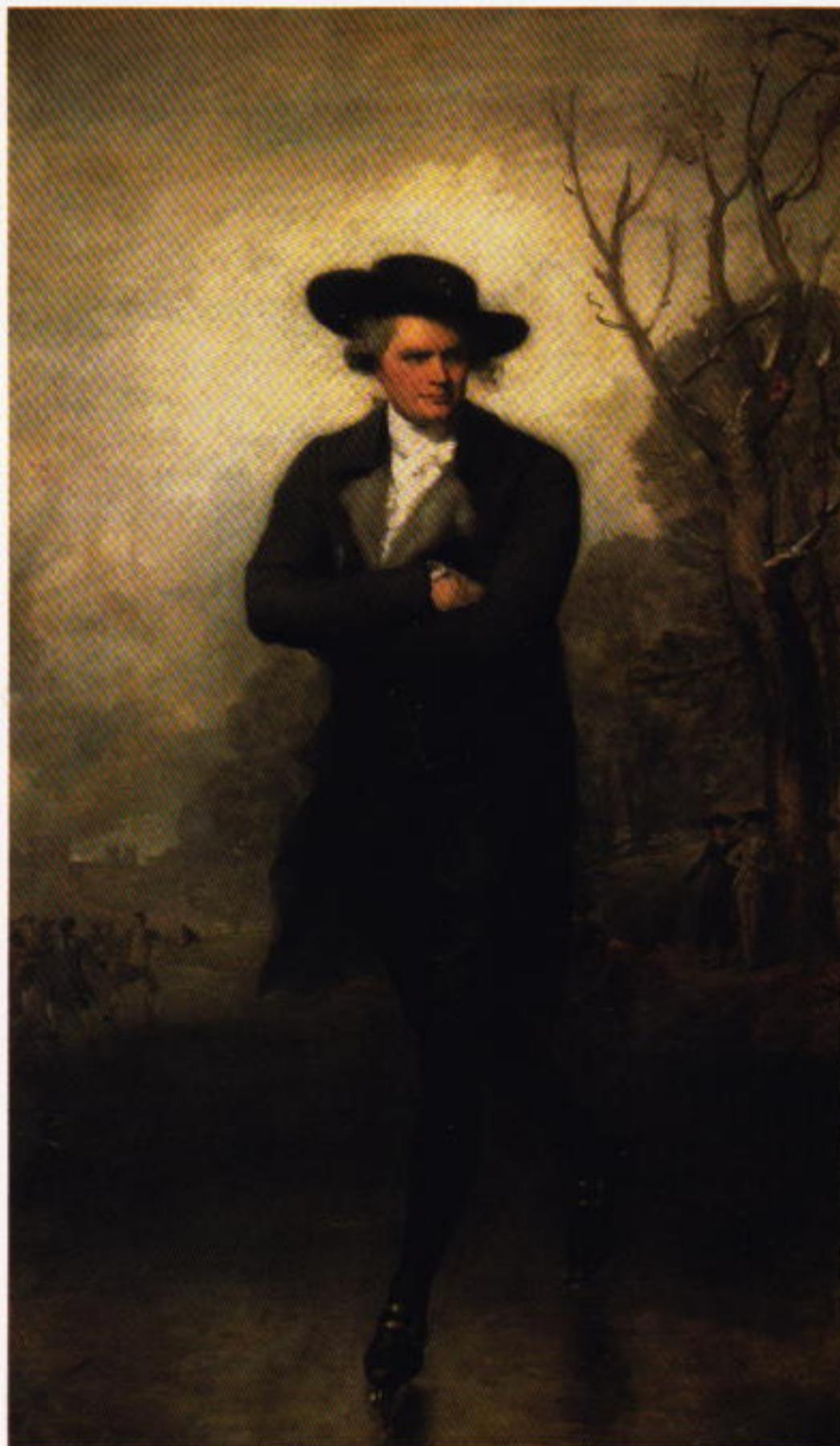
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1994

1.200 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΥΤΡΟ

ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ Q



Εθνικό Πινακοθέκιο, Ουάσιγκτον (Συλλογή Andrew W. Mellon)

Ο παγοδρόμος (Πορτρέτο του William Grant) (1782) του Gilbert Stuart

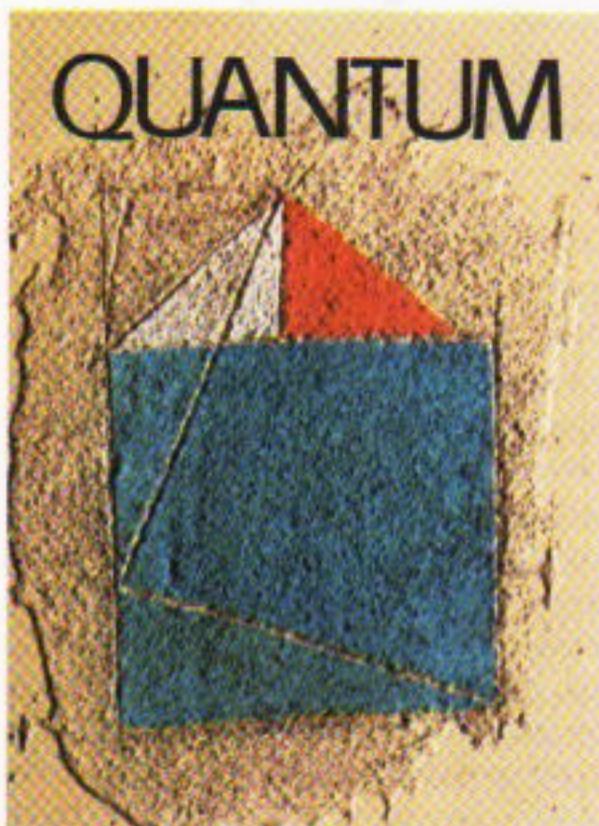
Αυτός ο κύριος είναι όντως εντυπωσιακός. Και είχε την τύχη να ζωγραφίσει το πορτρέτο του ο Gilbert Stuart (1755-1828), ο σημαντικότερος ζωγράφος πορτρέτων της εποχής του. Ο Stuart ζωγράφισε τον George Washington αρκετές φορές, αλλά είναι κυρίως γνωστός για το έργο που δεν ολοκλήρωσε. Το είχε παραγγείλει η Martha Washington κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του συζύγου της, και είναι γνωστό σε όλους, ως η εικόνα που θρίσκεται στο χαρτονόμισμα του ενός (αμερικανικού) δολαρίου.

Όπως και τα πορτρέτα του Washington, αυτός ο πίνακας αποπινέει δύναμη και αυτοπεποίθηση. Ο κύριος Grant καταφέρνει να διατηρήσει απόλυτα στην πίστη το σώμα του, παρόλο που, λόγω της διαδρομής του πάνω στον πάγο, διαγράφει μια μάλλον κλειστή καμπύλη. Η κίνησή του φαίνεται αβίαστη, και αντιλαμβανόμαστε ότι αυτός θα ήταν μάλλον ο τελευταίος που θα ενδιαφερόταν για το τι γίνεται κάτω από τα πέδιλά του. Προτιμά την παγοδρομία, και αφήνει σ' εμάς τους υπόλοιπους να διαβάσουμε το άρθρο «Πατινάζ σε πάγο», στη σελίδα 27.

QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση εξωφύλλου: Yury Vashchenko

Όταν ο Πυθαγόρας ανακάλυψε το περιφέρο θεώρημά του, ενθουσιάστηκε τόσο ώστε, όπως λέει η ιστορία, θυσίασε ένα βόδι στους θεούς.

Από αυτό το θεώρημα οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στο ότι η διαγώνιος τετραγώνου ισούται με $\sqrt{2}$ φορές την πλευρά. Το 2 δημος δεν είναι τέλειο τετράγωνο, και έτσι η τετραγωνική ρίζα του δεν είναι ακέραιος. Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι δεν είναι ούτε ρητός, δηλαδή ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Οι άρρητοι αριθμοί συντάραξαν τα θεμέλια της φιλοσοφίας τους και κατέρριψαν ορισμένες αποδείξεις θεωρημάτων οι οποίες βασίζονταν στην φευδόν αρχή ότι όλα τα μεγέθη μπαν σύμμετρα.

Σύμφωνα με έναν άλλο θρύλο, ο πυθαγόρειος φιλόσοφος Ιππασος διέδωσε ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί, παραβινούντας το απόρρητο της σχολής του Πυθαγόρα. Κατά μία εκδοχή του θρύλου, οι Πυθαγόρειοι πέταξαν τον Ιππασο στη θάλασσα γι' αυτή την αοέβειά του!

Όπως και νά χουν τα πράγματα, δείτε πώς παρουσιάζεται το πυθαγόρειο θεώρημα στο άρθρο της σελίδας 48.

ΑΡΘΡΑ

- 6 Δεύτερος Νόμος της Θερμοδυναμικής
Μαθηματικά και αέναν κίνηση

Anatoly Savin

- 13 Φυσικά όργανα πειραματισμού
Μανιτάρια και αστρονομία ακτίνων X

Alexander Mitrofanov

- 19 Μαθηματικά και μεταλλουργία
Διατάξεις Penrose και ημικρύσταλλοι

V. Koryerin

- 31 Αριθμοί και υπεραριθμοί
Πέρα από την υποδιαστολή

A.B. Zhiglevich και N.N. Petrov

- 38 Ο τύπος του Tsiolkovsky
Το μεγάλο πρόβλημα των διαστημικών πτήσεων

Albert Stasenko

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων

4 Κβαντικά χαμόγελα

Το ελληνικό αλφάριθμο

- 11 Σπαζοκεφαλίες

- 12 Αρρητογραφία

- 27 Στο μαυροπίνακα I

Πατινάζ σε πάγο

- 35 Πώς λύνεται;

- 36 Καθειδοσκόπιο

Μαθηματικό εφαλτήριο

- 43 Μαθηματικές αναζητήσεις

Κατασκευή τριγώνων από τρία στοιχεία

- 44 Στα πεδία της φυσικής

Καθρέφτης γεράτος νερό

- 48 Με λίγη φαντασία

Αποκαλυπτικές πλακοστρώσεις

- 52 Στο μαυροπίνακα II

Τα υπέροχα παραβολειδή

- 57 Το Quantum διαβάζει

- 63 Σας ενδιαφέρει;

- 64 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις

- 71 Παιχνιδότοπος

Το επίσιο πανηγύρι σπαζοκεφαλιών

Αριθμοί μέσα στα γονίδιά μας

Ο ρόλος του ποσοτικού προσδιορισμού στη μοριακή βιολογία

Σ' ένα πρόσφατο σημείωμα του εκδότη, στη βρετανική επιθεώρη Nature (τόμ. 368, 10 Μαρτίου 1994), ο John Maddox επισημαίνει ένα πολύ ομαριντικό στοιχείο όσον αφορά τον σύγχρονο περιγραφικό χαρακτήρα της μοριακής βιολογίας. Ο Maddox παρατηρεί ότι στα προγράμματα ανάλυσης ανθρώπινου γονιδιώματος ο βασικός στόχος είναι να καταγραφούν τα γονίδια και να «προσδιοριστούν οι ακολουθίες των νουκλεοτίδιων τους». Επίοπτα, σ' αυτά τα προγράμματα καταβάλλεται προσπάθεια να προσδιοριστούν «οι ακολουθίες περιοχών του DNA που βρίσκονται μεταξύ των γονιδίων στο χρωμόσωμα».

Ο σκοπός αυτών των δραστηριοτήτων είναι, πρώτα απ' όλα, να αναγνωριστεί μια δομή και να της δοθεί ένα όνομα. Έπειτα, οι ερευνητές συσχετίζουν αυτές τις δομές με άλλες δομές ή χαρακτηριστικά του οργανισμού που έχουν κληρονομηθεί μέσω του γονιδίου. Αυτές οι διεργασίες, όμως, είναι από τη φύση τους περιγραφικές. Δεν βασίζονται σε ποσοτικές σχέσεις. Περιγράφοντάς τες, μπορούμε να πούμε ποια θα είναι τα αποτελέσματα, και να δώσουμε ονόματα στα γονίδιά μας και τις ακολουθίες των περιοχών του DNA. Δεν μπορούμε όμως να κάνουμε ποσοτικές προβλέψεις. Επιπλέον, ποιοτικές προβλέψεις που αποτυγχάνουν να συμπεριλάβουν τις υποκείμενες ποσοτικές μεταβλητές, μπορεί κάλλιστα να είναι λαθαρέμενες.

Το πιο σημαντικό είναι ότι, ανεξάρτητα από το πόσο επιτυχώς μπορεί να μας πει η περιγραφική μοριακή βιολογία τι συμβαίνει, δεν μας λέει γιατί συμβαίνει. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί μόνον αν εφαρμόσουμε νόμους της επιστήμης που να χαρακτηρίζουν ποσοτικά τη συγκεκριμένη περίπτωση. Ο Maddox χρησιμοποιεί ως παράδειγμα έναν ιό που μολύνει το βακτήριο *E. coli*, ο οποίος ονομάζεται βακτηριοφάγος λ, και μια πρωτεΐνη καταστολέα που παράγεται από κάποιο γονίδιο του ιού. Ένα δεύτερο γονίδιο, που ονομάζεται Cro, θα προσδεθεί στην ίδια θέση του DNA αν δεν υπάρχει πρωτεΐνη καταστολέας, και θα καταστείλει τη δραστηριότητα του καταστολέα. Αυτό ονομάζεται μηχανισμός «διακόπτης». Μελετώντας την εν λόγω περίπτωση, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι υπάρχουν περίπου 100 ελεύθερα μόρια στο υπό εξέταση κύτταρο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διακυμάνσεις των μακροοκοπικών νόμων της θερμοδυναμικής ισορροπίας που δεν δικαιολογούνται. Ο Maddox

επισημαίνει ότι ο γενετικός «διακόπτης» μπορεί πράγματι να είναι ένα κινητικό φαινόμενο και ότι «οι ενεργειακές συνέπειες των θεωρούμενων «σταθερών ισορροπίας» μπορεί να είναι φευδείς».

Όπως τονίζει ο Maddox, «το να δίνουμε ονόματα σε διάφορα τμήματα δεν συνεπάγεται από μόνο του την κατανόηση». Κατόπιν καταγράφει τα προβλήματα που απομένει να λυθούν: «πώς τα μόρια του καταστολέα διπλώνονται και παίρνουν το χαρακτηριστικό σχήμα τους που μοιάζει με αλτήρα, γιατί τα διμερή είναι τόσο πιο σταθερά σε σύγκριση με τα μονομερή, και πώς μια άλφα έλικα στην αρινική περιοχή της πρωτεΐνης αλληλεπιδρά με το DNA στα σημεία πρόσδεσης. Ακριβέστερα, τι συμβαίνει, έχει προσδιοριστεί με τη διεξαγωγή εξεζητημένων πειραμάτων γενετικής. Απομένει να ανακαλυφθεί γιατί συμβαίνει αυτό, και όχι κάτι άλλο».

Σε τούτη τη σύντομη επισκόπηση αδίκησα το σημείωμα του Maddox. Αν έχετε κάποιες γνώσεις μοριακής βιολογίας, σας συνιστώ να διαβάσετε ολόκληρο το άρθρο του. Εδώ προσπάθησα απλώς να οκιαγραφήσω τις ιδέες του και να προβάλω τη σημαντικότητα δύο όψεων της επιστήμης που δεν συσχετίζονται συχνά με τη μοριακή βιολογία. Ο ένας είναι η χρήση των ποσοτήτων, των συμβόλων και των εξισώσεων: ο άλλος είναι η εφαρμογή τους σε θεμελιώδεις νόμους της επιστήμης, λόγου χάρη στη θερμοδυναμική και την κινητική θεωρία.

Έχω παρατηρήσει ότι υπάρχει η τάση να μειώνεται η σημασία των «οκληρών επιστημών», επειδή τα πραγματικά συναρπαστικά πεδία έρευνας βρίσκονται στη μοριακή βιολογία. Άλλα ακόμη κι αν εκεί βρίσκεται το όντως «συναρπαστικό», θα φτάσετε σε αδιέξοδο αν δεν χρησιμοποιήσετε τη φυσική και τη χημεία. Δεν μπορείτε να διεισδύσετε στην καρδιά των φυσικών φαινομένων αν δεν κατανοείτε τους βασικούς νόμους και τις αρχές της επιστήμης που βρίσκονται πίσω τους.

Οι αναγνώστες του *Quantum* αποκτούν συνεχώς γνώση για τους ασυνήθιστους και συναρπαστικούς τρόπους με τους οποίους τέτοιου είδους θεμελιώδεις αρχές οδηγούν στη βαθύτερη κατανόηση των ποικίλων φαινομένων της βιολογίας, καθώς και των άλλων τομέων της επιστήμης. (Θυμηθείτε, για παράδειγμα, τα άρθρα «Η χρυσή σκάλα του Φαραώ» στο πρώτο τεύχος του *Quantum* και «Νάνοι και γίγαντες» στο δεύτερο τεύχος.)

Ανεξάρτητα από τα ενδιαφέροντά σας —αλλά ιδιαι-

τέρα αν οκοπεύετε να ασχοληθείτε με τις επιστήμες της ζωής—, συνεχίστε να μελετάτε τη φυσική και τη χημεία, και να εφοδιάζεστε με τα μαθηματικά εργαλεία που είναι απαραίτητα για την έρευνα σε όλες τις επιστήμες. Ελπίζουμε ότι το *Quantum* θα σας βοηθήσει να βαδίσετε σ' αυτό το δυριούργικό μονοπάτι.

Bill G. Aldridge

O B.G. Aldridge είναι φυσικός, διευθυντής της Εθνικής Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών των ΗΠΑ και εκδότης του αμερικανικού Quantum.

Το καλοκαιρινό τεύχος του *The College Mathematics Journal* (κυκλοφόρησε τον Μάιο του 1994), που εκδίδεται από την Αμερικανική Μαθηματική Ένωση (MAA), παρουσιάζει μικρές περιλήψεις των σημαντικότερων άρθρων —με περιεχόμενο μαθηματικό— που δημοσιεύτηκαν στα αμερικανικά περιοδικά τους τελευταίους μήνες, προκειμένου οι αναγνώστες του να ενπιερχθούν περιληπτικά ή να αντέξουν σ' αυτά για πληρέστερη πληροφόρηση. Μετάξι των 18 παρουσιαζόμενων άρθρων (ένα από το *Scientific American*, ένα από το *Mathematical Spectrum*, ένα από το *Mathematics of Computation*, ένα από το *American Scientist*, δύο από το *Houston Mathematica*, ένα από το *Management Sciences*, κ.λπ.) συμπεριλαμβάνεται το «Διατάξεις Penrose και πρικρόσταλλο» του V. Kogurein από το περιοδικό *Quantum*. Για να προλάβουμε οποιαδήποτε σύγχυση, διεκρινίζουμε ότι το άρθρο αυτό δημοσιεύτηκε στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1994 του αμερικανικού *Quantum* και όχι στο τρέχον τεύχος, λίγο διάσπορα, δηλαδή, πριν αρχίσει να κυκλοφορεί το ελληνικό *Quantum*.

Στο *The College Mathematics Journal* ομοιούνεται: «Το άρθρο αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή στα μαθηματικά των πριπεριοδικών πλακοστρώσεων» προσφέρει όμως και κάτι περισσότερο: οδηγεί τον αναγνώστη βήμα προς βήμα διαμέσου των σχετικών μαθηματικών ιδεών προκειμένου να αντιληφθεί την ανάπτυξη αυτού του τομέα. Για παράδειγμα, οι πράξεις της επέκτασης και της σύμπτυξης προεγγίζονται μέσω μιας σειράς προβλημάτων τα οποία καλείται να λύσει ο αναγνώστης. Επίσης, το άρθρο καταλήγει σ' ένα υστερόγραφο στο οποίο οδηγούμαστε επαγγελματικά στην απόδειξη ότι ο διεθνός μετασχηματισμός de Bruijn δημιουργεί πριπεριοδικές καλύψεις. Το άρθρο ενδείκνυται για να δεκτικήσει ο καθένας (από μαθητής λυκείου έως και επαγγελματίας ερευνητής) μια περιήγηση στα μαθηματικά των πλακοστρώσεων Penrose».

Εμείς με ιδιαίτερη χαρά σας παρουσιάζουμε το άρθρο αυτό στο 3ο τεύχος του ελληνικού *Quantum* μαζί με όλο το σπουδαίο υλικό του τρέχοντος αμερικανικού τεύχους. Απολαύστε το καλύτερο εκπαιδευτικό/επιστημονικό περιοδικό του πλανήτη μας.

A. M.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο της Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνα

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος, Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουντάκης

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Σύμβουλος επί διεθνών θερέτρων

Timothy Weber

Sergey Ivanov

Edward Lozansky

Σύμβουλοι Σύνταξης

Alexander Buzzin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuly Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχιουντάκηρια, Γραφείο Κvant

Συμβουλευτική Επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT

James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τρίτο Θετικών Επιστημών, Lécole Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητήρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Καλέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέττα

Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο των Βορείου Ηλιού

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερτεϊλ, Λονζιάνα

Carol-ann Tripp, Καθηγητήρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Άιλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Αλέκος Μάραλης

Διευθυντής

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.:

Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, Φάνης Γραμμένος-φυσικός, Μαριάνθη Πετράκη-φυσικός,

Κώστας Ανδρικόπουλος-φυσικός, Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης-μαθηματικός,

Στέφανος Τραχανάς-φυσικός, Χάρης Καζαλάρης-βιολόγος και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια

Παντελής Μπουκάλας

Επιμέλεια ελληνικής όλης και τυπογραφικής διαρθρώσεως

Γ. Κυριακόπουλος και Π. Τασιόπουλος

Επιπλέοντες σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιτύχων Α' Βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπεύθυνη λογοτερία και διαφήμισης

Μαρία Μάραλη

Διακίνηση

Γιώργος Βιτσακάκης

Συνδρομές

Αλεξία Σταρίρη

Φωτοστοιχείωση, φίλμ, μοντάζ

Πέραν

Εκτύπωση

Τετραχωρία

Βιβλιοθεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

To *Quantum* εκδίδεται από την Εκδοτική οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο

Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διεργατικό περιοδικό. Copyright © για την

ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και λεντρέτες διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,

Ιοαννίνων 10 και Δαιφνούπλι, 114 71 Αθήνα.

</div

Το ελληνικό αλφάβητο

Ένας χρήσιμος οδηγός για υποψήφιους επιστήμονες

Sheldon Lee Glashow

α: Οι ακτίνες άλφα είναι πυρήνες πλίου που εκπέμπονται από πυρήνες κατά τη διαδικασία της διάσπασης άλφα, ενός από τα τρία είδη φυσικής ραδιενέργειας.

β: Οι ακτίνες βήτα είναι υψηλής ταχύτητας πλεκτρόνια που εκπέμπονται από πυρήνες κατά τη διαδικασία της διάσπασης βήτα, μιας άλλης μορφής φυσικής ραδιενέργειας.

γ: Οι ακτίνες γάμα είναι υψηλής ενέργειας φωτόνια που εκπέμπονται από πυρήνες κατά τη διαδικασία της διάσπασης γάμα. Καθεμιά από τις παραπάνω μορφές ραδιενέργειας απεικονίζει και ένα από τα τρία βασίλεια της ύλης: τα σωματίδια-α είναι αδρόνια, τα σωματίδια-β είναι λεπτόνια,

και τα σωματίδια-γ είναι μποζόνια βαθμίδας.

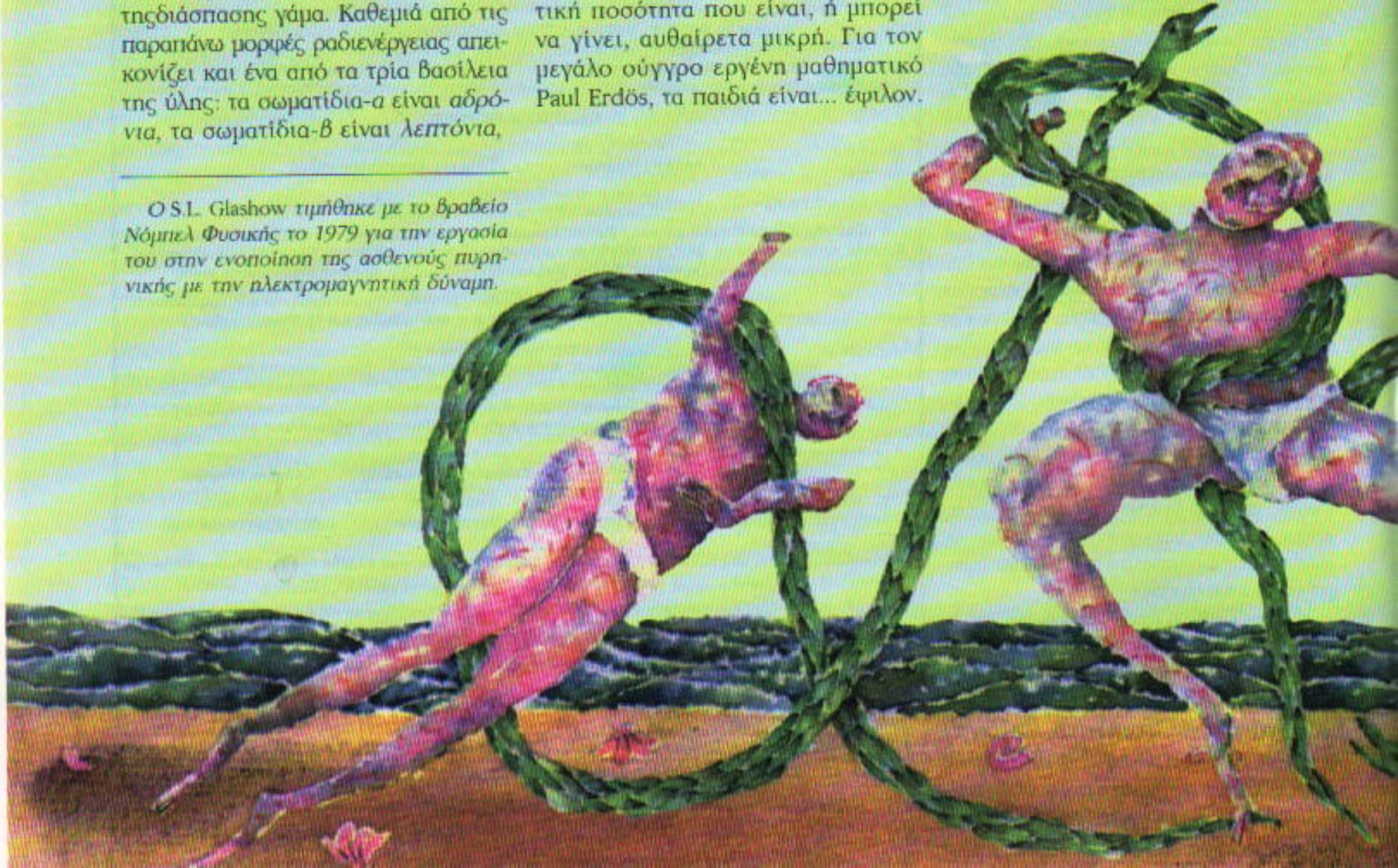
δ: Το δέλτα-κάτι (είτε με πεζό είτε με κεφαλαίο) συχνά παριστά μια μικρή αλλαγή σ' αυτό το κάτι, όπως τα δχ ή Δτ. Ακόμη, η συνάρτηση δέλτα δ(x) (που είναι μηδενική για κάθε x εκτός από την τιμή $x = 0$, όπου είναι άπειρη) είναι εκ των ων ουκ άνευ για τους θεωρητικούς φυσικούς, και οι ακτίνες δέλτα είναι σημαντικές για τους πειραματικούς φυσικούς.

ε: Το έφιλον δηλώνει μια αριθμητική ποσότητα που είναι, ή μπορεί να γίνει, αυθαίρετα μικρή. Για τον μεγάλο ούγγρο εργένη μαθηματικό Paul Erdős, τα παιδιά είναι... έφιλον.

ζ: Ζήτα ονομάστηκε ένα σωματίδιο από εκείνους που το «ανακάλυψαν», μέχρι που αποδείχτηκε ότι αυτό δεν υπήρχε καθόλου. Έκτοτε, δεν είναι καθόλου δημοφιλές.

η: Το ήτα δηλώνει το όγδοο και βαρύτερο μέλος της οκτάδας των μεσονίων χωρίς σπιν. Την ύπαρξή του προέβλεψε ο Murray Gell-Mann το 1961. Το κεφαλαίο Η χρησιμοποιείται προς τιμήν του Πανεπιστημίου Johns Hopkins, όπου ανακαλύφθηκε το σωματίδιο-η.

O.S.L. Glashow τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1979 για την εργασία του στην ενοποίηση της ασθενούς πυρηνικής με την πλεκτρομαγνητική δύναμη.



Θ: Το θήτα πρέπει να σας φέρνει στο νου την τριγωνομετρία, αφού είναι η ουνήθης επιλογή για το συμβολισμό μιας γωνίας.

ι: Το γιώτα μοιάζει ακριβώς με το ι στο οποίο κάποιος λησμόνησε να βάλει την κουκκίδα.

κ: Το κάπα, όπως και το προπογούμενό του γράμμα, μοιάζει πολύ με το αντίστοιχό του λατινικό για να βρίσκεται σε ευρεία χρήση, αν και κάποτε εγώ επινόησα το οωματίδιο-κ, το οποίο όμως δεν υπάρχει.

λ: Με το λάρδα συμβολίζουμε το μήκος του κύματος. Το κεφαλαίο Λ παριστά το ελαφρύτερο από τα παραδοξά βαρύδια βαρύδια.

μ: Το μι δηλώνει το μιόνιο, για το οποίο ο διάσημος αμερικανός φυσικός I.I. Rabi, ρώτησε μισόν αιώνα πριν: «ποιος το παρήγγειλε αυτό;» Ακόμη δεν μάθαμε την απάντηση.

ν: Το νι αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε από τα τρία γνωστά είδη νετρίνων: ν_e , ν_μ και ν_τ . Ακόμη, τα μ και ν συχνά παρουσιάζονται ως αριθμητικοί δείκτες, όπως στη βασική εξίσωση της γενικής σχετικότητας:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

Ξ: Το ξι είναι εύκολο να το προφέρουμε αλλά πολύ δύσκολο να το γράψουμε πεζό. Το κεφαλαίο Ξ παριστά ένα βαρύδιο με δύο μονάδες παραδοξότητας.

ο: Το όμικρον μοιάζει, σε όλο τον κόσμο, με το λατινικό ο.

π: Το πι δηλώνει το λόγο της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, και επιπλέον είναι ένα ομαντικό μεσόνιο. Το πιόνιο συνήθως διασπάται σε ένα μιόνιο και ένα νετρίνο: $\pi \rightarrow \mu + \nu$.

ρ: Το ρι μπορεί να εκφράζει πυκνότητα. Ακόμη, το ρ -μεσόνιο σχηματίζεται από τα ίδια κουάρκ που σχηματίζουν και το πιόνιο, αλλά με τα σπιν των κουάρκ παράλληλα.

σ: Το σίγμα δηλώνει το σπιν ενός οωματίδιου. Το κεφαλαίο Σ εκφράζει μαθηματικό άθροισμα ή οποιοδήποτε από τα τρία παράδοξα βαρύδια: Σ^+ , Σ^0 , και Σ^- .

τ: Το ταυ είναι το βαρύτερο από τα τρία γνωστά φορτισμένα λεπτόνια, εκτός αν εκφράζει ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα (όπως ο χρόνος ημίσειας ζωής).

υ: Το ύψιλον δηλώνει το οωματίδιο που αποτελείται από ένα μπλε κουάρκ και το αντικουάρκ του. Ανακαλύφθηκε το 1977 από τον Leon Lederman κατά λάθος.

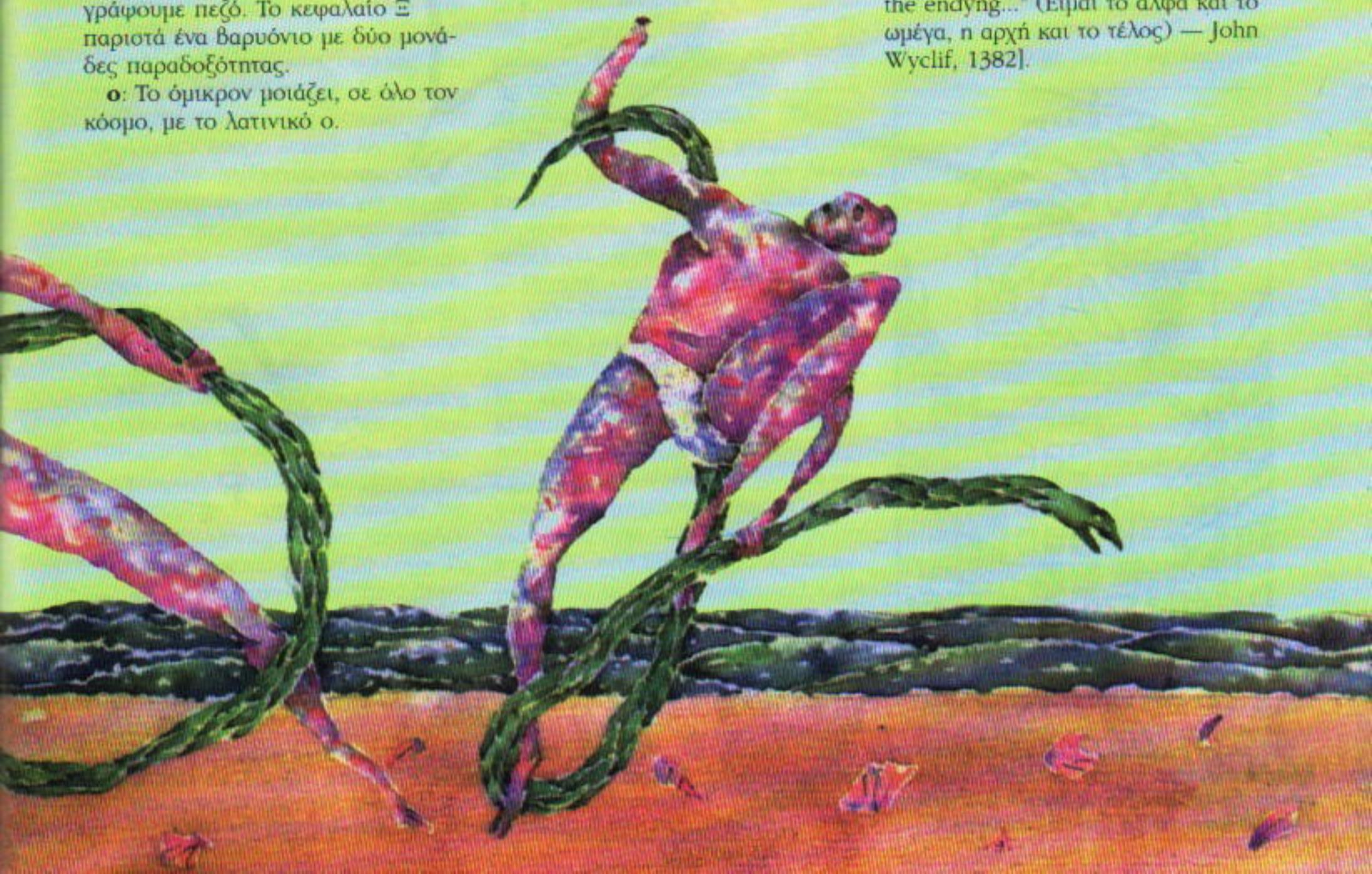
ψ: Το φι συμβολίζει μια γωνία στην περίπτωση που έχετε ήδη χρησιμοποιήσει το θ — για παράδειγμα, η $\eta\theta+\psi = \eta\theta \sin\psi + \eta\psi \cos\theta$ είναι

μια γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα.

χ: Το χι είναι ένα σύμβολο το οποίο κατά σύμβαση δεν αντιστοιχεί σε κάτι συχνά χρησιμοποιείται για να δηλώσει κάτι που μόλις οκεφτήκατε.

ψ: Το φι χρησιμοποιείται για τις κβαντομηχανικές κυρατοσυναρτήσεις, αν και θα μπορούσε να δηλώνει μια γωνία, εάν έχετε περισσότερες από δύο. Το σωματίδιο-*J* (που παρατηρήθηκε για πρώτη φορά στη Νέα Υόρκη) ταυτίζεται με το Ψ (που παρατηρήθηκε ταυτόχρονα στην Καλιφόρνια). Σήμερα, είναι γνωστό ως J/Ψ , ή “gypsy” (γύψτικο) σωματίδιο.

ω: Το ωμέγα είναι το υπερχρησιμοποιημένο τελευταίο γράμμα του ελληνικού αλφαριθμητικού: ω είναι ένα μεσόνιο αλλά και η προτιμότερη επιλογή για να συμβολίσουμε συχνότητες εκφρασμένες σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο. Με κεφαλαίο Ω μπορεί να είναι ο λόγος της μέσης πυκνότητας μάζας του ούμπαντος προς την κρίσιμη τιμή της, ή το τριπλά παράδοξο βαρύδιο που ανακάλυψε ο ελληνοαμερικανός φυσικός N. Σάμιος. [Τον 14ο αιώνα στην Αγγλία το ωμέγα συμβολίζοταν ως *oo*, όπως στο: “I am alpha and *oo*, the bigynnyng and the endyng...” (Είμαι το άλφα και το ωμέγα, η αρχή και το τέλος) — John Wyclif, 1382].





F₁

F₂

Красов

Μαθηματικά και αέναν κίνηση

«Ο Δεύτερος Νόμος πρέπει να αποτελεί τμήμα των πνευματικών εφοδίων κάθε μορφωμένου ανθρώπου ανεξαιρέτως.»

C.P. Snow

Anatoly Savin

Hαέναν κίνηση συνδέεται συνήθως με διατάξεις παρόμοιες με αυτήν που βλέπετε στο Σχήμα 1. Σύμφωνα με την ιδέα του εφευρέτη, αυτός ο τροχός με τις οφαίρες στο εσωτερικό του θα έπρεπε να περιστρέψεται επ' άπειρον και, επιπλέον, να θέτει σε κίνηση και άλλα μηχανικά συστήματα —αργαλειούς, τόρνους, κ.ά. Τελειώνοντας το λύκειο, γνωρίζουμε ότι μια παρόμοια διάταξη δεν μπορεί να λειτουργεί, διότι αυτό αντιτίθεται στο νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Και όμως, κάθε χρόνο οι ακαδημίες επιστημών σε όλο τον κόσμο λαμβάνουν εκατοντάδες καινούργια (και μερικά όχι και τόσο καινούργια) σχέδια για την κατασκευή παρόμοιων μηχανισμών. Οι φυσικοί τα ονομάζουν «αεικίνητα πρώτου είδους». Υπάρχουν, λοιπόν, «αεικίνητα δευτέρου είδους»; Υπάρχουν, και γι' αυτά πρόκειται να συζητήσουμε σε τούτο το άρθρο.

Νά μια ιδέα για την κατασκευή ενός αεικίνητου αυτού του είδους: Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο σώματα ίσης θερμοκρασίας. Μια μηχανή καταφέρνει να μεταφέρει θερμότητα από το ένα σώμα στο άλλο χωρίς να καταναλώνει οποιοδήποτε εξωτερικό έργο. Τη διαφορά θερμοκρασίας που δημιουργείται μεταξύ των δύο σωμάτων την εκμεταλλεύεται μια θερμική μηχανή που επαναφέρει τη θερμότητα από το δεύτερο στο πρώτο σώμα, με την ταυτόχρονη παραγωγή μηχανικού

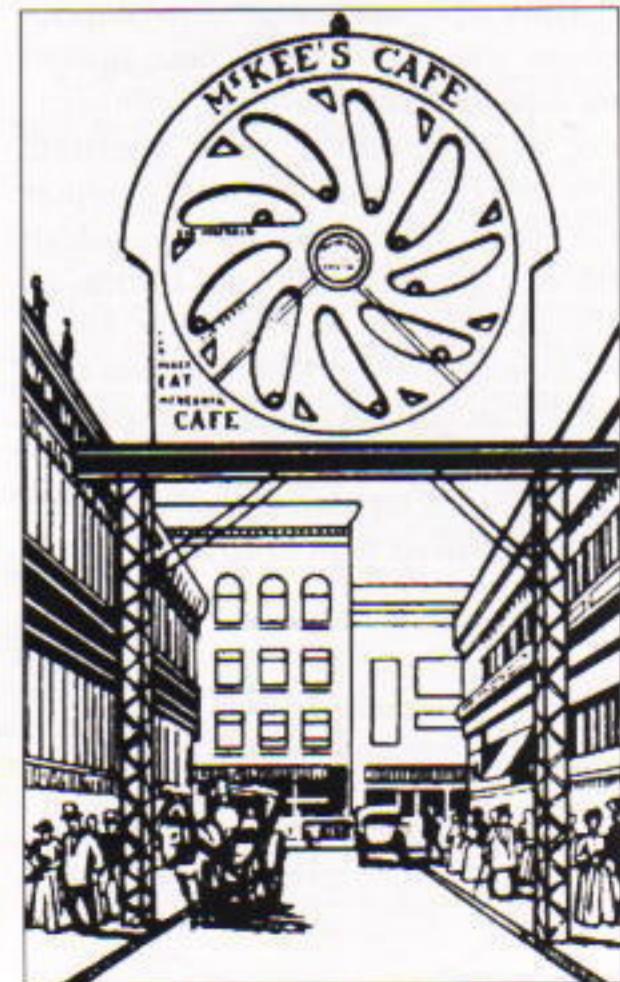
έργου. Η δράση αυτή της θερμικής μηχανής οδηγεί στην εξίσωση των θερμοκρασιών των δύο σωμάτων, και επομένως η όλη διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί: μεταφορά θερμότητας από το ένα σώμα στο άλλο, παραγωγή μηχανικού έργου εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας —και ούτω καθεξής, έως την αιωνιότητα.

Το αεικίνητο δευτέρου είδους δεν αντιτίθεται στο νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Στην προηγούμενη περίπτωση, ενέργεια ούτε δημιουργείται ούτε χάνεται —μεταφέρεται απλώς από το ένα σώμα στο άλλο και μέσω της θερμικής μηχανής μετατρέπεται πλήρως θερμότητα σε έργο. Μέσω αυτής της διαδικασίας, Βεβαίως, η θερμοκρασία και των δύο σωμάτων καταλήγει μικρότερη απ' ό,τι αρχικά, αλλά αυτή η απώλεια αθροιστικά εξισορροπείται από την εσωτερική ενέργεια του περιβάλλοντος.

Υπάρχει, όμως, ένας άλλος νόρος που εμποδίζει την κατασκευή του αεικίνητου δευτέρου είδους. Η ιδέα αυτού του νόμου πρωτεμφανίζεται στις εργασίες του περίφημου γάλλου φυσικού και μηχανικού Sadi Carnot, γιου ενός οπιαντικού πρωταγωνιστή της Γαλλικής Επανάστασης και φυμισμένου μαθηματικού, του Lazare Carnot. Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε από τον άγγλο επιστήμονα William Thomson και από τον γερμανό φυσικό Rudolph Clausius. Ο νόρος αυτός ονομάζεται Δεύτερος Νόμος της

θερμοδυναμικής, και είναι ο εξής: *Eίναι αδύνατο να μεταφερθεί θερμότητα από ένα σώμα σε κάποιο άλλο χωρίς κατανάλωση ενέργειας εάν η θερμοκρασία του πρώτου σώματος δεν είναι υψηλότερη από του δεύτερου.*

Αυτή η απαγόρευση δεν μοιάζει ιδιαίτερα πειστική. Ισχύει άραγε πάντοτε; Ο μεγάλος άγγλος φυσικός James Clerk Maxwell επινόησε έναν μηχανισμό (είναι γνωστός ως δαίμονας του Maxwell) με σκοπό να καταρρί-



Σχήμα 1

ψει αυτό το νόρο. Φανταστείτε ένα δοχείο χωρισμένο σε δύο ίσα τμήματα από ένα διάφραγμα. Το διάφραγμα έχει μια μικρή τρύπα και κοντά σ' αυτήν στέκεται ένας «δαίμονας». Γεμίζουμε το ένα τμήμα του δοχείου με κάποιο αέριο και ζητούμε από το δαίμονα να επιτρέπει να περνούν προς το άλλο τμήμα του δοχείου μόνο τα μόρια που έχουν μεγάλη ταχύτητα. Αφού η μέση κινητική ενέργεια για κάθε μόριο του αερίου χαρακτηρίζει τη θερμοκρασία του αερίου, είναι φανερό ότι το αέριο στο ένα τμήμα θ' αρχίσει να φύχεται, ενώ στο άλλο να θερμαίνεται. Έχουν προταθεί διάφορες ουσιεύες που, σύμφωνα με τους σχεδιαστές τους, θα μπορούσαν να παίξουν το ρόλο ενός παρόμοιου δαίμονα, όλες δήμας στην πράξη από τυγχάνουν εξαιτίας προβλημάτων που δεν έχουν προβλεφθεί.

Παρά ταύτα, εκεί που απέτυχε η φυσική, ίως τα καταφέρουν τα ραθματικά. Θέλω να προτείνω μια συσκευή, χωρίς δαίμονες ή άλλα κακόβουλα πνεύματα, που είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ακόμη και σ' ένα σχολικό εργαστήριο. Θα παρουσιάσω υπολογισμούς που αποδεικνύουν πεντακάθαρα ότι αυτή η συσκευή μπορεί να μεταφέρει θερμότητα από ένα σώμα σε κάποιο άλλο όταν αυτά έχουν αρχικά την ίδια θερμοκρασία.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του «αεικίνητου» μου, πρέπει να αφορμούσετε κάποιες μαθηματικές γνώσεις έτσι ώστε να πειστείτε για την ορθότητα των συλλογισμών και των κατασκευών που θα ακολουθούσουν. Θα ασχοληθούμε, λοιπόν, με την έλλειψη και τις ιδιότητές της.

Έλλειψη είναι η καμπύλη που σχηματίζεται από όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου για τα οποία το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο συγκεκριμένα σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερό. Τα σημεία F_1 και F_2 ονομά-

ζονται εστίες της έλλειψης, και το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων συμβολίζεται συνήθως με $2a$.

Την ιδιότητα αυτή τη χρησιμοποιούν οι κηπουροί όταν θέλουν να φτιάξουν παρτέρια λουλουδιών με οβάλ σχήμα. Καρφώνουν στο χώμα δύο ραβδιά (στις εστίες), δένουν σ' αυτά τις άκρες ενός σχοινιού, και παίρνουν ένα ακόμη ραβδί με μυτερή άκρη με το οποίο τεντώνουν το σχοινί. Αν μετακινήσουμε το τρίτο ραβδί έτσι ώστε το σχοινί να παραμείνει τεντωμένο, π μυτερή άκρη θα σχεδιάσει στο χώμα μια έλλειψη. Το μέγεθος και το σχήμα της έλλειψης εξαρτάται από το μήκος του σχοινιού και από την απόσταση μεταξύ των εστιών. Αυτό μπορεί να το επαληθεύετε εύκολα σ' ένα φύλλο χαρτιού χρησιμοποιώντας δύο πινέζες και ένα ρολόβι αντί για ραβδιά (Σχήμα 2).

Σχεδιάζοντας διάφορες έλλειψεις θα διαπιστώσετε ότι κάθε έλλειψη είναι μια κλειστή κυρτή καμπύλη μ' ένα κέντρο συμμετρίας και δύο άξονες συμμετρίας —την ευθεία F_1F_2 και τη μεσοκάθετο του τμήματος F_1F_2 . Επίσης, βλέπουμε εύκολα ότι για τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της έλλειψης το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις εστίες είναι μικρότερο από $2a$, ενώ για τα σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της είναι μεγαλύτερο.

Η τελευταία πληροφορία αρκεί για να αποδείξουμε μια σημαντική και όχι ιδιαίτερα προφανή ιδιότητα της έλλειψης: τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις εστίες μιας έλλειψης μ' ένα τυχαίο σημείο της M σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M .

Αν συγκρίνουμε αυτή την ιδιότητα με το νόρο της ανάκλασης του φωτός —π γωνία προσπώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως— καταλήγουμε στην εξής διατύπωση: μια οκτί-

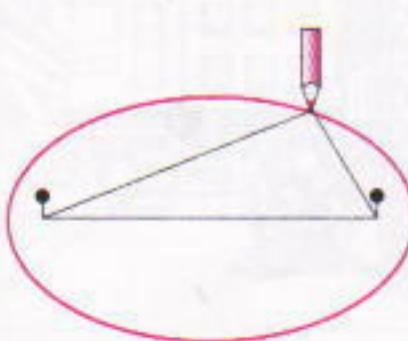
να φωτός που πηγάζει από μια εστία της έλλειψης μετά την ανάκλασή της στην έλλειψη διέρχεται από την άλλη εστία.

Αυτή είναι η «οπτική ιδιότητα» της έλλειψης, που μπορούμε να την παρατηρήσουμε στη φύση. Υπάρχουν σπιλίες με έλλειψεις θόλους όπου μπορούμε να βρούμε δύο σημεία, αρκετά απομακρυσμένα μεταξύ τους, τέτοια ώστε όταν μιλάει ένας άνθρωπος στο ένα σημείο, κάποιος άλλος που κάθεται στο δεύτερο τον ακούει σαν να βρίσκεται δίπλα του. Υπάρχουν, επίσης, αίθουσες σε παλάτια και κάστρα κατασκευασμένες επί τούτου με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργείται το συγκεκριμένο φαινόμενο.

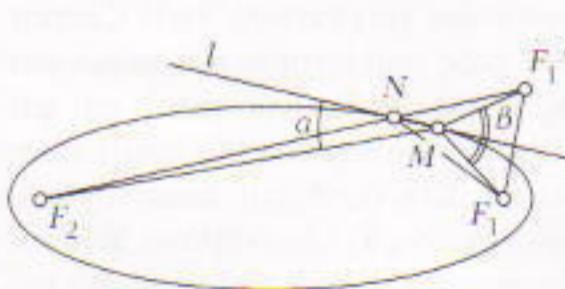
Επειδή η οπτική ιδιότητα της έλλειψης θα παίξει σημαντικό ρόλο σε δύο επακολουθήσουν, θα παρουσιάσω την απόδειξή της —είναι μάλλον σύντομη και απλή.

Έστω l η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M (Σχήμα 3) και έστω a και b οι γωνίες που σχηματίζει η l με τα ευθύγραμμα τμήματα F_1M και MF_2 (F_1 και F_2 είναι οι εστίες). Θεωρούμε το συμμετρικό σημείο F_1' της εστίας F_1 ως προς την l , φέρουμε το ευθύγραμμό τμήμα F_1F_2 , και σημειώνουμε με N την τομή αυτού του τμήματος και της l . Έστω ότι $N \neq M$. Τότε το N βρίσκεται έξω από την έλλειψη (πράγματι, ολόκληρη η l , εκτός από το σημείο M . Βρίσκεται έξω από την έλλειψη, διότι η έλλειψη είναι κυρτή καμπύλη). Επομένως, $F_1N + NF_2 > 2a = F_1M + MF_2$. Όμως, από κατασκευή, $F_1N = F_1'N$ και $F_1M = F_1'M$, και κατά συνέπεια έχουμε $F_1'N + NF_2 > F_1'M + MF_2$, ή $F_1'M + MF_2 < F_1'F_2$: η τελευταία οχέον έρχεται σε αντίφαση με την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο $F_1'F_2M$. Άρα, τα σημεία N και M πρέπει να συμπίπτουν, και επομένως η F_2MF_1' είναι ευθεία — δηλαδή $a = b$.

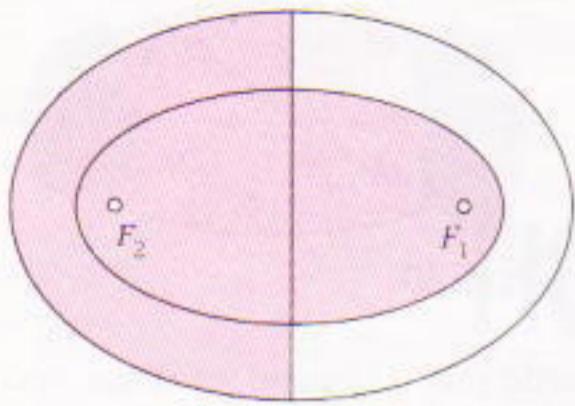
Και τώρα ας υλοποιήσουμε το πρόγραμμά μας. Πάρτε μια σελίδα χαρτιού σχεδίασης καλής ποιότητας, σημειώστε δύο σημεία F_1 και F_2 , και σχεδιάστε δύο ελλειψεις με εστίες σε αυτά τα σημεία, χρησιμοποιώντας μια μεγαλύτερη κλωστή την πρώτη φορά και μια μικρότερη τη δεύτερη. Σχεδιάστε και τη μεσοκάθετο του τμήματος F_1F_2 και σημάτε ένα μέρος του



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

σχήματος, ώστε να πετύχετε το «μαντάρι» που βλέπετε στο Σχήμα 4.

Πάρτε τώρα το σχέδιό σας και πηγαίνετε στο πλησιέστερο μεταλλουργείο. Ζητήστε να σας φτιάξουν ένα μεταλλικό δοχείο που η επιφάνειά του θα έχει το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης του σχεδίου σας γύρω από τον άξονα ομιμετρίας F_1F_2 (Σχήμα 5). Ζητήστε να καλυφθεί το εσωτερικό του δοχείου από ένα υλικό με μεγάλη ανακλαστική ικανότητα. Μόλις είναι έτοιμο, πάρτε το στο οπίτι σας. Είστε πλέον κάτοχοι ενός αεικίνητου! Δεν με πιστεύετε; Ωραία, θα σας το αποδείξω μαθηματικά.

Τοποθετήστε δύο σώματα με ίση θερμοκρασία στα οπρεία F_1 και F_2 . Παρατηρήστε ότι οποιαδήποτε ακτίνα (φωτός ή θερμότητας) που ξεκινάει από το F_1 πρέπει να φτάσει στο F_2 (Σχήμα 6). Και, φυσικά, οποιαδήποτε ακτίνα διαδίδεται ακολουθώντας την ίδια τροχιά από το F_2 . Θα φτάσει ξανά στο F_1 . Παρατηρήστε όμως μια ακτίνα που από το F_2 προσκρούει στο κατακόρυφο τμήμα της κατασκευής μας. Αν δεν υπήρχε αυτό το κατακόρυφο φράγμα και αν δεν είχαμε οβίσει το μισό μέρος της εξωτερικής έλλειψης, η ακτίνα αυτή θα



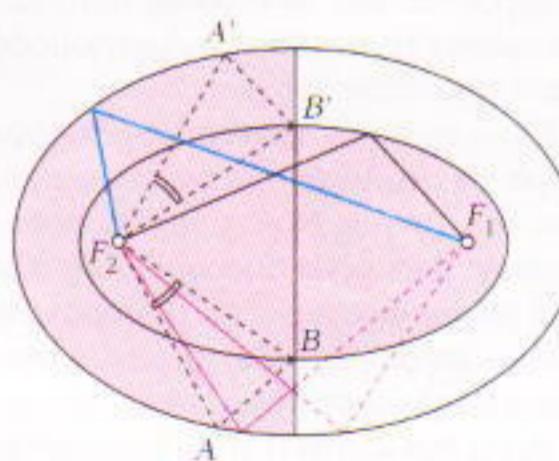
Σχήμα 5

ανακλάτο στο οβηρένο τμήμα και θα έφτανε στο F_1 . Τώρα όμως θα ανακλαστεί σε κάποιο οπρείο R του κατακόρυφου φράγματος, και θα ακολουθήσει την πορεία που θα είχε αν διαδιδόταν από το οπρείο F_1 προς το R (Σχήμα 6). Επομένως, θα επιστρέψει στο F_2 ! Και είναι φανερό ότι αν, ξεκινώντας από το F_2 , ακολουθήσει την ίδια πορεία αλλά με την αντίθετη φορά, θα επιστρέψει και πάλι στο F_2 . Επομένως, υπάρχει ένα ομαντικό πλήθος ακτίνων οι οποίες παγιδεύονται σε «βρόχους φωτός». Παρατηρώντας την εγκάρια τομή της «βροχανής» μας στο Σχήμα 6, βλέπουμε ότι είναι όλες οι ακτίνες που βρίσκονται μέσα στη γωνία AF_2B και στη συμμετρική της $A'F_2B'$.

Επομένως, το σώμα στο F_2 θα θερμαίνεται ενώ το σώμα στο F_1 θα ψύχεται. Μπορούμε ακόμη και να υπολογίσουμε τις τελικές θερμοκρασίες που αποκτούν τα σώματα μετά τη σταθεροποίηση της διαδικασίας.

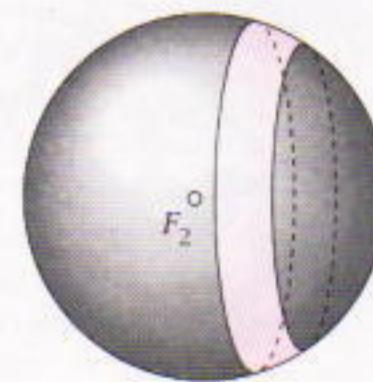
Υποθέτουμε ότι η αρχική θερμοκρασία τους είναι T_0 K (Βαθμοί Kelvin, όπως ονομάζονται προς τιμήν του άγγλου φυσικού W. Thomson που αναφέραμε προηγουμένως, και στον οποίο δόθηκε ο τίτλος του λόρδου Kelvin λόγω των εξαιρετικών επιστημονικών επιτευγμάτων του). Είναι γνωστό ότι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας διά ακτινοβολίας είναι ανάλογος με την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας (σε βαθμούς Kelvin) του ακτινοβολούντος σώματος.

Επομένως, αν η θερμοκρασία στο οπρείο F_1 είναι T_1 , και στο F_2 είναι T_2 , τότε η ακτινοβολούμενη ισχύς στα F_1 και F_2 μπορεί να γραφεί kT_1^4 και kT_2^4 , αντίστοιχα. Όλες οι ακτίνες που ξεκινούν από το F_1 φτάνουν έπειτα από μια ανάκλαση στο F_2 , αλλά μό-



Σχήμα 6

νού είναι μέρος από τις ακτίνες που ξεκινούν από το F_2 φτάνουν στο F_1 . Πόσες είναι αυτές; Θεωρήστε μια μικρή οφαίρα με κέντρο στο F_2 . Οι ακτίνες που επιστρέφουν στο F_2 αποκόπτουν έναν δακτύλιο της οφαίρας (Σχήμα 7). Αν το εμβαδόν του είναι A_1 και το ουνολικό εμβαδόν της οφαίρας είναι A , τότε το ποσό της ακτινοβολίας που επιστρέψει στο F_2 ισούται με $A_1 kT_2^4 / A$ και το μέρος της που φτάνει στο F_1 είναι $(A - A_1)kT_2^4 / A$.



Σχήμα 7

Σε κατάσταση ισορροπίας, η ενέργεια που ακτινοβολείται σε οριομένο χρονικό διάστημα από το οπρείο F_1 ισούται με την ενέργεια που φτάνει σε αυτό στο ίδιο χρονικό διάστημα. Δηλαδή,

$$(A - A_1) \frac{kT_2^4}{A} = kT_1^4.$$

Από την άλλη πλευρά, βάσει του νόμου διατήρησης της ενέργειας, έχουμε ότι η απώλεια ενέργειας στο F_1 ισούται με την αύξηση της ενέργειας στο F_2 — δηλαδή, $C(T_1 - T_0) = C(T_0 - T_2)$, όπου C είναι η θερμοχροπικότητα των δύο σώματων (υποθέτουμε ότι τα δύο σώματα είναι απολύτως όμοια). Η τελευταία εξίσωση μας δίνει $T_1 + T_2 = 2T_0$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση και θέτοντας $b = [(A - A_1)/A]^{1/4}$ (και παρατηρώντας ότι $b < 1$) παίρνουμε τελικά

$$T_1 = \frac{2T_0 b}{1+b} < T_0,$$

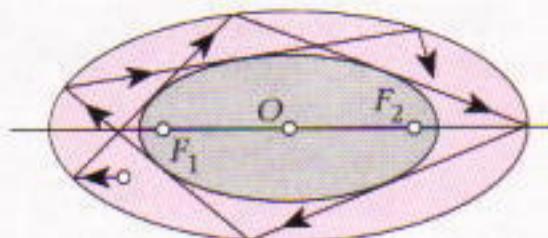
$$T_2 = \frac{2T_0}{1+b} > T_0.$$

Αυτό ήταν! Μπορείτε να ελέγξετε από την αρχή την επιχειρηματολογία

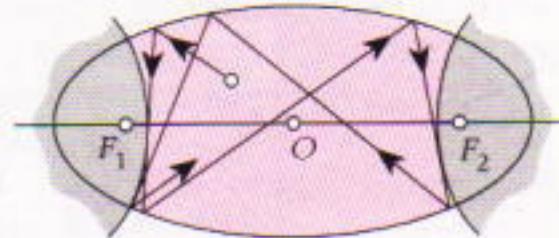
μας και να διαπιστώσετε ότι είναι απολύτως σωστή. Καταρρίψαμε, λοιπόν, τον Δεύτερο Νόμο της θερμοδυναμικής, Διυτυχώς (ή ευτυχώς) δχι. Έχουμε κάνει ένα λάθος. Πού όμως; Σκεφτείτε το μόνοι σας, και κατόπιν συγκρίνετε την απάντησή σας με όσα γράφουμε στη συνέχεια. Προαισθάνομα ότι δεν θα μπορέσουν να βρουν τη σωστή απάντηση όλοι οι αναγνώστες.

Ακολουθήσατε λαθερέμενό δρόμο αν προσπαθήσατε να βρείτε κάποιο σφάλμα στη φυσική — στο γεγονός, για παράδειγμα, ότι αγνοήσαμε τη διάδοση θερμότητας δια μεταφοράς. Γιατί; Επειδή μπορούμε να δημιουργήσουμε κενό μέσα στο δοχείο. Όμως, τι άλλο υπάρχει μέσα στη μικρή μας «μπχανή» εκτός από μαθηματικά και φυσική; Το σφάλμα κρύβεται στο σύννορο ανάμεσα σ' αυτές τις δύο επιστήμες — στη μετάβαση από τη φυσική διαδικασία στο μαθηματικό της μοντέλο.

Θυμηθείτε ότι ασχολούθηκαμε με δύο σώματα τοποθετημένα στις εστίες. Επομένως, αγνοήσαμε τις διαστάσεις των σωμάτων. Αυτός είναι ένας ουνθισμένος τρόπος σκέψης στη φυσική, όπου η φράση «τοποθετούμε ένα σώμα στο σημείο M » δεν προκαλεί ποτέ διαμαρτυρίες. Σε πολλές περιπτώσεις αυτή η αδιαφορία για τις διαστάσεις των σωμάτων είναι δικαιολογημένη. Για παράδειγμα, η κίνηση σεντράλης σώματος υπό την επίδραση δεδομένων δυνάμεων που ασκούνται στο κέντρο μάζας του δεν επηρεάζεται από το μέγεθός του και το σχήμα του. Ή, όπως απέδειξε ο Νεύτων, ένα σώμα που αποτελείται από ένα πλήθος ομόκεντρων ομογενών σφαιρικών στρωμάτων έλκει τα άλλα σώματα όπως τα έλκει η ίδια μάζα συ-



Σχήμα 9



Σχήμα 10

γκεντρωμένη στο κέντρο του. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αντικατάσταση ενός σώματος μ' ένα σημείο είναι μια ουνθισμένη πρακτική στη φυσική.

Στην περίπτωσή μας, όμως, αυτό οδηγεί σε σφάλμα. Ας δούμε κατά πόσον εξακολουθούν να ισχύουν οι συλλογισμοί μας όταν ως σώματα θεωρήσουμε σφαίρες με μη μπδενικές ακτίνες και με το κέντρο τους στις εστίες της έλλειψης.

Θεωρήστε τρεις ακτίνες που ανακλώνται στο ίδιο σημείο M της έλλειψης, το οποίο βρίσκεται στο αριστερό της τμήμα (Σχήμα 8): μια ακτίνα που «προέρχεται» από την εστία F_2 , και δύο ακτίνες AM και BM που προέρχονται από τα σημεία A και B , τα οποία απέχουν απόσταση r από το F_2 . Μετά την ανάκλαση, η πρώτη ακτίνα θα περάσει από την εστία F_1 και οι άλλες δύο θα περάσουν από σημεία που απέχουν ίση απόσταση R από την F_1 (διότι $\angle AMF_2 = \angle F_2 MB = \angle B_1 MF_1 = \angle F_1 MA_1$). Από την οροθύπη των ορθογώνιων τριγώνων AMF_2 και $A_1 MF_1$, έχουμε $r/R = AF_2/A_1 F_1 = F_2 M/F_1 M$. Το M βρίσκεται στο αριστερό μέρος της έλλειψης, και επομένως $F_2 M < F_1 M$, και άρα $R > r$. Αυτό σημαίνει ότι κάποιες από τις ακτίνες που θα ξεκινούν από μια σφαίρα ακτίνας r και με κέντρο στο F_2 δεν θα επιστρέψουν ποτέ σ' αυτήν έπειτα από κάποιες αντανακλάσεις και ούτε θα χτυπήσουν στην ίδιαν διαστάσεων σφαίρα στο F_1 — αυτές οι ακτίνες διαπιείρονται. Και το γεγονός αυτό κατατρέφει όλους τους συλλογισμούς και τις κατασκευές μας.

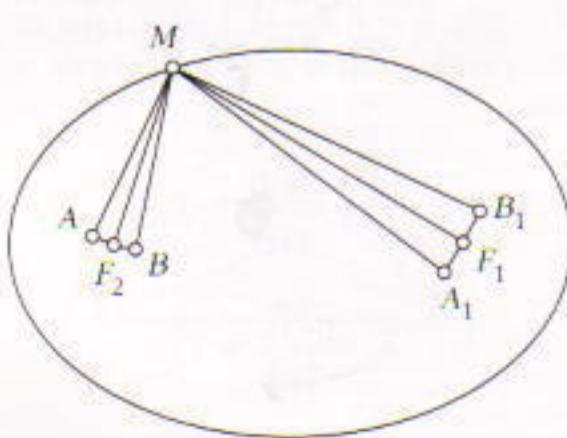
Οσοι αγαπούν τη φυσική μπορούν τώρα να αναπνεύσουν ανακουφιομένου: ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής παραμένει απαραβίαστος. Και για όσους αγαπούν τα μαθηματικά έχουμε μερικά επιπλέον περίεργα φαινόμενα που σχετίζονται με τη συμπεριφορά των ακτίνων που ανακλώνται σ' ένα ελλειπτικό κάτοπτρο.

Εάν μια ακτίνα εκπέρπεται από την

εστία μιας έλλειψης, μετά την πρώτη ανάκλασή της θα περάσει από την άλλη εστία. Αν δεν υπάρχει εκεί κάποιο σώμα να την εκτρέψει, ανακλάται και πάλι και επιστρέφει στην πρώτη εστία, έπειτα επιστρέφει ξανά στη δεύτερη, κ.ο.κ. Αυτό είναι αρκετά προφανές. Είναι λιγότερο προφανές, όμως, και αρκετά παράξενό, το ότι έπειτα από κάθε ανάκλαση η τροχιά προεγγίζει την ευθεία που διέρχεται από τις δύο εστίες, και ότι οριακά ταυτίζεται με το τμήμα αυτής της ευθείας το οποίο εμπεριέχεται στην έλλειψη. Όταν το πρώτο τμήμα της τροχιάς τέμνει αυτήν την ευθεία σ' ένα σημείο διαφορετικό από τις εστίες, η τροχιά δεν περνάει ποτέ από κάποια εστία. Επιπλέον, αν το σημείο τομής βρίσκεται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα που ουνδέει τις δύο εστίες, το ίδιο θα ισχύει για όλα τα επόμενα σημεία τομής (Σχήμα 9). Το πιο εντυπωσιακό είναι ότι υπάρχει μια μικρότερη έλλειψη με τις ίδιες εστίες με την πρώτη, στην οποία η τροχιά εφάπτεται έπειτα από κάθε ανάκλαση.

Οροίως, μια τροχιά που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο εστιών (Σχήμα 10) θα κάνει το ίδιο έπειτα από κάθε ανάκλαση, και θα εφάπτεται μιας υπερβολής με τις ίδιες εστίες. (Υπερβολή είναι η καμπύλη που σχηματίζεται από όλα εκείνα τα σημεία που η διαφορά των αποστάσεών τους από τις εστίες είναι σταθερή.)

Αυτές και άλλες ιδιότητες των ανακλάσεων σε μια καμπύλη ή καμπυλωμένη επιφάνεια μελετώνται από έναν ουγκριτικά νέο κλάδο των μοντέρνων μαθηματικών, τη λεγόμενη θεωρία του μαθηματικού μπλιάρδου. Σχετικά με τη φυσική πλευρά του θέματος, ο M.I. Feingold βρίσκεται στο μαυροπίνακα αυτού του τεύχους (σελίδα 52) και μας δείχνει τα αποτελέσματα της ανάκλασης σ' ένα παραβολοειδές κάτοπτρο. ◻

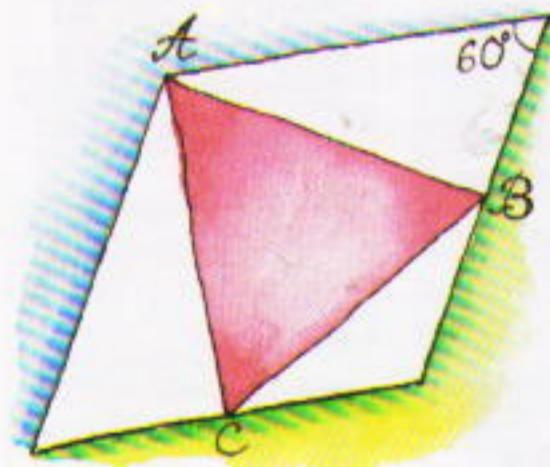


Σχήμα 8

Για να περνά η ώρα

Σ11

Η παρέλαση της μπάντας. Μια μεγάλη στρατιωτική μπάντα συμμετείχε σε μια παρέλαση. Στην αρχή οι μουσικοί παρέλαυναν σε σχηματισμό τετραγώνου, ενώ κατόπιν άλλαξαν το σχηματισμό τους σε ορθογώνιο, με αποτέλεσμα ο αριθμός των γραμμών τους να αυξηθεί κατά 5. Πόσοι μουσικοί συμμετείχαν στην μπάντα; (S. Dvoryaninov)



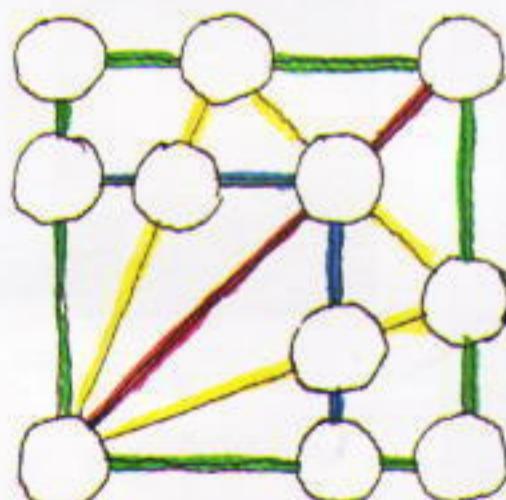
Σ12

Παντού εξήντα μοίρες. Ένα τρίγωνο ABC είναι εγγεγραμμένο σ' έναν ρόμβο που έχει την οξεία γωνία του ίση με 60° , δημοσιεύτηκε στο σχήμα. Μια από τις γωνίες του τριγώνου είναι επίσης 60° . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. (V. Proizvolov)



Σ13

Η Λογική συναντά τη Φυσική. Υπάρχουν τρεις λάμπες σε ένα δωμάτιο και τρεις διακόπτες σε ένα άλλο. Κάθε διακόπτης συνδέεται με τη δική του λάμπα. Πώς μπορείτε να βρείτε ποια λάμπα συνδέεται με κάθε διακόπτη, αν επιτρέπεται να μπείτε στο δωμάτιο με τις λάμπες μία μόνο φορά; (A. Zilberman)



Σ14

Μαγικό δίκτυο. Γράψτε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 11 στους κύκλους του σχήματος έτσι ώστε το άθροισμα των τριών αριθμών σε καθένα από τα δέκα ευθύγραμμα τρίμιτα να είναι το ίδιο. (M. Varga)



Σ15

Η Ιστορία συναντά την Αριθμητική. Το ύψος μιας αιγυπτιακής πυραμίδας (σε μέτρα) είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο δύο περιττών διφήφιων αριθμών, αλλά μικρότερο από το τετράγωνο του πημαθροίσματός τους. Για ποιον Φαραώ κατασκευάστηκε η εν λόγω πυραμίδα; (Θα χρειαστεί να βρείτε σε μια εγκυκλοπαίδεια τα ύψη των πυραμίδων.) (I. Akulich)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Μανιτάρια και αστρονομία ακτίνων X

«Το φεγγάρι βγήκε απ' το πέλαγο σαν Αφροδίτη· σκέπασε τ' άστρα του Τοξότη, τώρα πάει νά 'βρει την καρδιά του Σκορπιού, κι όλα τ' αλλάζει.»

Γιώργος Σεφέρης

Alexander Mitrofanov

Tο άρθρο που ακολουθεί αφιερώνεται σ' ένα μάλλον σύντιθες αλλά μεγάλης σπουδαιότητας γεγονός.

Πριν από τριάντα δύο χρόνια, στις 18 Ιουνίου 1962, ανακαλύφθηκε η πρώτη πηγή ακτίνων X πέρα από το πλιακό ούστημα. Επειδή η πηγή αυτή βρίσκεται στον αυτεριού του Σκορπιού, καταχωρίστηκε σύμφωνα με την ονομασία Σκορπός X-1.

Η ανακάλυψη έγινε τελείως απρό-ομενα, κατά τη διάρκεια ενός πειράματος στο Διάστημα από τους αμερικανούς επιστήμονες Bruno Rossi και George Clark του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασσαχουσέττης και των Ricardo Giacconi, F. Paolini και Herb Gursky τη εταιρείας American Science and Engineering Inc. Σκοπός του πειράματος ήταν να μελετηθεί ο φθορισμός της σεληνιακής επιφάνειας που προκαλείται από ταχέα σωματίδια προερχόμενα από το θερμό πλιακό στέμμα (πλιακός άνεμος), στη φασματική ζώνη των ακτίνων X (δηλαδή στην περιοχή μπρών κύματος 0,2 nm ως 0,8 nm). Οι γνωστές ως «μαλακές» ακτίνες X δεν είναι ανιχνεύσιμες στην επιφάνεια της Γης διότι απορροφούνται στην ατρόσφαιρά της. Τοποθετήθηκαν, λοιπόν, ανιχνευτικές διατάξεις σ' έναν πύραυλο τύπου Aerobee-150, ικανό να μεταφέρει επιστημονικό εξοπλισμό σε ύψος μεγαλύτερο των 200 km.

Την εποχή εκείνη θεωρούνταν απίθανο ότι υπάρχουν άλλες ανιχνεύσι-

μες ουράνιες πηγές ακτίνων X εκτός από τον Ήλιο και τη Σελήνη.¹

Πράγματι, οι αποστάσεις των άστρων, ακόμη και των κοντινότερων, είναι τόσο μεγάλες ώστε η κατά $1/R^2$ ελάττωση της ροής ακτίνων X από ένα άστρο σε απόσταση R εκμικρείζει όλες τις προσπάθειες ανιχνευσης της ακτινοβολίας X από άστρα όπως ο Ήλιος ή ακόμη θερμότερα και μεγαλύτερα.²

Οι εκτιμήσεις έδειχναν ότι η ροή ακτίνων X από θερμά άστρα δεν υπερέβαινε τα 10^{-5} φωτόνια/cm²·sec, μια πολύ αμυδρή ακτινοβολία ώστε να είναι ανιχνεύσιμη από τις πειραματικές διατάξεις της εποχής. Ωστόσο, το 1962, δύο από τους τρεις ανιχνευτές φωτονίων του πειράματος των ακτίνων X κατέγραψαν μια απότομη αύξηση στη ρυθμό μέτρησης φωτονίων.

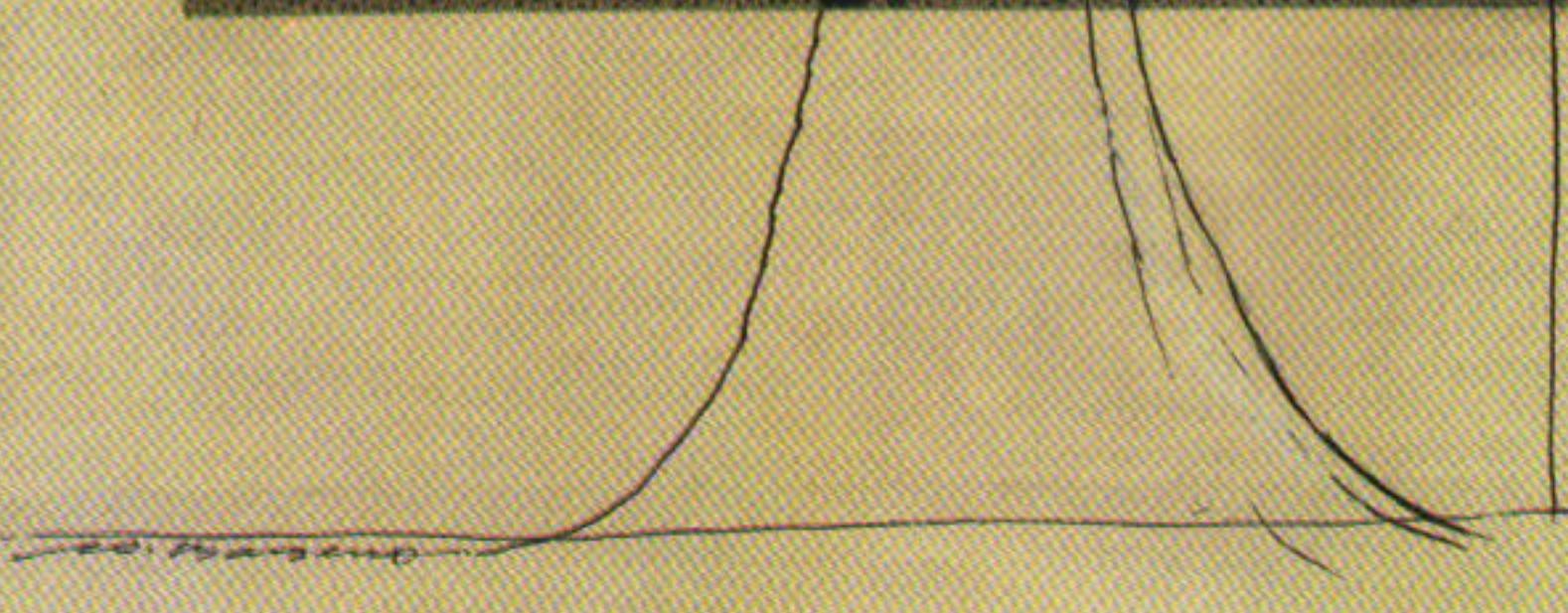
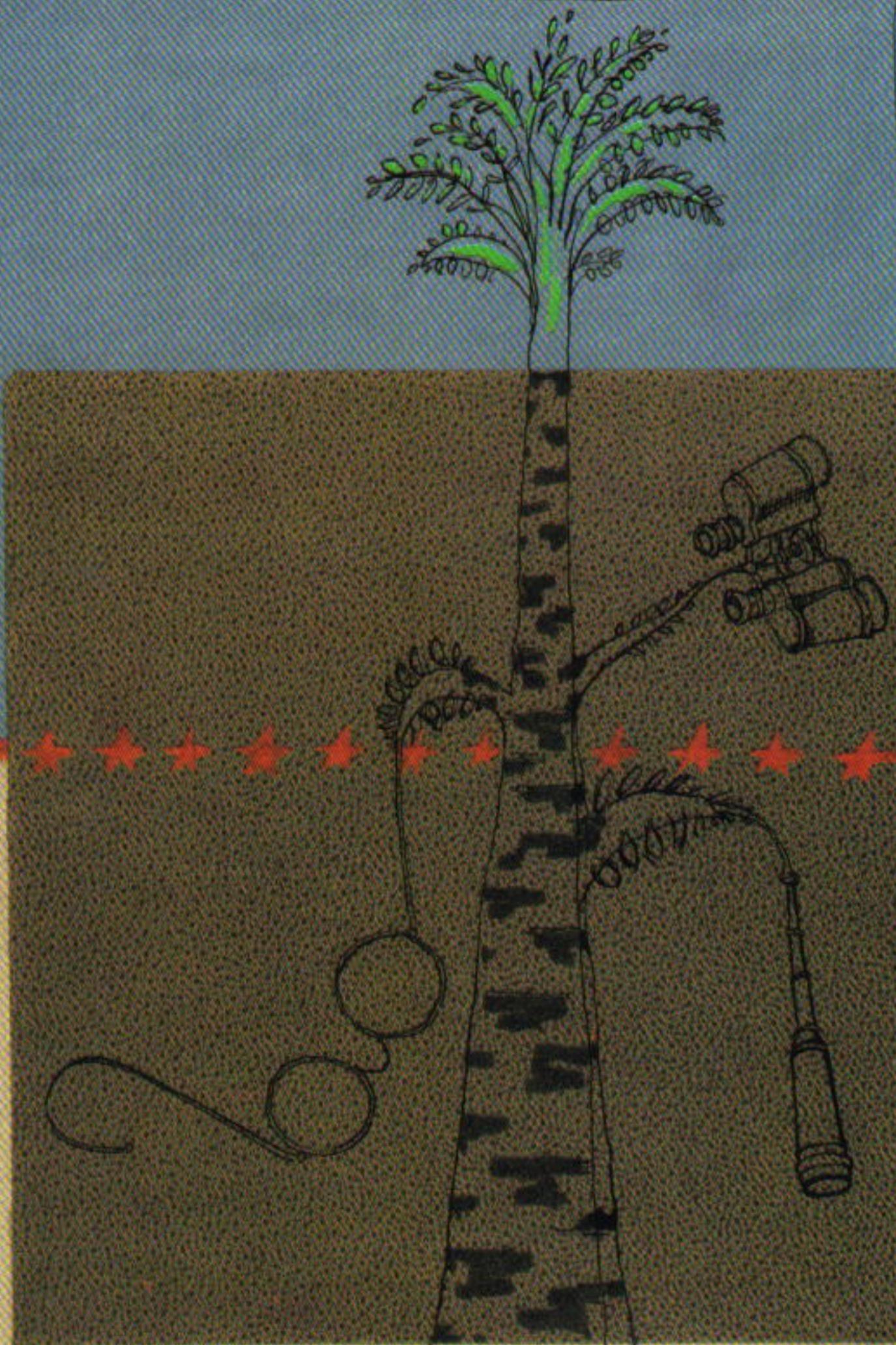
Σ' εκείνη την ιστορική πτήση, ο πύραυλος στρεψόταν γύρω από τον διαμήκη άξονά του και οι ενδείξεις των ανιχνευτών συσχετίζονταν με τη

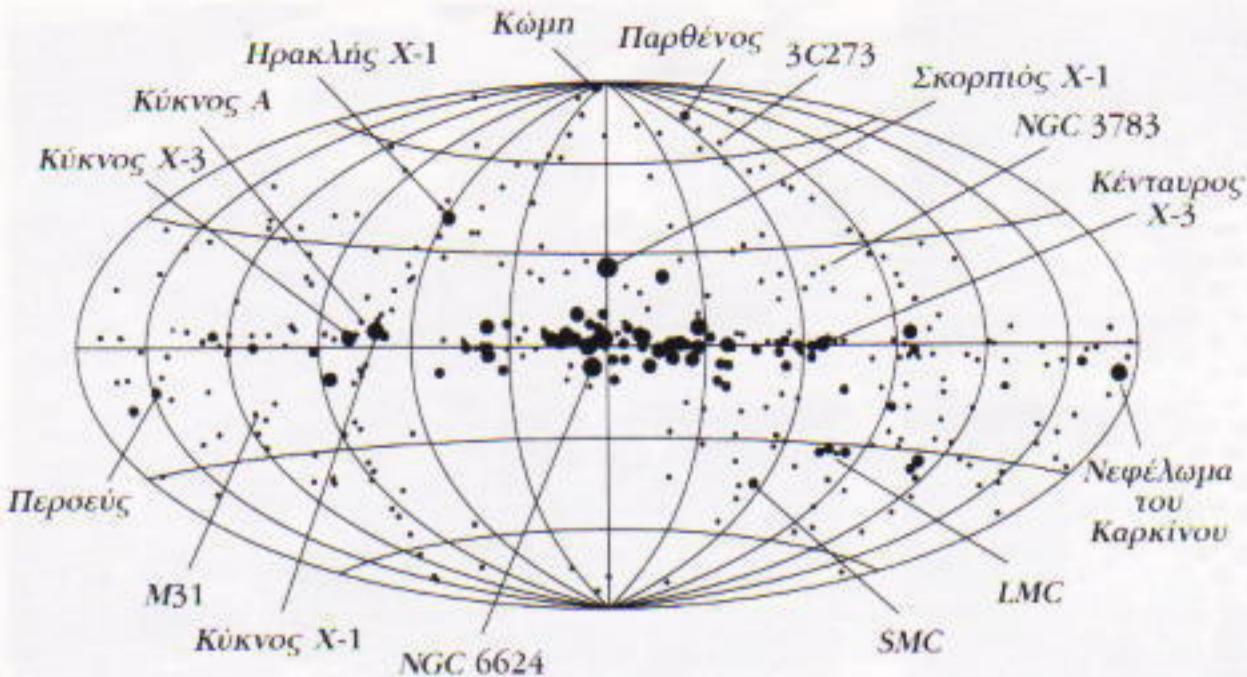
συγκεκριμένη περιοτροφή. Έτοι, παρά το ευρύ γνωστικό οπτικό πεδίο των ανιχνευτών, ήταν οιφές ότι η πηγή των ακτίνων X βρισκόταν κάπου κοντά στο κέντρο του Γαλαξία. Σ' αυτό το πείραμα δεν ήταν δυνατό να προσδιοριστεί ακριβώς η κατεύθυνση της πηγής, παρότι ούτε ο Ήλιος ούτε η Σελήνη φαινόταν να έχουν ονοιαδήποτε οχέον με την αύξηση του αριθμού των φωτονίων X. Επιπλέον, το πείραμα κατέδειξε ότι υπάρχει ένα συνεχές κοσμικό υπόβαθρο ακτινοβολίας X συγκριτικά μεγάλης λαμπρότητας.

Ενα χρόνο αργότερα εκτοξεύτηκε η νέα πύραυλος τύπου Aerobee, με νέο εξοπλισμό αυτήν τη φορά. Το γνωστικό οπτικό πεδίο των ανιχνευτών των ακτίνων X είχε τώρα μειωθεί με τη βοήθεια ενός κατευθυντήρα Roentgen, τα τοιχώματα του οποίου ήταν αδιαπέραστα από την ακτινοβολία X. Η πηγή που είχε ανακαλύφθη το 1962, ανακαλύφθηκε και πάλι! Αυτήν τη φορά, όμως, κατέστη δυνατό να προσδιοριστούν οι ουντεταγμένες της στην ουράνια οφαίρα. Σε μια άλλη περιοχή του ουρανού, στο Νειφέλωμα του Καρκίνου, βρέθηκε μια δεύτερη λαμπρή πηγή ακτίνων X (ο Ταύρος X-1). Δεν υπήρχε πλέον αριθμούς: ασυνήθιστα λαμπρές πηγές ακτίνων X βρίσκονται έξω από το πλιακό μας σύστημα (βλ. Σχήμα 1 και Εικόνα 1). Η ανακάλυψη αυτή προκάλεσε επανάσταση στις απόψεις μας

1. Η πλιακή ακτινοβολία X ανακαλύφθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1940 από αμερικανούς επιστήμονες. Στη γενονιά της γηνινής τροχιάς, η ροή των ακτίνων X από τον «ήρεμο» Ήλιο είναι περίπου 10^{-5} φωτόνια/cm²·sec. Κατά τη διάρκεια των πλιακών εκρήξεων η ροή υπερβαίνει κατά πολὺ αυτή την τιμή.

2. Η σύγχρονη τεχνολογία παρέχει τη δυνατότητα να καταγράψουν ακτίνες X από το σέριμο συνθητισμένων άστρων, όπως το Άλφα του Κενταύρου, ένα άστρο διοικού προς τον Ήλιο.





Σχήμα 1

Χάρτης του ουρανού στις ακτίνες X από δεδομένα του δορυφόρου Uhuru, που τον εκτόξευσε η ομάδα του Ricardo Giacconi στις 12 Δεκεμβρίου 1970. Το μέγεθος κάθε κύκλου αντιστοιχεί στη λαμπρότητα της πηγής. Η πηγή Σκορπιός X-1, που καταγράφτηκε από δορυφόρο το 1962, συγκαταλέγεται μεταξύ των πλέον λαμπρών στον ουρανό. Βρίσκεται στο κέντρο του χάρτη, κοντά στον γαλαξιακό ισημερινό. Στο πείραμα εκείνο χρησιμοποιήθηκαν απαριθμητές φωτονίων X με παραλληλεπίπεδους κατευθυντήρες γωνιακού οπτικού πεδίου $5 \times 5^\circ$ και $5 \times 0.5^\circ$.

για τη δομή του σύμπαντος, ενώ αποτέλεσε το ερέθισμα για να αναπτυχθεί μια νέα πειραματική επιστήμη: η αστρονομία ακτίνων X. Μπορείτε να διαβάσετε περισσότερα σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα σε εκλαϊκευτικά βιβλία αστρονομίας.

Επιστρέφοντας στα δικά μας, ας εγκαταλείψουμε τον ουρανό και την ανακάλυψη που μετέβαλε την αστροφυσική στον αιώνα μας και ας επανέλθουμε στη Γη, στον πειραματικό εξοπλισμό που επιτρέπει να γίνουν τέτοιες ανακαλύψεις. Ας ρίξουμε μια προσεκτικότερη ματιά σ' ένα από τα εργαλεία της οπτικής των ακτίνων X, που αποτελεί ένα από τα εξαρτήρατα των σύγχρονων τηλεσκοπίων

ακτίνων X ή γ (Εικόνα 2 και Σχήμα 2). Ο σχεδιασμός του είναι σχετικά απλός: αποτελείται από ένα σύστημα παράλληλων μεταλλικών πλακών, καλυμμάτων, σχιομάν και μικρών απαράλλακτων σωλήνων που έχουν σκοπό να ελαττώνουν το γωνιακό οπτικό πεδίο ενός ανιχνευτή φωτονίων. Τα τοιχώματα του κατευθυντήρα είναι συνήθως «μαύρα», δηλαδή αδιαφανή για μήκη κύματος στην υπό εξέταση φασματική περιοχή. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι αντικείμενα έξω από το οπτικό πεδίο καθώς και ο συνεχής θόρυβος υποβάθρου δεν θα εμποδίζουν την παρατήρηση πηγών σε μικρές γωνίες ως προς τον άξονα του τηλεσκοπίου.

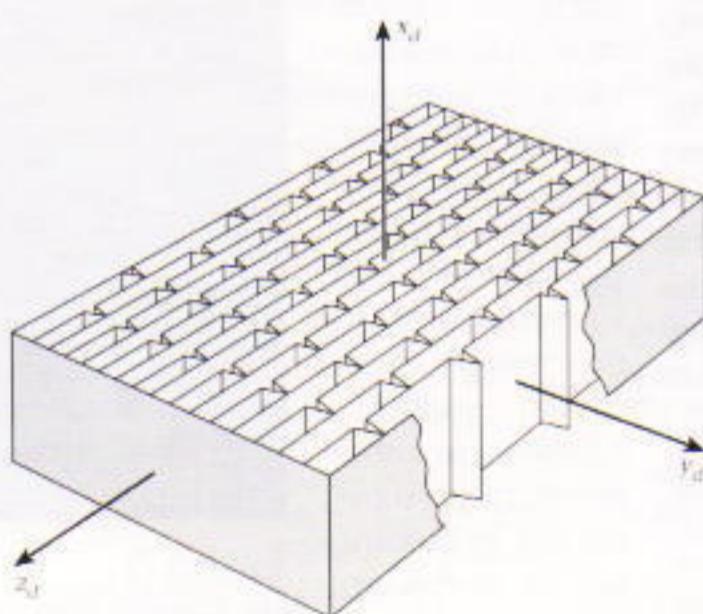


Εικόνα 1

Το σφαιρικό ορίνος NGC 6624, που περιέχει μια λαμπρή πηγή ακτίνων X (βλ. το χάρτη του Σχήματος 1).

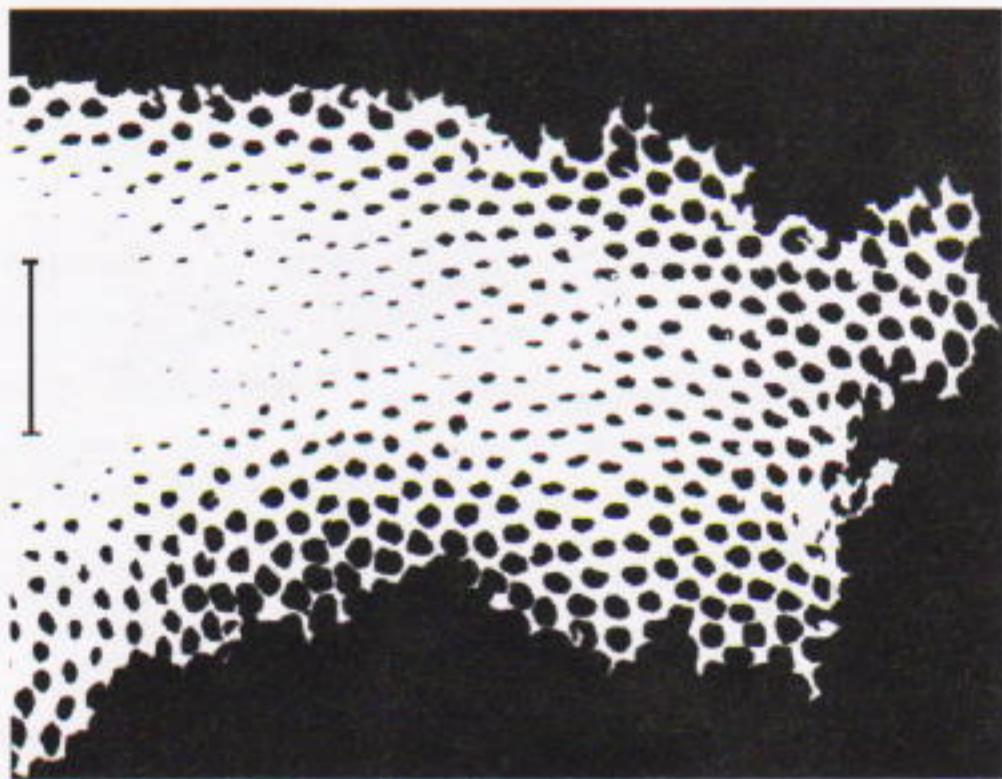
Τώρα, αν σας έλεγα ότι κιάλια ή άλλες οπτικές διατάξεις φυτρώνουν στο δάσος, φυσικά δεν θα με πιστεύατε. Εντούτοις, στο δάσος μπορείτε να βρείτε κάτι που χριάζει πολύ με μια συγκεκριμένη οπτική διάταξη: μία έναν κατευθυντήρα ακτίνων X. Σοβαρόλογά! Ένα μοντέλο αυτής της διάταξης, που μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε σχεδόν «ως έχει» σ' ένα πείραμα, φυτρώνει στις ομρύδες και οριομένα άλλα δέντρα. Πρόκειται για ένα πολυποροειδές (*Fomes fomentarius*) της οικογένειας των δενδρομυκήτων (*Polyporaceae*). (Τα πολυποροειδή βρίσκονται προκολλημένα σε ξηρές ομρύδες και οκλήθρα. Κάτω από ομρύδες που έχουν προσβληθεί από πολυποροειδή φυτρώνουν, εν ευθέτω χρόνω, άλλα είδη μανταριών, και ειδικότερα η αριθλαρία η μελιτοφόρος, «μυστικό» γνωστό σε πολλούς κυνηγούς μανταριών.)

Στην εξωτερική του εμφάνιση, καθώς και στην αφή, ο καρπός ενός πολυποροειδούς χριάζει πολύ με τον φυσικό φελλό. Ωστόσο, μια πιο προσεκτική εξέταση δείχνει ότι ο «φελλός» αυτός αποτελείται από έναν τεράστιο αριθμό κυλινδρικών πόρων, ο άξονας των οποίων είναι κάθετος στην κάτω οριζόντια επιφάνεια του πολυποροειδούς. Οι νηρατοειδείς πόροι εμπεριέχουν



Σχήμα 2

Παραλληλεπίπεδος κατευθυντήρας ακτίνων X, όπως εκτίνεται αποτελούμενος από μεταλλικούς τριγωνικούς σωλήνες.



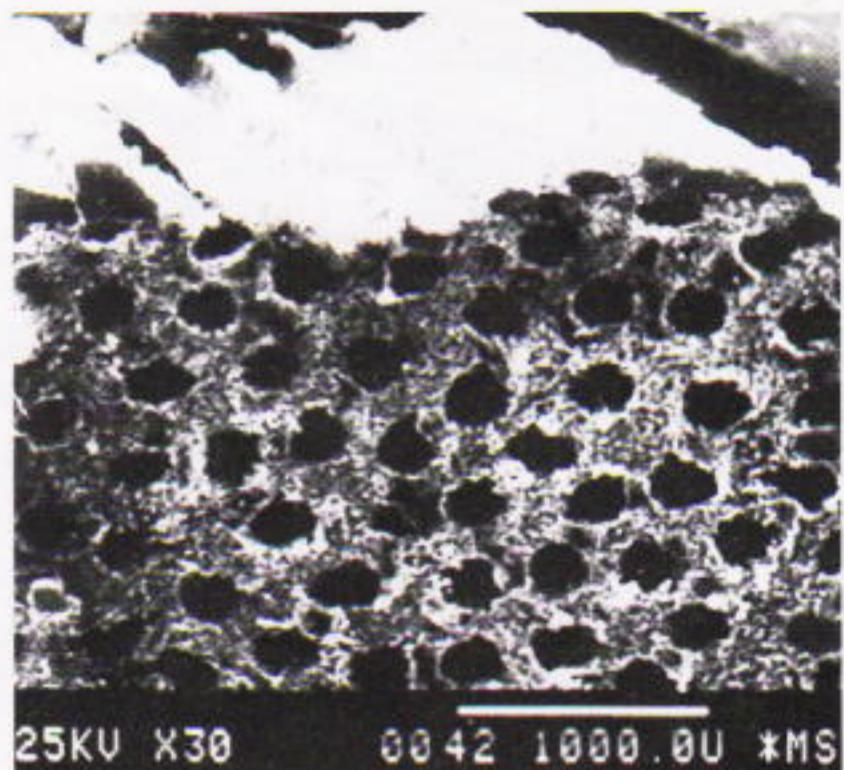
Εικόνα 3

Διατομή ενός στρώματος πολυποροειδούς.

τους οπόρους. Κάθε χρόνο, το πολυποροειδές αναπτύσσει ένα νέο πορώδες στρώμα και έτσι εξυγείται η διαστρεματική δομή του μανιταριού. Ο προσδιορισμός της πλικίας ενός μανιταριού είναι δυνατός μέσω του αριθμού των στρωμάτων. Για μας, έχει σημασία να τονίσουμε ότι σε ολόκληρη σχεδόν την επιφάνεια του πολυποροειδούς, οι πόροι δεν αναπτύσσονται σε τυχαίες θέσεις κάθε χρόνο, αλλά αποτελούν συνέχεια των πόρων των προηγούμενων ετών. Ετοι, όταν οι οπόροι απομακρυνθούν από τους νηματοειδείς πόρους, εμείς θα μπορούμε να δούμε μέσα από ένα συμπαγές στρώμα του πολυποροειδούς και τότε επειδή οι πόροι είναι διαμπερείς.³ Δεν νορίζετε ότι έχουμε να κάνουμε μέσα σε έναν κατευθυντήρα ακτίνων X;

Βρείτε ένα μεγάλο πολυποροειδές στο δάσος και κόψτε μερικά στρώματα διαφορετικού πάχους L . Με τα δείγματά σας μπορείτε να πραγματοποιήσετε διάφορα ενδιαφέροντα πειράματα. Κατ' αρχάς, πρέπει να τα αποξηράνετε διατηρώντας τα υπό πίεση, ώστε να αποφευχθεί το σκέβρωμά τους.

³ Αξίζει να αναφερθεί ότι οι κενοί πόροι των πολυποροειδών χρησιμεύουν κάποιες στις ανθρωπόπουλες με άλλον τρόπο. Προτού εφευρέθουν τα σπίρτα, τα πολυποροειδή χρησιμοποιούνταν για την παρασκευή φιτιλίου, που το άναθαν με σπιθάμη τρίβοντας ένα κομμάτι χάλυβα σε τουκιά κόπτεται.



Εικόνα 4

Η επιφάνεια ενός πολυποροειδούς στο πλεκτρονικό μικροσκόπιο.

Πείραμα 1. Ως πρώτο βήμα, ας βρούμε την πυκνότητα των πόρων, δηλαδή τον αριθμό των πόρων ανά μονάδα επιφανείας σ' ένα στρώμα του πολυποροειδούς. Κατόπιν θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε τη διάμετρο D των πόρων. Οι στόχοι αυτοί είναι μάλλον εύκολοι μ' ένα μικροσκόπιο, αλλά επιτυγχάνονται και χωρίς αυτό. Θα χρειαστούμε έναν συνθημένο μεγεθυντήρα φωτογραφιών ή έναν προβολέα ταινιών (ή και ένα επιδιασκόπιο). Με ένα κοπίδι ή ξυράφι κόψτε μια λεπτή φέτα από τον καρπό ενός πολυποροειδούς, κάθετα στους πόρους, δηλαδή παράλληλα προς την επιφάνεια της βάσης του μανιταριού. Στη συνέχεια τοποθετήστε τη φέτα στο μεγεθυντή και δημιουργήστε το μεγεθυομένο είδωλό της. Βεβαίως, αρκεί να σχεδιάσετε το περιγράμμα σ' ένα φύλλο χαρτιού. Απομένει να καθορίσετε τη μεγέθυνση της συσκευής και να μετρήσετε το πλήθος των πόρων στο είδωλο της λεπτής φέτας, κα-

θώς και τη διάμετρό τους. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 3 φαίνεται η προβολή της διατομής ενός πολυποροειδούς, όπου το μήκος σύγκρισης κλίμακας είναι 2 mm. Στην Εικόνα 4 φαίνεται το επιφανειακό στρώμα ενός πολυποροειδούς: η σύγκεκριμένη εικόνα όμως έχει παραχθεί μέσω μιας συνθετότερης συσκευής —ενός πλεκτρονικού μικροσκοπίου σάρωσης. Εδώ, το μήκος σύγκρισης κλίμακας είναι 1 mm. Από τις παραπάνω εικόνες συμπεραίνουμε ότι η μέση διάμετρος D των πόρων ισούται περί-



Εικόνα 5

Πυρακτωρένο νήμα βολφραμίου ενός λαμπτήρα φωτισμού, φωτογραφημένο μέσα από το πορώδες στρώμα ενός πολυποροειδούς, τοποθετημένου μπροστά από το φακό. Προσέξτε ότι το είδωλο είναι κάπως θολό, λόγω της περιθλαστικής του φωτός στους πόρους.



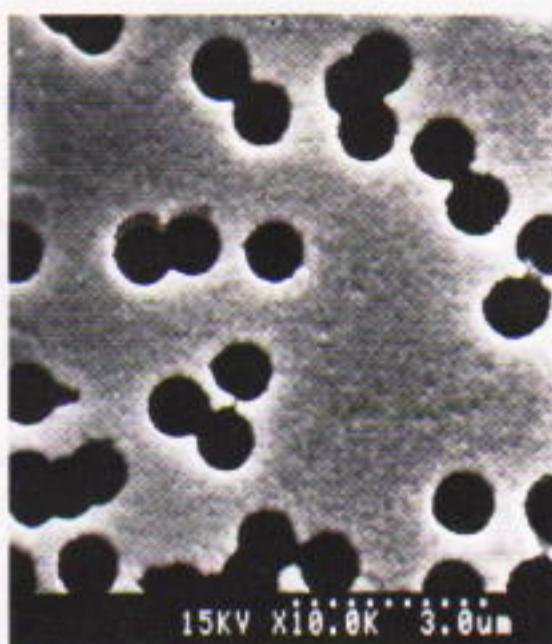
Εικόνα 6

Τμήμα της επιφάνειας ενός γυάλινου κατευθυντήρα πάνω στη λεγόμενη πλάκα μικροκαναλιών, στο πλεκτρονικό μικροσκόπιο. Η κύρια χρονιμότητα της πλάκας μικροκαναλιών στην αστρονομία ακτίνων X είναι η ενίσχυση του ειδώλου. Το σύστημα των κενών γυάλινων τριγωνιών μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εστίαση ακτίνων X (φακός Κυπακίου).

που με 1/3 mm. Η απόκλιση δεν είναι μεγάλη, αν και πρέπει να πούμε ότι το σχήμα των πόρων απέχει πολύ από το σχήμα ενός ιδανικού κυλίνδρου.

Προοπαθήστε να καταλάβετε γιατί χρησιμοποιήσαμε για τις μετρήσεις μας μια λεπτή φέτα μανιταριού και όχι ολόκληρο το στρώμα, παρότι το τελευταίο επιτρέπει τη διέλευση του φωτός (οι νηματοειδείς πόροι διασχίζουν ολόκληρο το μανιτάρι).

Πείραμα 2. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρούμε αντικείμενα μέσω ενός πολυπορειδούς στρώματος. Ανάψτε τη λάμπα του γραφείου σας, τοποθετήστε ένα στρώμα πολυπορειδούς στην πορεία της δέσμης του φωτός και παρατηρήστε το πυρακτωμένο νέρα μέσα από το πορώδες στρώμα ενός πολυπορειδούς.



Εικόνα 7

Πορώδης κατευθυντήρας πολυμερούς.

πείραμα αυτό χρειάζεται εξάσκηση στο να βρίσκετε τη σωστή διεύθυνση στρέφοντας το στρώμα κατά μικρές γωνίες. Οι νηματοειδείς πόροι είναι οτενοί, με αποτέλεσμα μια συγκριτικά μικρή γωνία παρατήρησης: $a_{\max} - D/L \ll 1$. Ακόμη και για ένα στρώμα πάχους μόλις 3 mm, η γωνία είναι περίπου 10° , ενώ για πάχος 3 cm γίνεται 1° . Στην Εικόνα 5 φαίνεται το νέρα Βολφραμίου ενός λαμπτήρα, φωτογραφημένο μέσα από το πορώδες στρώμα ενός πολυπορειδούς.

Αφού κάνετε και το δεύτερο πείραμα, θα συμπεράνετε πιθανότατα ότι η ανάκλαση του ορατού φωτός στα τοιχώματα των πόρων πάντα πολύ μικρή, σαν να πάντα χρωματισμένα μαύρα. Επιπλέον, θα διακρίνετε κάποια ασάφεια στο είδωλο του νέρατος, σχετιζόμενη με την περίθλαση του φωτός σε ανοίγματα μικρού πλάτους (όπως είναι οι πόροι). Στην περίπτωση της ακτινοβολίας X, η ομρασία αυτής της ασάφειας δεν είναι τόσο μεγάλη (για το εύρος τηρών που χρησιμοποιήθη-

καν στο πείραμα), επειδή το μήκος κύματος ενός φωτονίου X είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύρατος της ορατής ακτινοβολίας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης να βρούμε με ποιον τρόπο εξαρτώνται τα οπτικά χαρακτηριστικά ενός στρώματος πολυπορειδούς από τις παραμέτρους των νηματοειδών πόρων, δηλαδή από τη διάμετρο D και το μήκος τους L . Οι οπτικές ιδιότητες κάθε κατευθυντήρα (συμπεριλαμβανομένου ενός πολυπορειδούς στρώματος), χαρακτηρίζονται, πριν από όλα, από την εξάρτηση του συντελεστή διέλευσης T από τη γωνία α μεταξύ του άξονα του κατευθυντήρα και της διεύθυνσης μιας παράλληλης δέσμης. Ισχεύει στον πειρασμό να κάνετε ένα τρίτο πείραμα για να μετρήσετε τη συνάρτηση $T(a)$, ωστόσο προσπαθήστε καλύτερα να την προοδιορίσετε θεωρητικά (στόχος ιδιαίτερα ενδιαφέρων για τους ένθερρους οπαδούς των μαθηματικών). Εδώ θα δώσουμε απλώς το αποτέλεσμα: δείτε την εξίσωση (1), όπου T_0 ο μέγιστος συντελεστής διέλευσης του κατευθυντήρα (όταν $a = 0$). Οταν το γωνιακό οπτικό πεδίο του κατευθυντήρα είναι μικρό, δηλαδή όταν $a \ll 1$, ο τύπος (1) απλοποιείται αν λάβουμε υπόψη ότι τότε $\sin a \approx a$ και $\cos a \approx 1$ και εφαρμόζουμε την εξίσωση (2). Ο τύπος για το $T(a)$ δίνεται συνήθως σ' αυτήν τη μορφή για έναν κατευθυντήρα ακτίνων X ή για αποτελούμενο από απαράλλακτους τριγωνιδείς σωλήνες.

Θα μπορούσαμε να κλείσουμε εδώ την ιστορία μας, αλλά πρέπει να πούμε λίγα λόγια για τις τεχνικές λύσεις που έδωσαν οι αστρονόμοι στο πρόβλημα της κατευθυντικότητας των ροών ακτινοβολίας X. Οι Εικόνες 6 και 7 δείχνουν έναν γυάλινο μικροκατευθυντήρα με λεπτό στρώμα πολυμερούς υλικού, κατάλληλο για μαλακές ακτίνες X και ακτινοβολία απότερου υπεριώδους, με κυλινδρικούς πόρους τυχαία κατανανευμένους, διαμέτρου περίπου 1 μm (η οποία μπορεί να μειωθεί ακόμη περισσότερο). Ο κατευθυντήρας πολυμερούς έχει πάχος μόνο 10-20 μm. Οι πόροι στο στρώμα του πολυμερούς παράγονται μέσω ακτινοβόλησης του με βαρέα ιόντα σ' έναν επιταχυντή,

$$(1) T(a) = T_0 \frac{2 \sin a}{\pi} \left[\text{τοξηφ} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{D} \epsilon \varphi a \right)^2} - \frac{L}{D} \epsilon \varphi a \sqrt{1 - \left(\frac{L}{D} \epsilon \varphi a \right)^2} \right],$$

$$\text{όπου } -\text{τοξηφ} \frac{D}{L} \leq a \leq \text{τοξηφ} \frac{D}{L}.$$

$$(2) T(a) = T_0 \frac{2}{\pi} \left[\text{τοξουν} \left| \frac{a}{\theta} \right| - \left| \frac{a}{\theta} \right| \left(1 - \left(\frac{a}{\theta} \right)^2 \right)^{1/2} \right], \text{όπου } \theta = \frac{D}{L},$$

Διατάξεις Penrose και ημικρύσταλλοι

Ποια σχέση έχουν οι πλακοστρώσεις με τα κράματα υψηλής τεχνολογίας;

V. Koryepin

Aυτό το άρθρο είναι αιφνιερωμένο στα μαθηματικά των ημικρυστάλλων —ενός νέου είδους υλικού που ανακαλύφθηκε το 1984. Στην πραγματικότητα, πριν από τη «ψυσική» τους ανακάλυψη είχε προγνωθεί η δημιουργία εντυπωσιακών (και τελείως στοιχειωδών!) διοδιάστατων μαθηματικών μοντέλων των ημικρυσταλλικών δομών. Στην αρχή, αυτές οι κατασκευές, που ονομάστηκαν διατάξεις Penrose, είχαν αντιμετωπιστεί απλώς σαν κομψά παιχνίδια, ήδη όμως έχουν δημοσιευτεί εκατοντάδες ερευνητικά άρθρα για τη φυσική και τα μαθηματικά των ημικρυστάλλων. Το θέμα, επομένως, μας προσφέρει μια δυνατότητα που είναι ιδιαίτερα οπάνια στις μέρες μας: να πάρουμε μια ιδέα για έναν νέο, ραγδαία αναπτυσσόμενο κλάδο της σύγχρονης επιστήμης, μελετώντας ένα εξαιρετικά στοιχειώδες, σχεδόν φυχαγωγικό υλικό.

Θα εξετάσουμε, ένα είδος πλακοστρώσης στο επίπεδο. Πλακόστρωση είναι η κάλυψη ολόκληρου του επιπέδου με μη επικαλυπτόμενα σχήματα. Τα σχήματα που συνθέτουν την παράπλευρη διάταξη θα τα ονομάζουμε πλακίδια. Πιθανόν, το αρχικό ενδιαφέρον για τις πλακοστρώσεις πήγασε από την κατασκευή ψηφιδώτων, μωσαϊκών, κοσμημάτων και άλλων

διακομητικών οχεδίων. Πολλά κοσμήματα αποτελούνται από επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

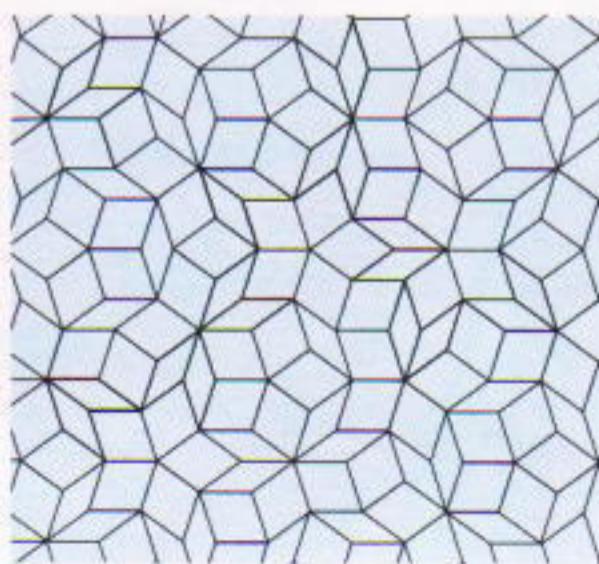
Στο Σχήμα 1 μπορείτε να δείτε μια από τις απλούστερες πλακοστρώσεις. Σ' αυτή την περίπτωση, το επίπεδο καλύπτεται από όριοι παραλληλόγραμμα. Οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο αυτής της πλακόστρωσης προκύπτει από το οκταομένο έπειτα από παράλληλη μετατόπιση κατά διάνυσμα $u + nv$ (όπου u και v είναι τα διανύσματα κατά μήκος των πλευρών του σκιασμένου παραλληλογράμμου, ενώ τα u και v είναι ακέραιοι). Πρέπει να επισημάνουμε ότι ολόκληρη η πλακόστρωση μεταφέρεται στον εαυτό της αν μετατοπιστεί παράλληλα κατά τα διανύσματα u ή v . Αυτή τη ομαντική ιδιότητα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό: μια πλακόστρωση ονομάζεται περιοδική με περιόδους u και v αν η παράλληλη μετατόπιση ως προς καθένα από αυτά

τα διανύσματα τη μεταφέρει στον εαυτό της. Οι περιοδικές πλακοστρώσεις μπορούν να είναι αρκετά περίπλοκες, και μερικές είναι πανέμορφες.¹

Ημιπεριοδικές πλακοστρώσεις στο επίπεδο

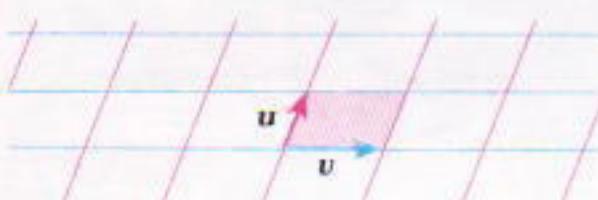
Υπάρχουν επίσης ενδιαφέρουσες πλακοστρώσεις στο επίπεδο που δεν είναι περιοδικές. Ο μαθηματικός Roger Penrose ανακάλυψε το 1974 τις λεγόμενες ημιπεριοδικές πλακοστρώσεις. Οι ιδιότητές τους αποτελούν φυσική γενίκευση των ιδιοτήτων των περιοδικών πλακοστρώσεων.

Ένα παράδειγμα παρόμοιας πλακόστρωσης βλέπετε στο Σχήμα 2. Το επίπεδο καλύπτεται πλήρως, χωρίς κενά και επικαλύψεις, από δύο είδη ρόμβων. Υπάρχουν πλατείς ρόμβοι, με γωνίες 72° και 108° , και στενοί ρόμβοι, με γωνίες 36° και 144° (Σχήμα 3). Υποθέτουμε, φυσικά, ότι τα μήκη των πλευρών των δύο ρόμβων είναι ίσα. Αυτή η πλακόστρωση δεν είναι περιοδική —μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει παράλληλη μετατόπιση που τη μεταφέρει στον εαυτό της. Έχει, όμως, μια άλλη σημαντική ιδιότητα που την κάνει παρόμοια με τις περιοδικές πλακοστρώσεις και δικαιολογεί την ονομασία ημιπεριοδική: κάθε πεπερασμένο τμήμα της εμφανίζεται σ' αυτήν άπειρες φορές. Κάθε μη περιοδική πλακόστρωση με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται πρηπεριοδική.



Σχήμα 2

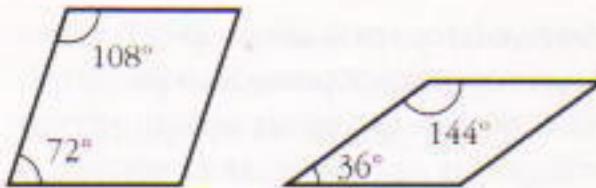
Παράδειγμα ημιπεριοδικής πλακόστρωσης Penrose που αποτελείται από δύο είδη ρόμβων.



Σχήμα 1

1. Μπορείτε να δείτε ελκυστικές περιοδικές πλακοστρώσεις στα έργα του M.C. Escher.





Σχήμα 3
Πλατείς και στενοί ρόμβοι.

Έχει ενδιαφέρον το ότι ο πλακόστρωση του Σχήματος 2 μπορεί να μεταφερθεί στον εαυτό της μέσω περιστροφής 72° γύρω από συγκεκριμένο οπμείο. Οι περιοδικές πλακοστρώσεις δεν παρουσιάζουν ποτέ αυτή την πενταπλή ($72^\circ \times 5 = 360^\circ$) περιστροφική συμμετρία.

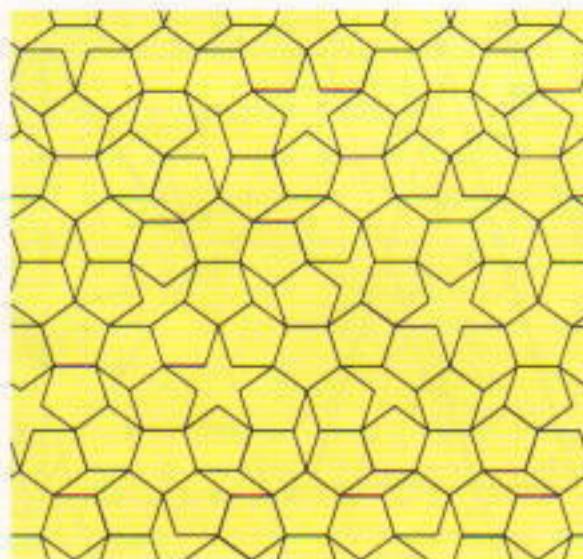
Στο Σχήμα 4 βλέπουμε μία ακόμη πιμπεριοδική πλακόστρωση που κατασκεύασε ο Penrose. Εδώ, το επίπεδο καλύπτεται με τέσσερα είδη πολυγώνων: άστρο, ρόμβο, κανονικό πεντάγωνο, και επτάγωνο με σχήμα χάρτινης Βαρκούλας. Στο Σχήμα 5 βλέπετε το γνωστότερο παράδειγμα πιμπεριοδικής πλακόστρωσης. Σ' αυτήν, ο Penrose κατάφερε να καλύψει το επίπεδο με δύο είδη κοτόπουλων.

Επέκταση και σύμπτυξη

Καθεμία από τις τρεις πιμπεριοδικές πλακοστρώσεις που περιγράφαμε παραπάνω, αποτελεί κάλυψη του επιπέδου μέσω παράλληλων μεταπίσεων και περιστροφών ενός πεπερασμένου πλήθους πλακιδίων. Δεν υπάρχει καμία παράλληλη μετατόπιση που να τις μεταφέρει στον εαυτό τους, αλλά κάθε πεπερασμένο τμήμα τους εμφανίζεται άπειρες φορές στην κάλυψη του επιπέδου, και μάλιστα «εξίσου συχνά».

Μπορούμε να εκτελέσουμε μερικές ειδικές πράξεις σ' αυτές τις πλακοστρώσεις. Ο Penrose τις ονόμασε επέκταση και σύμπτυξη. Θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τη δομή των καλύψεων που έχουμε περιγράψει και, επιπλέον, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργηθούν διατάξεις Penrose.

Τον ευκολότερο ίσως τρόπο για να κατανοήσουμε την πράξη της επέκτασης μας προσφέρουν τα λεγόμενα τρίγωνα του Robinson. Πρόκειται για τα δύο ισοσκελή τρίγωνα P και Q του Σχήματος 6, με γωνίες 36° , 72° , 72° , και 108° , 36° , 36° , αντίστοιχα, τα οποία είναι τέτοια ώστε οι δύο ίσες πλευρές του Q να έχουν το



Σχήμα 4
Ημιπεριοδική πλακόστρωση με τέσσερα είδη πολυγώνων.

ίδιο μήκος με τη βάση του P —ας πούμε ότι το μήκος τους ισούται με τη μονάδα.

Πρόβλημα 1. Με τη βοήθεια του Σχήματος 7, αποδείξτε ότι οι ίσες πλευρές του P και τη βάση του Q έχουν επίσης το ίδιο μήκος —και ουγκεκριμένα, ότι το μήκος αυτό είναι ίσο με ϕ , όπου ϕ είναι η περιφρύνηση της χρυσής τομής $(1 + \sqrt{5})/2$ (η θετική ρίζα της εξίσωσης $\phi^2 = \phi + 1$).

Οπως βλέπουμε στο Σχήμα 7, τα τρίγωνα P και Q μπορούν να χωριστούν σε μικρότερα τρίγωνα όμοια με τα αρχικά με λόγο ομοιότητας $1/\phi$. Το ευθύγραμμό τμήμα AC στο τρίγωνο P διχοτομεί τη γωνία DAB , και το CE σχηματίζει το ισοσκελές τρίγωνο CED ($\angle ECD = \angle EDC$). Το «τρίγωνο τύπου Q » FHI μπορεί να χωριστεί σε δύο «τμήματα Robinson» από το τμήμα IG , έτοιμο $HG = HI$.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε, στο Σχήμα 7, ότι αν $AB = IF = 1$, τότε τα ABC , ACE , και IGH είναι ίσα τρίγωνα όμοια με το τρίγωνο P , και ότι τα ECD και GIF είναι ίσα τρίγωνα όμοια με το Q .

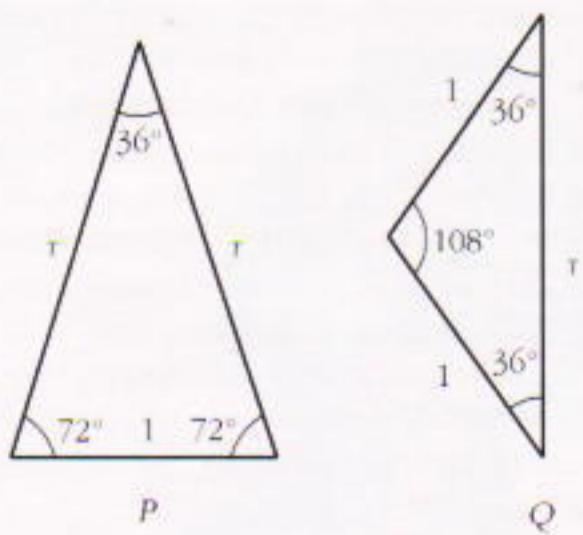
Επορένως, έχουμε χωρίσει τα δύο αρχικά

τρίγωνα σε τρία ίσα τρίγωνα του τύπου P και δύο ίσα τρίγωνα του τύπου Q . Συγκρίνοντας τα Σχήματα 6 και 7, βλέπουμε ότι οι διαστάσεις των νέων τριγώνων είναι μικρότερες από τις διαστάσεις των αρχικών κατά έναν παράγοντα $1/\phi$. Ο συγκεκριμένος τρόπος χωρισμού των τριγώνων ονομάζεται σύμπτυξη. Η αντίστροφη πράξη, δηλαδή η συνένωση τριγώνων P και Q έτσι ώστε να σχηματιστούν μεγαλύτερα τρίγωνα της ίδιας μορφής, ονομάζεται επέκταση. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 7, είναι δυνατό να συνδυάσουμε δύο τρίγωνα τύπου P με ένα τρίγωνο τύπου Q και να σχηματίσουμε ένα τρίγωνο τύπου P , ενώ αν συνδυάσουμε ένα ζεύγος τριγώνων, ένα από κάθε τύπο, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα μεγαλύτερο τρίγωνο τύπου Q . Οι διαστάσεις των νέων τριγώνων είναι ϕ φορές μεγαλύτερες από τις διαστάσεις των αρχικών τριγώνων.

Είναι φανερό ότι μπορούμε να επαναλάβουμε την πράξη της επέκτασης και να δημιουργήσουμε ένα ζεύγος



Σχήμα 5



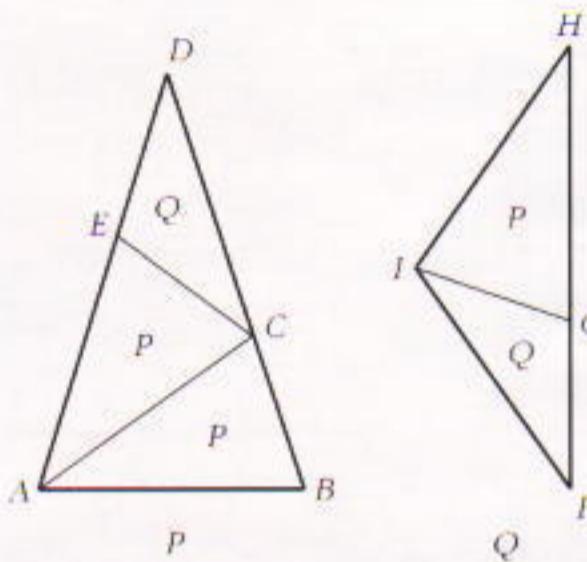
Σχήμα 6

τριγώνων με διαστάσεις ϕ^2 φορές μεγαλύτερες των αρχικών. Και, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία όσες φορές είναι απαραίτητο, μπορούμε να δημιουργήσουμε οσοδόποτε μεγάλα τρίγωνα Robinson επιθυμούμε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ξεκινάμε μ' ένα τρίγωνο τύπου P , και ότι το επεκτείνουμε προσθέτοντας ένα ισοτρίγωνο τύπου P και το αντίστοιχο τρίγωνο τύπου Q . Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τις επεκτάσεις παίρνοντας όλο και μεγαλύτερα τρίγωνα P (δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 8). Είναι φανερό ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως τα νέα τρίγωνα που προστίθενται σε κάθε βήμα αυτής της διαδικασίας χωρίζονται σε τρίγωνα τύπου P και Q , που είναι ίσα με τα αρχικά. Επομένως, καταλήγουμε με όλο και μεγαλύτερα τμήματα του επιπέδου καλυμμένα με τα αρχικά τρίγωνα Robinson. Αργά ή γρήγορα, κάθε τμήμα του επιπέδου θα καλυφθεί από τη διευρυνόμενη περιοχή τελικά, π διαδικασία αυτή ορίζει μια πλακόστρωση που καλύπτει όλο το επίπεδο με τρίγωνα Robinson. Αυτό μπορεί να συγκριθεί με μια διαδικασία κρυστάλλωσης σε δύο διαστάσεις, με τη διαφορά ότι —όπως θα δούμε σύντομα— μοιάζει περισσότερο με «μηκρυστάλλωση».

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια περιγραφή της απόδειξης ότι αυτή η αλυσίδα επαναλαμβανόμενων επεκτάσεων μπορεί να οργανωθεί έτσι ώστε να πετύχουμε μια μη περιοδική πλακόστρωση.

Ας θεωρήσουμε το όριο r του λόγου του πλήθους των τριγώνων τύπου P προς το πλήθος των τριγώνων τύπου Q σε μια τυχαία πλακόστρωση που



Σχήμα 7

καλύπτει όλο το επίπεδο με αυτά τα δύο είδη τριγώνων. Με άλλα λόγια, οχεδιάζουμε έναν μεγάλο κύκλο ακτίνας R και μετράμε το πλήθος p_R και q_R των τριγώνων τύπου P και Q που περιέχονται στον κύκλο. Τότε, το r είναι το όριο του λόγου p_R/q_R όταν το R τείνει στο άπειρο:

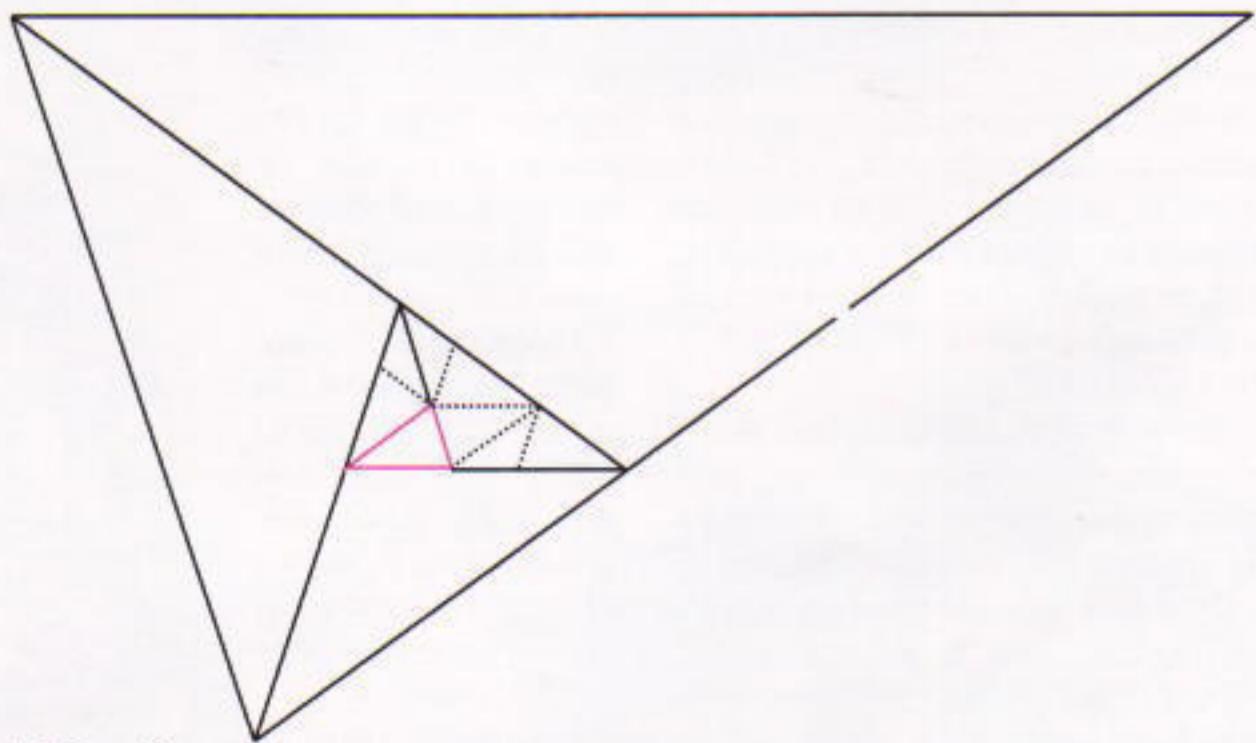
$$r = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{p_R}{q_R}.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε περιοδική πλακόστρωση που χρησιμοποιεί τα τρίγωνα P και Q , ο αριθμός r είναι ρητός. Υποθέτουμε ότι μια πλακόστρωση έχει περιόδους \mathbf{u} και \mathbf{v} . Σχεδιάζουμε ένα πλέγμα παραλληλόγραμμων με πλευρές \mathbf{u} και \mathbf{v} (Σχήμα 9), διαλέγουμε (και γραμμοσκιάζουμε) ένα από αυτά, και συρβολίζουμε με r το πλήθος των τριγώνων τύπου P που έχουν την κάτω τους κορυφή (σε σχέση με το πλέγμα) στο σκιασμένο παραλληλόγραμμο. Άν ένα τρίγωνο έχει οριζόντια

βάση, κοιτάμε την κάτω αριστερή κορυφή του.) Κάνουμε το ίδιο με τα τρίγωνα τύπου Q για να ορίσουμε τον αντίστοιχο αριθμό q . Η ένωση δώνων αυτών των $p + q$ τριγώνων είναι, όπως λέγεται, μια θεμελιώδης περιοχή της περιοδικής πλακόστρωσης —ένα πολύγωνο που αποτελείται από πλακίδια των οποίων οι παράλληλες μεταποπίσεις κατά τα διανύσματα $n\mathbf{u} + m\mathbf{v}$ (n, m ακέραιοι) καλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο χωρίς επικαλύψεις. Τότε θα έχουμε

$$r = \frac{p}{q}.$$

Πραγματικά, έστω N_R το πλήθος των παραλληλογράμμων του πλέγματος που βρίσκονται τελείως μέσα στον κύκλο. Τότε, το p_R είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πλήθος των τριγώνων που έχουν την κάτω (αριστερή) κορυφή τους σε αυτά τα παραλληλόγραμμα —δηλαδή $p_R \approx pN_R$. Το σφάλμα σ' αυτή την προσέγγιση οφείλεται στα τρίγωνα που τα αντίστοιχά τους παραλληλόγραμμα βγαίνουν έξω από τον κύκλο και στα τρίγωνα που ναι μεν δεν ανήκουν τα ίδια στον κύκλο, ανήκουν όμως τα παραλληλόγραμμά τους. Όλα αυτά τα τρίγωνα βρίσκονται στο διάστημα μεταξύ των κύκλων ακτίνας $R - d$ και $R + d$ (για κάποιο σταθερό d). Επομένως, το πλήθος τους δεν είναι μεγαλύτερο από το πλήθος του εμβαδού $\pi[(R + d)^2 + (R - d)^2] = 2\pi dR$ του διάστημα προς το εμβαδόν του τριγώνου P . Άρα, το πλήθος τους είναι ανάλογο

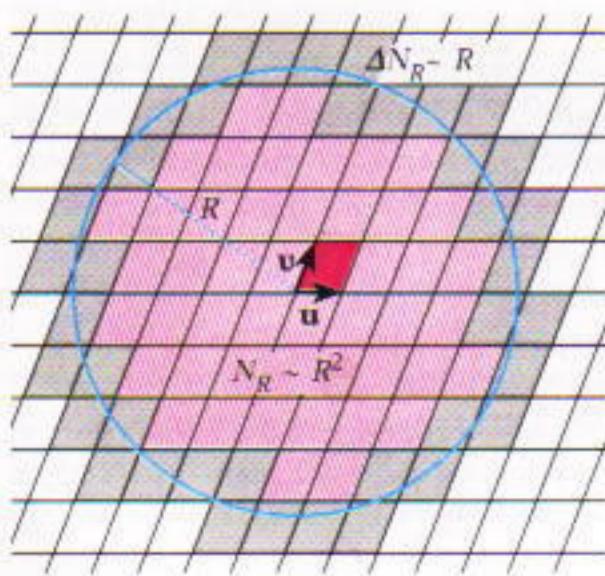


Σχήμα 8

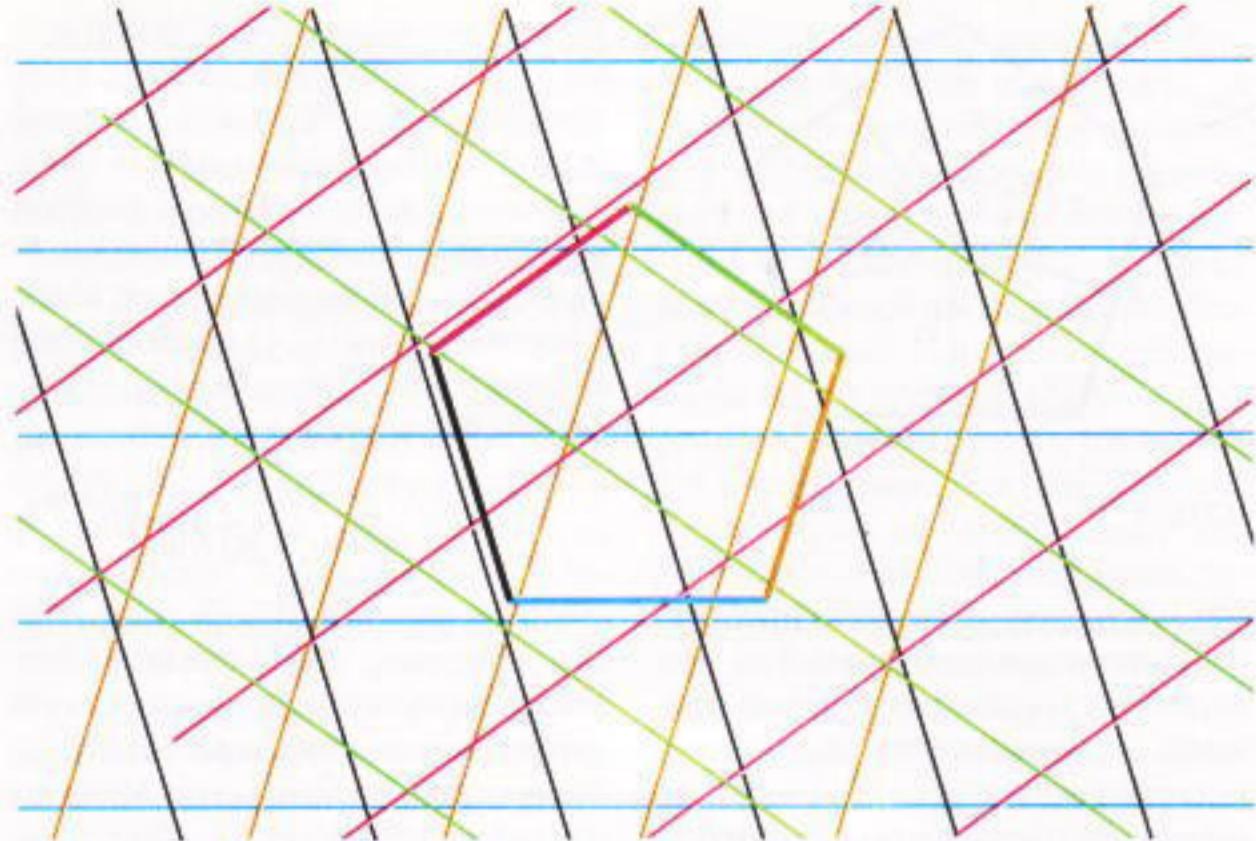
Επεκτάσεις με τρίγωνα τύπου P μπορούν να καλύψουν το επίπεδο.

με το R ενώ το N_R είναι ανάλογο του R^2 . Οροίως, $q_R \equiv qN_R$ και το οφάλμα της προσέγγισης είναι και πάλι αμελητέο συγκριτικά με το N_R . Συνεπάγεται ότι το όριο του πιλίκου του πλήθους των τριγώνων τύπου P προς το πλήθος των τριγώνων τύπου Q όταν το R τείνει στο άπειρο, ισούται με την τιμή που έχει αυτό το πιλίκο στη θεμελιώδη περιοχή —διπλαδή, p/q . Έτσι συμπεραίνουμε ότι για κάθε περιοδική πλακόστρωση το r είναι ρητός.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι για την πλακόστρωσή μας το r είναι άρρητος, και επομένως είναι μη περιοδική. Φανταστείτε ότι συμπτύσουμε την πλακόστρωσή μας. Δεν είναι δύοκολο να διαπιστώσουμε ότι η αρχική θεμελιώδης περιοχή θα περιέχει $p' = 2p + q$ μικρότερα τρίγωνα τύπου P και $q' = p + q$ μικρότερα τρίγωνα τύπου Q . Με λίγη σκέψη βλέπουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς να ζημιώθει η γενικότητα, πως η θέση κάθε τριγώνου (πλην του πρώτου) στην ακολουθία των επεκτεινόμενων τριγώνων που χρησιμοποιήσαμε για να κατασκευάσουμε την πλακόστρωση, είναι η ίδια με του προηγούμενου. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τρίγωνο σ αυτή την ακολουθία, όπως ακριβώς και το πρώτο τρίγωνο, δημιουργεί την πλακόστρωση μέσω των αντιγράφων του και των αντιγράφων του αντίστοιχου τριγώνου τύπου Q , και ότι αυτή η πλακόστρωση επαναλαμβάνει την αρχική, με μοναδική διαφορά ότι είναι μεγεθυνμένη κατά έναν σταθερό παράγοντα. Επομένως, το όριο του πιλίκου των τριγώνων τύπου P και Q



Σχήμα 9



Σχήμα 10

οπον επεκτεταμένη πλακόστρωση είναι το ίδιο με το αντίστοιχο όριο στην αρχική πλακόστρωση. Και το ίδιο, ψυσικά, ισχύει για τη συνεπιτυγμένη διάταξη. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} = \frac{2p+q}{p+q} = 1 + \frac{p/q}{p/q + 1}$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς p/q , παίρνουμε $p/q = \phi = (\sqrt{5} + 1)/2$ — αντίφαση, αφού αυτός ο αριθμός είναι άρρητος. Επομένως, η πλακόστρωσή μας δεν μπορεί να είναι περιοδική.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι κάθε πλακόστρωση που δημιουργείται από επαναλαμβανόμενες επεκτάσεις περιέχει άπειρα αντίγραφα οποιουδήποτε πεπερασμένου τριγρατός της. Αυτό, μαζί με τη μη περιοδικότητα που ήδη αποδείχαμε, μας δείχνει ότι η πλακόστρωση είναι πημετριδική.

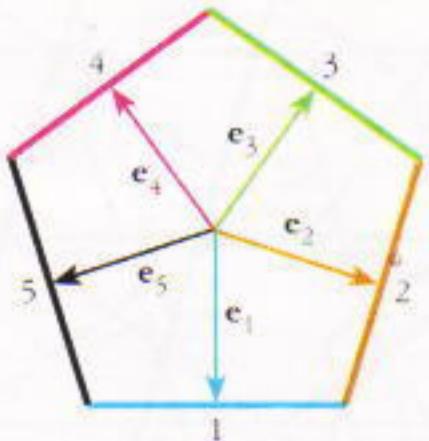
Η πλακόστρωση που χρησιμοποιεί τρίγωνα Robinson δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν άπειρες παρόμοιες πλακοστρώσεις. Χονδρικά, αυτό συμβαίνει επειδή η σύμπτυξη του τριγώνου ABD στο Σχήμα 7 θα μπορούσε να γίνει αν σχεδιάζαμε τη διχοτόμιο από την κορυφή B και όχι από την A . Χρησιμοποιώντας αυτή την ελεύθερια επιλογής, μπορούμε να μετατρέψουμε την τριγωνική πλακόστρωση στη ρομβική του Σχήματος 2. Επίσης, και η πλακόστρωση με τα κοτόπουλα δημιουργείται από τρίγωνα Ro-

binson.

Διϊσμός

Η μέθοδος δημιουργίας πλακόστρωσεων που περιγράφαμε παραπάνω δεν προέκυψε τυχαία. Υπάρχει μια ουσιαστική μέθοδος κατασκευής πημετριδικών καλύψεων. Βασίζεται στον λεγόμενο δυϊκό μετασχηματισμό που εισήγαγε ο ολλανδός μαθηματικός de Bruijn.

Ας παρουσιάσουμε την ιδέα του μέσα από το παράδειγμα κάλυψης του επιπέδου με ρόμβους (δείτε το Σχήμα 2). Ξεκινάμε σχεδιάζοντας ένα πλέγμα (θα το συμβολίζουμε με G) αποτελούμενο από πέντε σύνολα ευθειών. Οι ευθείες του κάθε συνόλου είναι παράλληλες προς μία από τις πλευρές ενός δεδομένου κανονικού πενταγώνου. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικές ευθείες ενός συνόλου είναι ίση με τη μονάδα (Σχήμα 10). Ο μοναδικός περιορισμός που υπάρχει για τις θέσεις των ευθειών των πέντε συνόλων είναι ότι δεν επιτρέπεται να διέρχονται τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο (είναι δυνατό να αποδείξουμε ότι μπορούμε πραγματικά να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο πλέγμα). Οι ευθείες του πλέγματος G χωρίζουν το επίπεδο σε άπειρο πλήθος πολυγώνων που ονομάζονται έδρες του πλέγματος. Οι πλευρές και οι κορυφές αυτών των πολυγώνων ονομάζονται, αντίστοιχα, ακμές και κόρβοι



Σχήμα 11

του πλέγματος. [Παρόμοια ορολογία θα χρησιμοποιήσουμε για την πρι-
περιοδική πλακόστρωση T που πρό-
κειται να κατασκευάσουμε: οι έδρες,
οι ακρές και οι κόρβοι της είναι, αντί-
στοιχα, τα πλακίδια (οι ρόμβοι), οι
πλευρές τους και οι κορυφές τους.]

Ας εκτελέσουμε τώρα τον δυϊκό μετασχηματισμό. Αυτός συνδέει τις έδρες, τις ακρές και τους κόρβους του πλέγματος G με τους κόρβους, τις ακρές και τις έδρες της πλακόστρωσης T σύμφωνα με τον κανόνα που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Ας αντιτοιχίσουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 στις πλευρές του κανονικού πενταγώνου που χρησιμοποιήσαμε στην κατασκευή του πλέγματος (Σχήμα 11) και στα αντίστοιχα σύνολα παράλληλων ευθειών. Συμβολίζουμε τα διανύομα που φέρουμε από το κέντρο του πενταγώνου προς τα μέσα των πλευρών του με τους αντίστοιχους αριθμούς με \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , \mathbf{e}_4 , \mathbf{e}_5 . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτά τα διανύομα είναι μοναδιαία. Αντιτοιχίζουμε κατόπιν τους αριθμούς 0, ± 1 , ± 2 , ... στις ευθείες του κάθε συνόλου, έτσι ώστε οι αριθμοί να αυξάνονται στην κατεύθυνση των διανυομάτων \mathbf{e}_i (αρχίζοντας από το αρχικό πεντάγωνο). Ετοι, μπορούμε να συμβολίσουμε κάθε ευθεία ως $I(n)$, όπου i είναι ο αριθμός του συνόλου στο οποίο ανήκει, και n ο αριθμός της μέσα σ' αυτό το σύνολο.

Στη συνέχεια συνδέουμε την κάθε έδρα F του πλέγματος G μ' ένα σύνολο πέντε αριθμών $n_1(F)$, $n_2(F)$, ..., $n_5(F)$, όπου $n_i(F)$ ισούται με n όταν η έδρα F βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $I(n)$ και $I(n+1)$ του i -οστού συνόλου (με $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Αυτοί οι αριθμοί ορίζονται μονοσήμαντα για κάθε έδρα, επειδή η έδρα F περιέ-

χεται σε μία ακριβώς λωρίδα που ορίζουν δύο διαδοχικές ευθείες ενός συνόλου (και αυτό ισχύει για καθένα από τα πέντε σύνολα ευθειών). Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη θέση του κόρβου $N = N(F)$ της πλακόστρωσης που είναι «δυϊκός» της έδρας F του πλέγματος G . Ο κόρβος αυτός είναι το σημείο που το διάνυμα θέσεώς του δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{v}(F) = n_1(F)\mathbf{e}_1 + n_2(F)\mathbf{e}_2 + n_3(F)\mathbf{e}_3 + n_4(F)\mathbf{e}_4 + n_5(F)\mathbf{e}_5.$$

Για να κατασκευάσουμε τους κόρβους της νέας πλακόστρωσης, διαλέγουμε ένα σταθερό σημείο O που χρησιμοποιούμε ως άκρο αυτών των εφαρμοστών διανυομάτων. Με αυτό τον τρόπο, κάθε έδρα του G αντιτοιχίζεται σε έναν κόρβο της πλακόστρωσης T . Για να οχηματίσουμε την πλακόστρωση, πρέπει να συνδεθούν κάποιοι κόρβοι μέσω ακρών — αυτές θα είναι οι πλευρές των ροβτικών πλακίδιων. Ο κανόνας που ακολουθούμε για τις συνδέσεις είναι απλός: οι κόρβοι $N_1 = N(F_1)$ και $N_2 = N(F_2)$ θα συνδεθούν με ακρή της πλακόστρωσης αν και μόνο αν οι αντίστοιχες έδρες F_1 και F_2 του πλέγματος G έχουν κοινή ακρή. Επομένως, κάθε ακρή του G συσχετίζεται με μια ακρή της T .

Τέλος, θεωρήστε έναν τυχαίο κόρβο A του πλέγματος G . Αυτός είναι πάντοτε η τομή δύο ακριβώς ευθειών του πλέγματος, και επομένως είναι κορυφή τεσσάρων ακριβώς εδρών του πλέγματος, των F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , που βρίσκονται γύρω από το A . Άρα, οι αντίστοιχοι κόρβοι N_1 , N_2 , N_3 , N_4 της πλακόστρωσης θα συνδεθούν με αυτήν ακριβώς τη σειρά και θα σχηματίσουν το τετράπλευρο $N_1N_2N_3N_4$. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε (δείτε το πρόβλημα 1 του υστερογράφου) ότι κάθε ακρή της πλακόστρωσης T έχει μοναδιαίο μήκος και ότι είναι παράλληλη προς ένα από τα διανύομα \mathbf{e}_i . Αυτό οφείλεται ότι το $N_1N_2N_3N_4$ είναι ένας ρόμβος, όμοιος με έναν από τους δύο ρόμβους του Σχήματος 3. Επομένως, η κατασκευή της επιθυμητής ροβτικής πλακόστρωσης έχει ολοκληρωθεί.

Απομένει να αποδείξουμε ότι αυτή η πλακόστρωση είναι πραγματικά πρι-
περιοδική. Σχετικά με αυτό ανατρέξτε στην τελευταία ενότητα του άρθρου.

Ο δυϊκός μετασχηματισμός που παρουσιάσαμε αποτελεί μια γενική μέθοδο κατασκευής πρι-
περιοδικών πλακόστρωσεων. Το κανονικό πεντάγωνο που χρησιμοποιήσαμε θα μπορούσε να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο με τουλάχιστον επτά πλευρές.

Ημιπεριοδικές καλύγεις στον τρισδιάστατο χώρο

Μια ακόμη γενικευση είναι η εφαρμογή του δυϊσμού σε πρι-
περιοδικές καλύψεις του χώρου. Υπάρχει πράγματι μια τρισδιάστατη γενικευση των διατάξεων Penrose. Μπορούμε να «καλύψουμε» το χώρο, χωρίς κενά και επικαλύψεις, με παραλληλεπίπεδα ειδικής μορφής. Το καθένα τους αποτελεί αντίγραφο ενός από τα δύο λεγόμενα παραλληλεπίπεδα των Ammann-Mackey. Ένα παραλληλεπίπεδο καθορίζεται από τα τρία διανύσματα που συνδέουν μία από τις κορυφές του με τα άκρα των ακρών που ξεκινούν από αυτήν. Για το πρώτο παραλληλεπίπεδο Ammann-Mackey αυτά τα διανύσματα είναι τα

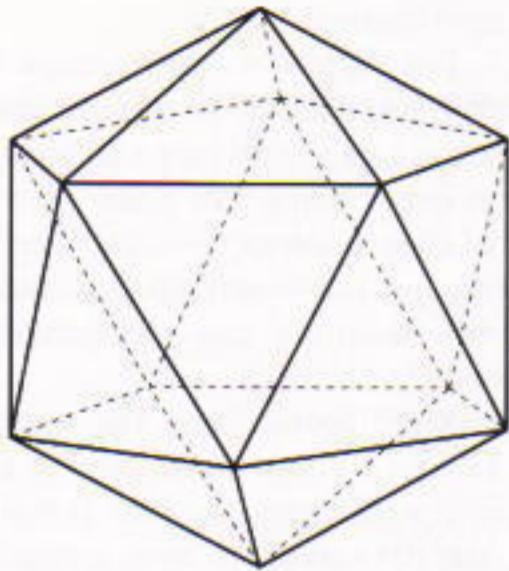
$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (0, 1, \beta), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\beta, 0, -1), \\ \mathbf{e}_3 &= (\beta, 0, -1),\end{aligned}$$

και για το δεύτερο

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_4 &= (0, -1, \beta), \\ \mathbf{e}_5 &= (\beta, 0, 1), \\ \mathbf{e}_6 &= (0, 1, \beta).\end{aligned}$$

Η πλακόστρωση του χώρου που παράγεται από παράλληλες μετατοπίσεις και περιστροφές αυτών των παραλληλεπιδών δεν μπορεί να μεταφερθεί στον εαυτό της μέσω παράλληλης μετατόπισης, αυτόσοο οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα της εργανίζεται άπειρες φορές στην πλακόστρωση και επομένως είναι πρι-
περιοδική. Αυτή η πλακόστρωση συνδέεται με τις συμμετρίες του εικοσαέδρου (Σχήμα 12) οι οποίες δεν εμφανίζονται ποτέ σε περιοδικές πλακοστρώσεις.

Αποδείχθηκε ότι αυτή ακριβώς η συμμετρία χαρακτηρίζει ένα κράμα αργιλίου και μαγγανίου, το $\text{Al}_{0.89}\text{Mn}_{0.14}$ όταν ψύχεται γρήγορα. Ετοι, οι διατάξεις Penrose έριξαν φως στο δομή αυτού του καινούργιου υλικού, που



Σχήμα 12

Εικοσάεδρο: ένα κανονικό πολύεδρο με 20 τριγωνικές έδρες, 30 ακρές και 12 κορυφές.

ανακαλύφθηκε το 1984. Και μάλιστα, όχι μόνο σ' αυτού του υλικού —πρόσφατα ανακαλύφθηκαν και άλλοι πρικρύσταλλοι. Οι επιπλέοντες μελετούν σήμερα αυτές τις νέες ουσίες και πειραματικά και θεωρητικά.

Υστερόγραφο

Παραμένουν αρκετά σημεία στο άρθρο που χρειάζονται διευκρίνισης κυρίως όσα αφορούν την αρχή του δυϊσμού. Πράγματι, δεν είναι και τόσο εύκολο να αποδείξουμε ότι η κατασκευή που βασίστηκε σ' αυτή την αρχή δημιουργεί πραγματικά μια πριπεριοδική πλακόστρωση. Από την άλλη πλευρά, πιστεύουμε ότι πολλούς αναγνώστες θα τους ενδιέφερε αυτή η απόδειξη και ενδεχομένως θα ήθελαν να προσπαθήσουν να την ανακαλύψουν οι ίδιοι. Γι' αυτό το λόγο, αποφασίσαμε να τη διασπάσουμε σε ένα πλήθος απλούστερων βημάτων τα οποία παρουσιάζουμε σε τούτο το υστερόγραφο ως μια σειρά προτάσεων που πρέπει να αποδειχθούν.

Η πρώτη ομάδα προτάσεων θα μας προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της δομής της T και της σύνδεσης που υπάρχει ανάμεσα στην πλακόστρωση και στο πλέγμα G που τη δημιουργεί.

1. Έστω A_1 και A_2 οι κόμβοι της T που αντιστοιχούν στις διαδοχικές έδρες F_1 και F_2 του πλέγματος G . Αν η κοινή πλευρά των F_1 και F_2 βρίσκεται σε μια ευθεία του $\overrightarrow{F_1 F_2}$ συνόλου, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1 A_2} = \pm \mathbf{e}_i$.

2. Το τετράπλευρο $N_1 N_2 N_3 N_4$ που σχηματίζεται από τις ακρές της T (με

τον τρόπο που περιγράφαμε στο άρθρο) είναι πάντοτε ένας «πλατύς» ή ένας «στενός» ρόμβος (Σχήμα 3). Αυτούς τους ρόμβους θα τους ονομάζουμε «πλακίδια».

Ας πάρουμε τώρα δύο τυχαίες έδρες F και F' του πλέγματος G , και ας διαλέξουμε τυχαία σημεία P και P' , αντίστοιχα, στις δύο έδρες. Στη συνέχεια, μετακινούμαστε κατά μήκος της ευθείας PP' , από το P προς το P' . Κατά τη μετακίνηση αυτή περνάμε από μια οειρά εδρών. Τις έδρες τις συμβολίζουμε με $F_1 = F$, $F_2, \dots, F_n = F'$, ενώ τον κόμβο της T που αντιστοιχεί στην έδρα F_k τον συμβολίζουμε με A_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Θεωρήστε το διάνυσματικό άθροισμα $\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$.

3. Όλα τα διάνυσματα αυτού του άθροισματος που είναι παράλληλα με το \mathbf{e}_i έχουν την ίδια διεύθυνση — δηλαδή, είναι όλα ίσα είτε με το \mathbf{e}_i είτε με το $-\mathbf{e}_i$. Το πρώτο συμβαίνει όταν η γωνία ανάμεσα στα διάνυσματα \mathbf{e}_i και $\overrightarrow{P P'}$ είναι οξεία, το δεύτερο όταν η γωνία είναι αμβλεία. Τι συμβαίνει αν τα διάνυσματα αυτά είναι κάθετα μεταξύ τους;

4. Υποθέστε ότι αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα στο άθροισμα

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$$

με το κατάλληλο διάνυσμα \mathbf{e}_i . Έπειτα από αναγωγή των όμοιων όρων θα προκύψει ένα άθροισμα της μορφής $c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 + c_4 \mathbf{e}_4 + c_5 \mathbf{e}_5$. Τότε, ισχύει η επόμενη σχέση:

$$n(F') = n(F) + c_i$$

(οι αριθμοί $n(F)$ ορίστηκαν προηγουμένως, στην παράγραφο που αναφερόταν στο δυϊσμό).

Αυτή η πρώτα σημείωση δεν είναι εντελώς τετριμμένη διότι ένα διάνυσμα (στην περίπτωση μας, το $\overrightarrow{A_1 A_n}$) μπορεί να παρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διάνυσμάτων \mathbf{e}_i με πολλούς τρόπους. Επομένως, ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τους συντελεστές c_i έχει σημασία.

Στην ακολουθία των κόμβων $A_1 \dots A_n$ ο κάθε κόμβος (εκτός από τον A_n) συνδέεται με τον επόμενο μέσω μιας ακμής (αφού οι έδρες F_k και F_{k+1} είναι διαδοχικές). Οποιαδήποτε παρόμοια ακολουθία κόμβων μαζί με τις ακρές που τους συνδέουν θα ονομάζεται «δια-

δρομή». Αν όλες οι ακρές μιας διαδρομής σχηματίζουν οξείες γωνίες με μία συγκεκριμένη διεύθυνση (όπως οι προτάσεις 3 και 4), θα λέμε ότι είναι μια «προοδευτική» διαδρομή.

5. Οποιοδήποτε κόμβοι της T μπορούν να συνδεθούν με μια προοδευτική διαδρομή. Η απόσταση της σε οποιουδήποτε κόμβους είναι μεγαλύτερη από το 1, εκτός εάν οι κόμβοι είναι τα άκρα μιας ακμής ($r = 1$) ή δύο ακμών που προβάλλουν από έναν κόμβο σχηματίζοντας γωνία 36° ($r = 2 \text{ ou } 72^\circ$).

6. Ο διϊκός μετασχηματισμός συνδέει διαφορετικές έδρες του G με διαφορετικούς κόμβους της T — δηλαδή, είναι ένα πρόσθιο αντιστοιχία.

7. Η πρώτη σημείωση για κάθε διαδρομή $A_1 A_2 \dots A_n$ με τις F και F' οριζόμενες ως οι έδρες του G που αντιστοιχούν στα άκρα της.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι οι ρόμβοι που προκύπτουν από τον διϊκό μετασχηματισμό καλύπτουν πραγματικά το επίπεδο χωρίς χάσματα και επικαλύψεις. (Αυτό το γεγονός, πάντως, δεν θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη απόδειξη — του ότι αυτοί οι ρόμβοι σχηματίζουν μια πριπεριοδική δομή.)

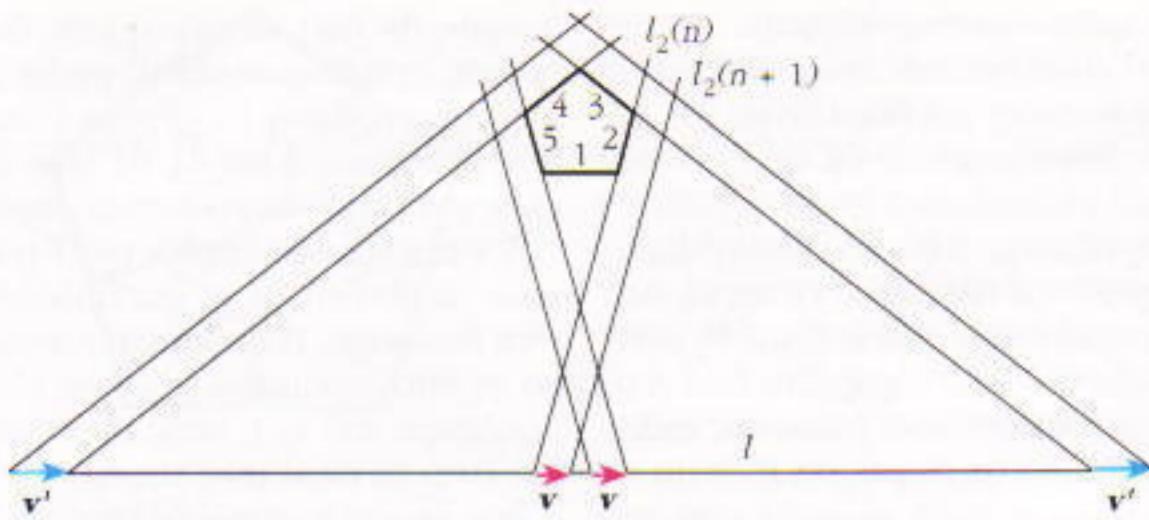
8. Κάθε ακμή της T είναι κοινή πλευρά δύο ακριβώς ρόμβων.

9. Πάρτε έναν τυχαίο ρόμβο της T και ένα οτανθερό σημείο A σ' αυτόν. Μετακινηθείτε από το A σ' ένα οποιοδήποτε δεδομένο σημείο X κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, και θεωρήστε την αλυσίδα των ρόμβων που προκύπτει. Καθένας από αυτούς (εκτός από τον πρώτο) συνορεύει στη μία πλευρά του με τον προηγούμενο ρόμβο που διασχίζει το τμήμα AX . Η αλυσίδα αυτή είναι πεπερασμένη.

Αφού ο τελευταίος ρόμβος της παραπάνω αλυσίδας καλύπτει το σημείο X , ουνεπάγεται ότι τα ρομβικά πλακίδια μας καλύπτουν όλο το επίπεδο χωρίς να αφίνουν κενά.

10. Δύο επικαλυπτόμενα πλακίδια (με άλλα λόγια, διαφορετικά αλλά με κοινά εσωτερικά σημεία) δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή.

11. Οταν η πλακόστρωση T περιέχει επικαλυπτόμενα πλακίδια, τότε υπάρχουν δύο ακρές που έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο (το οποίο δεν είναι η κοινή τους κορυφή). Η μικρό-



Σχήμα 13

τερη απόσταση ανάμεσα στα άκρα τους είναι μικρότερη από 1.

12. Αν δύο ακμές AB και BC σχηματίζουν γωνία 36° , τότε δύο ακμές που φέρουμε από τα A και C δεν μπορεί να έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός από το κοινό τους άκρο.

Συγκρίνοντας την πρόταση 11 με τις προτάσεις 5 και 12, συμπεραίνουμε ότι τα πλακίδια μας δεν επικαλύπτονται, και επομένως η T είναι πραγματική πλακόστρωση. Οι επόμενες δύο προτάσεις αποδεικνύουν ότι είναι μη περιοδική. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $s_i(n)$ για τη λωρίδα που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $I_i(n)$ και $I_i(n+1)$ του πλέγματος G .

13. Αν η T είναι περιοδική με περίοδο \mathbf{p} , τότε το \mathbf{p} μπορεί να παρασταθεί ως $p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_5\mathbf{e}_5$ με ακέραιους συντελεστές p_i τέτοιους ώστε για κάθε έδρα F να υπάρχει μία έδρα F' που ικανοποιεί την εξίσωση $n(F') = n(F) + p_i$.

14. Με δεδομένα δύο τυχαία σύνολα, με πέντε ακέραιους το καθένα — (p_1, \dots, p_5) και (p_1, \dots, p_5) — υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η τομή των πέντε λωρίδων $s_i(n+k)$, $i = 1, \dots, 5$, να είναι κενή.

Από τις προτάσεις 13 και 14 προκύπτει η μη περιοδικότητα της T , διότι αν $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_5\mathbf{e}_5$ είναι περίοδος της T , τότε, λόγω της πρότασης 13, το πλέγμα G όταν περιέχει την τυχούσα έδρα F πρέπει να περιέχει και την έδρα F_1 για την οποία ισχύει $n(F_1) = n_i + P_i$ [όπου $n_i = n(F)$], καθώς και την έδρα F_2 για την οποία ισχύει $n(F_2) = n(F_1) + p_i = n_i + 2P_i$, και γενικότερα, την έδρα F_k για την οποία ισχύει $n(F_k) = n_i + kp_i$, για κάθε k . Αυτό όμως σημαίνει ότι η

τομή των λωρίδων $s_i(n+kP_i)$ είναι έδρα του G για κάθε k και επομένως δεν είναι κενή, συμπέρασμα που έρχεται σε αντίφαση με την πρόταση 14.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η T είναι ημιπεριοδική, πρέπει να αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα της, T_0 , επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Οι τελευταίες προτάσεις αποδεικνύουν ότι υπάρχει οσοδήποτε μεγάλο πλήθος παραλλήλων μεταποίσεων που μεταφέρουν όλους τους κόμβους της T_0 σε άλλα τμήματα της T , και επομένως η T_0 έχει οσοδήποτε μεγάλο πλήθος αντιγράφων στην T .

Διαλέγουμε μια ευθεία l , λόγου χάρη από το πρώτο από τα σύνολα των ευθειών που σχηματίζουν το πλέγμα G , και συμβολίζουμε με \mathbf{v} το διάνυσμα που ενώνει τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει δύο διαδοχικές ευθείες του δεύτερου συνόλου, τις $I_2(n)$ και $I_2(n+1)$. Παρόμοια, έστω \mathbf{v}' το διάνυσμα που ορίζεται πάνω στην l από δύο διαδοχικές ευθείες του τρίτου συνόλου. Είναι φανερό ότι, εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο αριθμήσαμε τις ευθείες των συνόλων, τα αντίστοιχα διανύσματα που ορίζουν το τέταρτο και το πέμπτο σύνολο θα είναι τα $-\mathbf{v}'$ και $-\mathbf{v}$ (Σχήμα 13).

15. Για οποιουδήποτε ακέραιους i , j , και k , η παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα \mathbf{v} μεταφέρει τις λωρίδες $s_i(i)$, $s_i(j)$, και $s_i(k)$, στις $s_i(i)$, $s_i(j+1)$, και $s_i(k-1)$, αντίστοιχα.

16. Αν μετατοπίσουμε όλες τις ευθείες του τρίτου και του τέταρτου συνόλου κατά ένα κατάλληλα μικρό διάνυσμα (με μήκος μικρότερο από μια συγκεκριμένη τιμή δ), χωρίς να μετατοπίσουμε τα τρία υπόλοιπα σύνολα ευθειών, το τμήμα T_0 της T παραμένει αμετάβλητο.

17. Για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακέραιους m και n τέτοιους ώστε $|nv - nv'| < \epsilon$ (Υπόδειξη: δείξτε ότι ο λόγος των μηκών των \mathbf{v} και \mathbf{v}' είναι άρρητος —ακριβέστερα, ισούται με $1/t$ — και χρησιμοποιήστε το «θεώρημα του κλασματικού μέρους».²⁾)

18. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 17, διαλέγουμε αριθμούς m και n για $\epsilon = \delta$, όπου δ είναι ο αριθμός της πρότασης 16. Τότε, η παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\mathbf{t} = ne_2 + me_3 - me_4 - ne_5$ θα μεταφέρει την T_0 σε ένα άλλο πεπερασμένο τμήμα της T . Η πρόταση αυτή μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον αντιγράφου της T_0 . Επομένως, όσο περισσότερα ζεύγη αριθμών m και n που ικανοποιούν την $|nv - nv'| < \epsilon = \delta$ βρίσκουμε, τόσο περισσότερα αντίγραφα της T_0 θα πάρνουμε. Διαλέγοντας τα m και n μέσα σε κατάλληλα όρια —ας πούμε, για $\epsilon = \delta/100$ — θα πάρουμε 100 ζεύγη αριθμών, $(n, m), (2n, 2m), \dots, (100n, 100m)$ που ικανοποιούν την ανισότητα, και, επομένως, και 100 αντίγραφα της T_0 . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ο αριθμός των αντιγράφων της T_0 μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλος.

Οι αποδείξεις θα δημοσιευτούν στο επόμενο τεύχος. ◻

2. Το θεώρημα του κλασματικού μέρους, (στο οποίο θα αφιερώσουμε ένα άρθρο στο πλέγμα του Quantum) διατυπώνεται ως εξής: «Εστια ο ένας άρρητος αριθμός και θένας τυχαίος πραγματικός αριθμός. Εστια l ένα διάστημα μήκους h που περιέχεται στο διάστημα $[0, 1]$. Θεωρήστε την άπειρη ακολουθία $a + \theta, 2a + \theta, \dots, na + \theta, \dots$. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει το κλασματικό μέρος ενός τυχαίου όρου αυτής της ακολουθίας στο διάστημα l ισούται με h .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι όταν αναφέρομε στην «πιθανότητα με την οποία ένας τυχαίος πιλογράφος όρος μήκους απειρούς ακολουθίας ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα» πηγαίνουμε αυτή ορίζεται ως το όριο (όταν $n \rightarrow \infty$) του λόγου n_p/n (όπου n_p είναι το πλήθος των όρων ανάμεσα στους πρώτους n όρους της ακολουθίας που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα). Όταν λοιπόν αυτή η πιθανότητα είναι θετική (και αυτό μας εξασφαλίζει σε πολλές περιπτώσεις το θεώρημα του κλασματικού μέρους) αποδεικνύουμε την ύπαρξη αριθμών με αυτή την ιδιότητα.

Πατινάζ σε πάγο

Τριβή, πίεση, θεώρημα του Carnot και χύτρες ταχύτητας

Alexey Chernoutsan

Εάν ρωτούσαμε ένα δεκάχρονο παιδί γιατί τα πέδιλα του πατινάζ γλιστρούν με τόπο ευκολία στον πάγο, η πιο πιθανή απάντηση που θα παίρναμε είναι απλή και προφανής: «Τα πέδιλα τρίβονται με τον πάγο δημιουργώντας ένα λεπτό στρώμα νερού· αυτό βοηθάει τα πέδιλα να γλιστρούν πάνω στον πάγο». Ένας μαθητής με μεγαλύτερη εμπειρία στη φυσική, θα έβρισκε την απάντηση μάλλον απλοίκη. «Όχι δα», θα έλεγε ο εκκολαπόρευος φυσικός· «δεν είναι θέμα τρίβης αλλά της πίεσης που ασκούν τα πέδιλα στον πάγο. Καθώς αυξάνει η πίεση, το σημείο τήξης του πάγου πέφτει κάτω από τους 0°C, με αποτέλεσμα να λιώνει ο πάγος κάτω από το πέδιλο». Υπάρχει λογική σ' αυτή την εξήγηση· πράγματι, η θερμοκρασία τήξης, ή σημείο τήξης του πάγου μειώνεται με την αύξηση της πίεσης. Παρ' όλα αυτά, η φυσική είναι ποοστική επιστήμη. Εάν θέλουμε να βρούμε κατά πόσον το παραπάνω φυσικό φαινόμενο έχει ισχύ στο πατινάζ σε πάγο, πρέπει να κάνουμε τους αιαραίτητους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Κατ' αρχάς, τι είναι το σημείο τήξης του πάγου και γιατί παρουσιάζει τόσο ενδιαφέρον; Όπως ίσως γνωρίζετε, όταν η θερμοκρασία του πάγου φτάσει στο συγκεκριμένο σημείο παύει να αυξάνει, και η θερμότητα που πλέον απορροφά ο πάγος δαπανάται εξ ολοκλήρου για την τήξη του. Αν διακοπεί η παροχή θερμότητας από το εξωτερικό περιβάλλον, τότε ο πάγος και το νερό συνυπάρχουν σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Έτοι, το



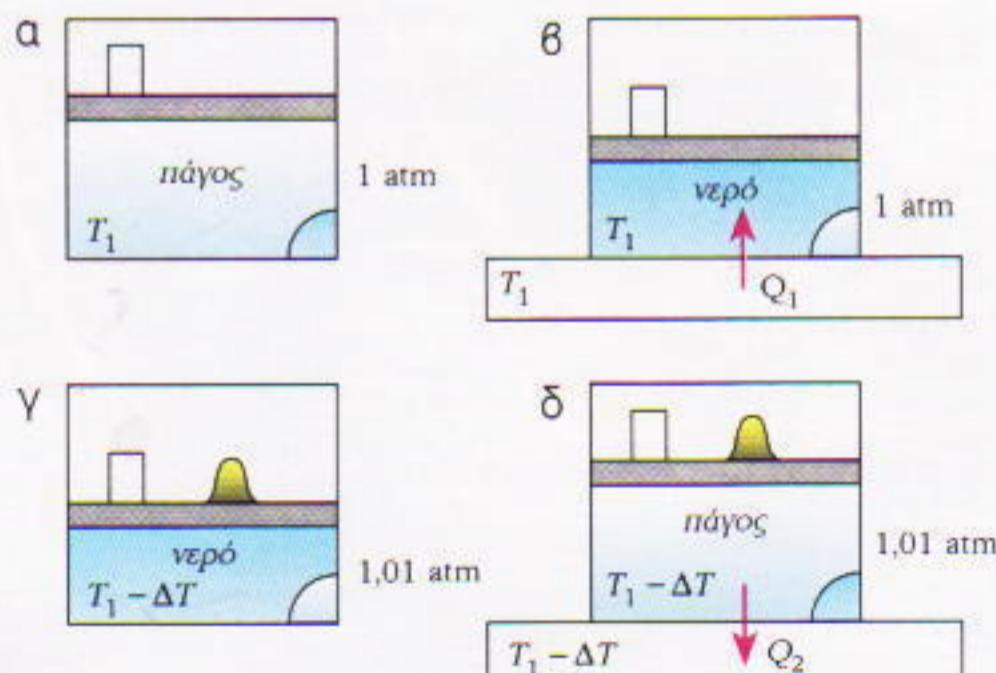
Εικονογράφηση: Sergey Barkhin

σημείο τήξης αποτελεί τη θερμοκρασία ισορροπίας μεταξύ νερού και πάγου σε συγκεκριμένη πίεση. Για παράδειγμα, σε πίεση 1 atm η θερμοκρασία τήξης είναι 0°C . Κατά πόσον, όμως, θα αυξηθεί η θερμοκρασία τήξης όταν η πίεση γίνει 1,01 atm;

Την απάντηση στο ερώτημα μας τη δίνει, απροσδόκητα, το θεώρημα του Carnot. Καλά διαβάσατε, το θεώρημα που εκφράζει τη μέγιστη απόδοση των θερμικών μηχανών. Πιθανότατα θα αναρωτηθείτε τι οχέον έχει το σημείο τήξης του πάγου με τις θερμικές μηχανές. Η ουσία είναι πως ο Nicolas Carnot απέδειξε ότι η μέγιστη απόδοση μιας θερμικής μηχανής οποιουδήποτε τύπου, το υλικό της οποίας υφίσταται κυκλική μεταβολή, δεν εξαρτάται από αυτό το υλικό μπορεί να είναι ιδανικό αέριο, μείγμα νερού και πάγου ή ένα υμένιο σαπωνοδιάλυμα. Μόνο μια συνθήκη πρέπει να πληρούται: το υλικό της θερμικής μηχανής πρέπει να προσλαμβάνει θερμότητα από μια δεξαμενή θερμότητας υψηλής θερμοκρασίας T_1 και να αποδίδει θερμότητα σε μια δεξαμενή θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας T_2 . Ο θερμοδυναμικός συντελεστής απόδοσης μιας τέτοιας ιδανικής θερμικής μηχανής, που λειτουργεί κατ' αντιστρεπτό τρόπο, και ανεξάρτητα από το υλικό που περιέχει, ισούται με

$$n = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

όπου W είναι το έργο που παράγει η μηχανή ανά κύκλο και Q_1 η θερμότητα που προσλαμβάνει το υλικό



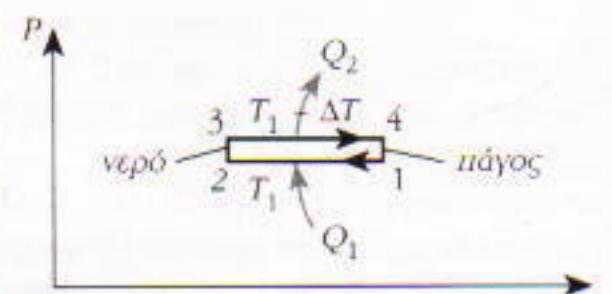
Σχήμα 1

από τη δεξαμενή θερμότητας υψηλής θερμοκρασίας T_1 .

Ας θεωρήσουμε ότι η θερμική μηχανή μας αποτελείται από έναν κατακόρυφο κύλινδρο με ένα έμβολο (Σχήμα 1). Μέσα στον κύλινδρο τοποθετούμε πάγο μάζας m υπό πίεση $P_1 = 1 \text{ atm}$ και θερμοκρασία 0°C ($T_1 = 273 \text{ K}$). Την ακριβή τιμή της πίεσης την επιτυγχάνουμε τοποθετώντας το κατάλληλο βάρος πάνω στο έμβολο. Για να υποδείξουμε την κατάσταση θερμικής ισορροπίας μεταξύ πάγου και νερού συνιέπουμε ένα μικρό μέρος νερού στην κάτω δεξιά γωνία του σχήματος. Ας περιγράψουμε βήμα βήμα ποιες μεταβολές συμβαίνουν σ' αυτή τη θερμική μηχανή κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου.

1. Τοποθετούμε τον κύλινδρο πάνω σε μια δεξαμενή θερμότητας σταθερής θερμοκρασίας T_1 . Απ' αυτή μεταφέρεται στον κύλινδρο θερμότητα $Q_1 = \lambda m$, τόσο όσο χρειάζεται για να λιώσει όλος ο πάγος (λ είναι η λανθάνουσα θερμότητα τήξης του πάγου). Κατά τη διαδικασία της τήξης το έμβολο κατεβαίνει λίγο (Σχήμα 1β), διότι ο όγκος του πάγου $V_p = m/\rho_p$ είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του νερού $V_v = m/\rho_v$. Αυτό το στάδιο τήξης παρίσταται από την γραμμή 1-2 στο διάγραμμα, όπου οι συντεταγμένες είναι η πίεση P και ο όγκος V (Σχήμα 2).

2. Απομακρύνουμε τον κύλινδρο από τη δεξαμενή θερμότητας, τον μονώνομε θερμικά (Σχήμα 1γ) και αυξάνουμε αργά την πίεση έως ότου γίνει ίση με $P_1 + \Delta P = 1,01 \text{ atm}$. (Αυτό μπορεί να γίνει αν ρίξουμε αργά άμμο πάνω στο έμβολο). Η μεταβολή αυτή



Σχήμα 2

συνεπάγεται πτώση της θερμοκρασίας στην πιμή $T_2 = T_1 - \Delta T$, στο σημείο τήξης του πάγου σε πίεση 1,01 atm.

3. Τοποθετούμε τον κύλινδρο πάνω σε μια δεξαμενή θερμότητας σταθερής θερμοκρασίας T_2 ($T_2 < T_1$). Σ' αυτή μεταφέρεται θερμότητα από τον κύλινδρο, τόσο όσο χρειάζεται για να μετατραπεί πάλι σε πάγο όλο το νερό (Σχήμα 1δ). Στο Σχήμα 2 αυτό το στάδιο πήξε παρίσταται από τη γραμμή 3-4.

4. Το μόνο που απομένει είναι να μονώσουμε θερμικά τον κύλινδρο και να αφαιρέσουμε αργά όλη την άμμο από την επιφάνεια του έμβολου. Αυτό επαναφέρει το σύστημα στην αρχική κατάσταση.

Ας κάνουμε τώρα ορισμένους υπολογισμούς. Το έργο που παράγει η μηχανή μας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, μπορεί να βρεθεί από το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου 1-2-3-4 στο Σχήμα 2:

$$W = \Delta P (V_n - V_v) = \Delta P \left(\frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_v} \right).$$

Το ποσόν της θερμότητας που προσλαμβάνει το υλικό της θερμικής μηχανής από τη δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T_1 είναι

$$Q_1 = \lambda m.$$

Εποι, από το θεώρημα του Carnot παίρνουμε:

$$\frac{\Delta P \left(\frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_v} \right)}{\lambda m} = \frac{\Delta T}{T_1},$$

ή αλλιώς, για οποιαδήποτε θερμοκρασία $T_1 = T$,

$$\Delta T = \Delta P \frac{T}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_v} \right). \quad (2)$$

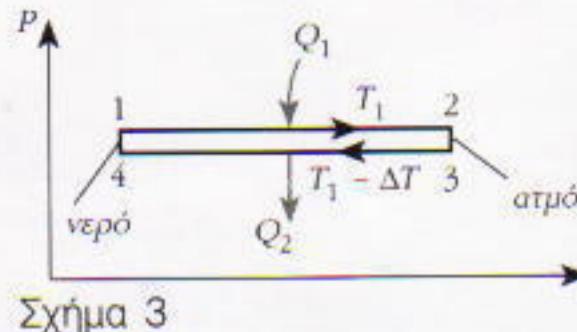
Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση Clausius-Clapeyron. Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα στην παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι για μεταβολή της πίεσης

κατά $\Delta P = 0,01$ atm, η μεταβολή στη θερμοκρασία θα είναι $9,2 \cdot 10^5$ K. Γίνεται σαφές ότι η μεταβολή αυτή είναι πολύ μικρή. Για να μεταβληθεί η θερμοκρασία τήξης του πάγου κατά 1 K χρειαζόμαστε πίεση περίπου 133 atm. Και τώρα ας επιστρέψουμε στο πατινάζ σε πάγο.

Η πίεση που ασκεί ο παγοδρόμος στο πέδιλο μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $P = mg/S \equiv 600 \text{ Nt}/2 \text{ cm}^2 = 30 \text{ atm}$. Η αντίστοιχη μεταβολή στο σημείο τήξης του πάγου είναι 0,3 K περίπου, και σίγουρα είναι πολύ μικρή σε μια κρύα μέρα του χειμώνα. Επομένως, η «απλοϊκή» ερμηνεία του μικρού αγοριού αποδεικνύεται σωστή: ένα λεπτό στρώμα νερού σχηματίζεται λόγω της τριβής, το οποίο δρά ως λιπαντικό. Τότε όμως, θα αναρωτηθείτε, τι ρόλο παίζουν τα πέδιλα; Γιατί δεν μπορούμε να κάνουμε πατινάζ χωρίς αυτά; Χωρίς να προχωρήσω στις λεπτομέρειες της φυσικής του θέματος θα υπογραμμίσω το εξής: πολύ λιγότερος πάγος χρειάζεται να λιώσει για να λιπάνει τη λάμα του πέδιλου (η επιφάνεια του οποίου είναι μικρή) απ' ότι το πέλμα ενός παπουτσιού.

Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα όπου παρατηρείται ουσιαστική μεταβολή στο σημείο τήξης του πάγου: Βεβαίως υπάρχουν. Λάβετε υπόψη σας, για παράδειγμα, τον τρόπο με τον οποίο ένας μεγάλος παγετώνας υπερνικά τα εμπόδια που συναντά καθώς γλιστρά στις πλαγιές των βουνών. Στα σημεία όπου ο παγετώνας συναντά ογκόλιθους ή προεξοχές βράχων αναπτύσσεται πολύ μεγάλη πίεση, η οποία αναγκάζει τον πάγο να λιώσει. Έτσι ο παγετώνας ρέει, κατά κάποιον τρόπο, γύρω από το εμπόδιο, και αυτό ουσιαστικά «περνά» μέσα από τον πάγο. Όταν η πίεση μειώθει, το νερό που έχει δημιουργηθεί μέσα στον παγετώνα ξαναγίνεται πάγος.

Πιθανότατα όλα τούτα να τα βρίσκετε ενδιαφέροντα, αλλά αναρωτιέστε «αυτά είναι μόνο όσα έχετε να μας πείτε;». Φυσικά όχι. Ας κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τα αποτελέσματά μας. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή στη θερμοκρασία ισορροπίας δύο φάσεων —της υγρής (νερό) και της στερεάς (πάγος)— που προκαλείται από τη μεταβολή της εξωτερι-



Σχήμα 3

κής πίεσης. Το πιο αξιοπρόσεκτο είναι ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι φάσεων ενός υλικού, αρκεί να βρίσκονται σε θερμική ισορροπία —π.χ. υγρό-ατμός του, μέταλλο-τετηγμένο μέταλλο, στερεό-ατμός του, κ.ο.κ. Με άλλα λόγια, η εξίσωση Clausius-Clapeyron ισχύει όχι μόνο για την τήξη, αλλά για οποιαδήποτε διαδικασία περιλαμβάνει τη μετάβαση από μια φάση ενός υλικού σε μια άλλη (εξάτμιση, εξάγνωση, κ.λπ.). Γι' αυτές τις διαδικασίες χρειάζεται να τροποποιήσουμε την εξίσωση (2) θέτοντας τις αντίστοιχες τιμές για τις πυκνότητες του υλικού στις δύο φάσεις, καθώς και τη λανθάνουσα θερμότητα για τη μετατροπή φάσης.

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τη μετατροπή του νερού σε ατμό. Οπως ίως γνωρίζετε, όταν οι υδρατμοί βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με το νερό ονομάζονται «κορεομένοι». Η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας των κορεομένων υδρατμών και της πίεσης τους χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την υγρασία στην ατμόσφαιρα, το σημείο δρόσου κ.ά. Επιπλέον, η θερμοκρασία των κορεομένων υδρατμών (δηλαδή η θερμοκρασία ισορροπίας του συστήματος νερό-υδρατμοί) καθορίζει το σημείο βρασμού του νερού για δεδομένη εξωτερική πίεση. Έτσι, σε πίεση 1 atm, η θερμοκρασία βρασμού είναι 100°C (373 K). Γνωρίζουμε, όμως, ότι η πίεση των κορεομένων υδρατμών αυξάνεται όσο αυξάνει η θερμοκρασία. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί την αρχή λειτουργίας της χύτρας ταχύτητας, η οποία μαγειρεύει σε υψηλότερη θερμοκρασία και πίεση.

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της τήξης του πάγου και της εξάτμισης του νερού; Γιατί η θερμοκρασία ισορροπίας μειώνεται όσο αυξάνει η πίεση στη μια περίπτωση, και αυξάνει στην άλλη; Υπάρχει κι άλλος παράγοντας που εμπλέκεται: ο όγκος. Όταν

ο πάγος απορροφά θερμότητα και τίκεται, ο όγκος του συστήματος μειώνεται (η πυκνότητα του νερού είναι μεγαλύτερη από αυτή του πάγου), ενώ όταν το νερό απορροφά θερμότητα και εξατμίζεται, ο όγκος του συστήματος αυξάνει (η πυκνότητα των κορεομένων υδρατμών είναι μικρότερη από την πυκνότητα του νερού). Πάντως, και στις δύο περιπτώσεις, η κυκλική μεταβολή στο διάγραμμα P - V πρέπει να γίνεται δεξιόστροφα, διαφορετικά το έργο που παράγεται από τη θερμική μηχανή είναι αρνητικό. Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα (Σχήματα 2 και 3) θέλετε γιατί στο ένα από αυτά χαμηλότερη θερμοκρασία αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη πίεση, ενώ στο άλλο συμβαίνει το αντίθετο. Επιπλέον, προσπαθήστε να βρείτε τη σειρά μεταβολών που πρέπει να υποστεί το νερό και οι υδρατμοί του που συνυπάρχουν μέσα σ' ένα δοχείο, έτσι ώστε να προκύψει η κυκλική μεταβολή του Σχήματος 3.

Για να θέσουμε ένα τέλος στην ιστορία μας, ας υπολογίσουμε την αύξηση στην θερμοκρασίας βρασμού εάν αυξήσουμε την πίεση από 1,00 atm σε 1,01 atm. Πρέπει να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2) τη λανθάνουσα θερμότητα τήξης του πάγου με τη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού L , καθώς και την πυκνότητα του πάγου με την πυκνότητα των κορεομένων υδρατμών ρ_a :

$$\Delta T = \Delta P \frac{T}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_v} \right)$$

Η πυκνότητα των κορεομένων υδρατμών σε $T = 373$ K και $P = 1$ atm μπορεί να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση των αερίων:

$$\rho_a = \frac{P m_{\text{mol}}}{R T} \equiv 0,58 \text{ kg/m}^3$$

Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα στην προηγούμενη εξίσωση, για $\Delta P = 0,01$ atm προκύπτει $\Delta T \equiv 0,28$ K.

Όπως διαπιστώντε, ο' αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι εμφανή: για να αυξήσουμε τη θερμοκρασία βρασμού κατά 1K, αρκεί να αυξήσουμε την πίεση κατά 0,035 atm, γεγονός εφικτό και σε συνθήσιμες συνθήκες. ■



Πέρα από την υποδιαστολή

Όπου η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 = x$ έχει τέσσερις ρίζες

A.B. Zhiglevich και N.N. Petrov¹

Θα προσπαθήσουμε να σας πείσουμε ότι —όπως υποστηρίζει και ο τίτλος του άρθρου μας— το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 = x$ δεν είναι δύο αλλά τέσσερις. Πρώτα, όμως, θα σας παρουσιάσουμε το επόμενο αδιαμφισθέντο γεγονός. Όταν ένας φυσικός αριθμός (εκφρασμένος στο δεκαδικό σύστημα αριθμούς) λήγει σε ένα από τα ψηφία 0, 1, 5 ή 6, το τετράγωνό του λήγει στο ίδιο ψηφίο. Το ίδιο ισχύει και για τις διψήφιες καταλήξεις 00, 01, 25 και 76 — δηλαδή, όταν ένας αριθμός λήγει σε ένα από αυτά τα ζεύγη ψηφίων, συμβαίνει το ίδιο και με το τετράγωνό του (για παράδειγμα, $176^2 = 30.976$, $225^2 = 50.625$, κ.λπ.). Παρότοια ιδιότητα ισχύει και για τις τριψήφιες καταλήξεις 000, 001, 625 και 376. Από την άλλη πλευρά, καμία άλλη μονοψήφια, διψήφια ή τριψήφια κατάληξη δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Τι το ιδιαίτερο έχουν οι συγκεκριμένοι συνδυασμοί αριθμών; Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Για κάθε φυσικό αριθμό k υπάρχουν τέσσερα ακριβώς σύνολα k ψηφίων (00...00, 00...01, και δύο ακόμη που λήγουν σε 5 και 6, αντίστοιχα) τέτοια ώστε όταν ένας φυσικός αριθμός λήγει σε ένα από αυτά τα σύνολα ψηφίων, το τετράγωνό του λήγει στο ίδιο σύνολο ψηφίων.

Για να εξαφανίσουμε τις οποιεσδήποτε αμφιβολίες, θα δώσουμε δύο αποδείξεις του θεωρήματος. Ωστόσο, ας προσπαθήσουμε πρώτα να κατανοήσουμε καλύτερα τι πρέπει να αποδείξουμε.

Αναζητούμε έναν ακέραιο x , με $0 \leq x < 10^k$, τέτοιον ώστε για κάθε ακέραιο $a \geq 0$ το τετράγωνό του αριθμού $10^k a + x$ (που είναι η γενική μορφή ενός αριθμού τα τελευταία k ψηφία του οποίου συμπίπτουν με το x) έχει τη μορφή $10^k b + x$, όπου το b είναι ακέραιος. Όμως, $(10^k a + x)^2 = 10^k (10^k a^2 + 2ax) + x^2$, και επομένως η συνθήκη μας ισοδυναμεί απλώς με το ότι το $x^2 - x$ διαιρείται με το 10^k . Καταλήξαμε, λοιπόν, στο απλό πρόβλημα να βρούμε όλους τους ακέραιους x , με $0 \leq x <$

10^k , τέτοιους ώστε το $x^2 - x$ να διαιρείται με το 10^k . Πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι αυτό το πρόβλημα έχει τέσσερις λύσεις, και ότι αυτές οι λύσεις έχουν τις ιδιότητες που προσδιορίζει το θεώρημα.

Πρώτη απόδειξη. Η διαφορά $x^2 - x = x(x - 1)$ πρέπει να διαιρείται με το $10^k = 2^k 5^k$. Όμως, οι αριθμοί x και $x - 1$ δεν μπορεί να διαιρούνται και οι δύο με το 2, ούτε να διαιρούνται και οι δύο με το 5. Επομένως, έχουμε τέσσερις δυνατότητες:

- (1) το x διαιρείται με το 10^k ,
- (2) το $x - 1$ διαιρείται με το 10^k ,
- (3) το x διαιρείται με το 2^k και το $x - 1$ διαιρείται με το 5^k ,
- (4) το x διαιρείται με το 5^k και το $x - 1$ διαιρείται με το 2^k .

Αφού $x < 10^k$, η πρώτη περίπτωση μπορεί να ισχύει μόνο όταν $x = 0$. Όμοιως, η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί στο $x = 1$.

Στην περίπτωση (3) ο αριθμός x (και στην περίπτωση (4) ο αριθμός $x - 1$) είναι ένας από τους αριθμούς $a \cdot 2^k$, και αφού $x > x - 1 \geq 5^k$, γνωρίζουμε ότι $0 \leq a \leq 5^k - 1$. Όλοι αυτοί οι αριθμοί δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα διαιρούμενοι με το 5^k , επειδή όταν οι αριθμοί $2^k b$ και $2^k c$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενο με το 5^k , τότε η διαφορά τους $2^k(c - b)$ διαιρείται με το 5^k , άρα και με το 10^k , πράγμα αδύνατον για $0 < c - b < 5^k$. Όμως, υπάρχουν μόνο 5^k δυνατά υπόλοιπα, και επομένως το καθένα από αυτά εμφανίζεται μία μόνο φορά ανάμεσα στους αριθμούς $2^k a$. Αυτό σημαίνει ότι μόνο ένας από αυτούς τους αριθμούς —ας πούμε ο $2^k a_1$ — αφήνει υπόλοιπο 1, έτοι ώστε όταν $x = 2^k a_1$, ο $x - 1$ να διαιρείται με το 5^k . Όμοιως, μόνον ένας από αυτούς τους αριθμούς —ας πούμε ο $2^k a_2$ — αφήνει υπόλοιπο $5^k - 1$ όταν διαιρεθεί με το 5^k , έτοι ώστε όταν $x - 1 = 2^k a_2$, ο x να διαιρείται με το 5^k .

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε καθεμία από τις τέσσερις περιπτώσεις υπάρχει ένας και μόνον αριθμός x που ικανοποιεί τις συνθήκες μας, και επομένως το πρό-

1. Σ' αυτό το άρθρο έχει χρησιμοποιηθεί, με την άδειά του, υλικό του V. Denisenko.

βλημα έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις. Είναι επίοντς φανέρω ότι στην περίπτωση (3) ο αριθμός λήγει σε 6 και στην περίπτωση (4) σε 5. Η απόδειξη είναι πλήρης.

Δεύτερη απόδειξη: Θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι το πρόβλημα δεν έχει περισσότερες από τέσσερις λύσεις (αυτό το γνωρίζουμε από την πρώτη απόδειξη, αλλά μπορεί να αποδειχθεί και απευθείας) και θα χρησιμοποιήσουμε επαγγελτικής προς k : θα υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη βρει αριθμούς x_{k-1} και y_{k-1} που λήγουν σε 5 και 6, αντίστοιχα, τέτοιους ώστε $0 \leq x_{k-1} < 10^{k-1}$, $0 \leq y_{k-1} < 10^{k-1}$, και οι διαφορές $x_{k-1}^2 - x_{k-1}$ και $y_{k-1}^2 - y_{k-1}$ διαιρούνται με το 10^{k-1} (δημιουργούμε τη βάση της επαγγελτικής —δηλαδή, την ύπαρξη των x_1 και y_1 — θέτοντας $x_1 = 5$ και $y_1 = 6$). Τώρα πρέπει να βρούμε τους αριθμούς x_k και y_k με τις ανάλογες ιδιότητες.

Για να βρούμε το x_k ας υψώσουμε το x_{k-1} στο τετράγωνο και ας πάρουμε τα τελευταία k ψηφία αυτού του τετραγώνου, έτσι ώστε $x_{k-1}^2 = 10a + x_k$. Ας αποδείξουμε ότι το $x_k^2 - x_k$ διαιρείται με το 10^k :

$$\begin{aligned} x_k^2 - x_k &= (x_{k-1}^2 - 10^k a)^2 - (x_{k-1}^2 - 10^k a) \\ &= x_{k-1}^4 - 2ax_{k-1}^2 \cdot 10^k + 10^{2k} a^2 - x_{k-1}^2 + 10^k a \\ &= (x_{k-1}^2 - x_{k-1})(x_{k-1}^2 + x_{k-1}) + 10^k(10^k a^2 + a - 2ax_{k-1}). \end{aligned}$$

Ομως, το $x_{k-1}^2 - x_{k-1}$ διαιρείται με το 10^{k-1} , και το $x_{k-1}^2 + x_{k-1}$ διαιρείται με το 10 (αφού και το x_{k-1} και το x_{k-1}^2 λήγουν σε 5). Επομένως, και οι δύο όροι της τελευταίας παράστασης διαιρούνται με το 10^k .

Η κατασκευή του y_k είναι λίγο πιο περίπλοκη: πρέπει να πάρουμε τα τελευταία k ψηφία του y_{k-1}^5 . Η διαιρέτοτη του $y_k^2 - y_k$ αποδεικνύεται με τον ίδιο σχεδόν τρόπο:

$$\begin{aligned} y_k^2 - y_k &= (y_{k-1}^5 - 10^k b)^2 - (y_{k-1}^5 - 10^k b) \\ &= (y_{k-1}^2 - y_{k-1})(y_{k-1}^8 + y_{k-1}^7 + y_{k-1}^6 + y_{k-1}^5 + y_{k-1}^4 + \dots + 10^k c), \end{aligned}$$

όπου $c = 10^k b^2 + b - 2by_{k-1}$. Ο όρος $y_{k-1}^8 + \dots + y_{k-1}^4$ διαιρείται με το 10 διότι αποτελεί το άθροισμα πέντε αριθμών που λήγουν σε 6, και η διαφορά $y_{k-1}^2 - y_{k-1}$ διαιρείται με το 10^{k-1} λόγω της επαγγελτικής υπόθεσης. Επομένως, το $y_k^2 - y_k$ διαιρείται με το 10^k και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Από την πρώτη απόδειξη μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα του τρίτου και του τέταρτου από τους αριθμούς που βρήκαμε ισούται με $10^k + 1$ (πραγματικά, $25 + 76 = 101$, $625 + 376 = 1.001$).

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι αυτό αληθεύει για κάθε k . Η δεύτερη απόδειξη επιδεικνύει ένα εντυπωσιακό γεγονός: οι τέσσερις k -ψηφίες καταλήξεις που διατηρούνται μετά τον τετραγωνισμό προέρχονται από τις αντίστοιχες $(k-1)$ -ψηφίες καταλήξεις που διατηρούνται μετά τον τετραγωνισμό, αν προσθέσουμε απλώς ένα ψηφίο στα αριστερά τους! Πραγματικά, τα τελευταία $k-1$ ψηφία του x_k συμπίπτουν με τα τελευταία $k-1$ ψηφία του x_{k-1}^2 ,

και επομένως αποτελούν τον x_{k-1} . Το μοναδικό νέο ψηφίο στον x_k είναι το k ψηφίο από τα δεξιά. Αντίστοιχα, για τα γραπτοποιούμε το γεγονός ότι y_{k-1} περιλαμβάνει τα τελευταία $k-1$ ψηφία του y_{k-1}^5 : αυτό προκύπτει από την ταυτότητα $y_{k-1}^5 - y_{k-1} = (y_{k-1}^2 - y_{k-1})(y_{k-1}^3 + 1) (y_{k-1}^2 + 1)$ και από τη διαιρετότητα του $y_{k-1}^2 - y_{k-1}$ με το 10^{k-1} . Αυτό το έχετε ίσως ήδη παρατηρήσει στα αριθμητικά μας παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 0 &- 00 - 000 - \dots, \\ 1 &- 01 - 001 - \dots, \\ 5 &- 25 - 625 - \dots, \\ 6 &- 76 - 376 - \dots, \end{aligned}$$

Επομένως, στην ακολουθία $5, 25, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots$, οι όροι σχηματίζονται με την προσθήκη ψηφίων στο αριστερό άκρο. Το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $6, 76, \dots, y_{k-1}, y_k, \dots$. Αν δεν διακόψουμε αυτή τη διαδικασία, το αποτέλεσμα θα είναι δύο άπειροι «αριθμοί». Με γραμμένα δέκα από τα ψηφία τους, είναι οι

$$\begin{aligned} X &= \dots 8212890625, \\ Y &= \dots 1787109376. \end{aligned}$$

Αρκετά προσεκτικά βάλαρε τη λέξη «αριθμοί» σε εισαγωγικά, αλλά, όπως θα διαπιστώσουμε σύντομα, αυτές οι άπειρες ακολουθίες μπορούν απολύτως νόμιμα να θεωρηθούν γνήσιοι (αν και κάπως ασυνήθιστοι) αριθμοί.

Ένα καινούργιο έδιος αριθμού

Χρειαζόμαστε ένα όνομα γι' αυτές τις άπειρες προς τα αριστερά ακολουθίες ψηφίων $\dots a_4 a_3 a_2 a_1$. Ας τις ονομάσσουμε υπεραριθμούς. Όταν, από μια θέση και κατόπιν, όλα τα ψηφία σε μια παρόμοια ακολουθία είναι 0, θα λέμε ότι αυτός ο υπεραριθμός είναι ένας ουνθισμένος αριθμός —για παράδειγμα,

$$\dots 000132 = 132.$$

Επομένως, ανάμεσα στους υπεραριθμούς μπορούμε να βρούμε όλους τους συνθισμένους μη αρνητικούς ακέραιους, μπορούμε όμως να βρούμε και άλλους «αριθμούς». Μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε τους υπεραριθμούς χρησιμοποιώντας τους συνθισμένους κανόνες πρόσθεσης ή πολλαπλασιασμού ψηφίο προς ψηφίο (Σχήμα 1). Μοιάζουν με άπειρους δεκαδικούς που έχουν αντικατοπτρισθεί από την άλλη πλευρά της υποδιαστολής, με τη διαφορά ότι εξαιτίας του «κρατουμένου» δεν αντικατοπτρίζονται και οι πράξεις. Έτοιμοι, ουσιαστικά, αποτελούν ένα νέο αλγεβρικό αντικείμενο. Πάντως, για τους συνηθισμένους υπεραριθμούς αυτές οι πράξεις είναι οι συνηθισμένες πράξεις της πρόσθετης και του πολλαπλασιασμού. Έχει ενδιαφέρον το ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο υπεραριθμούς με οποιαδήποτε σειρά, χρησιμοποιώντας επίσης τη συνθισμένη μέθοδο —δείτε το Σχήμα 2. (Δεν γίνεται να εισαγάγουμε για τους υπεραριθμούς τη σχέση «μεγαλύτερος/μικρότερος» έτοιμο ώστε να ουμφωνεί με τις αλγεβρικές πράξεις όπως συμβαίνει με τους συνηθισμένους αριθμούς.) Ειδικά, κάθε υπεραριθμός μπορεί να αφαιρεθεί από τον μπέν (τον υπεραριθμό $\dots 000$). Επομένως, μπο-

ρούμε να βρούμε και όλους τους συνηθισμένους αρνητικούς αριθμούς ανάμεσα στους υπεραριθμούς. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3 βλέπουμε την ισόπτα $-132 = -999868$. Βλέπουμε ότι οι «συνηθισμένοι αρνητικοί ακέραιοι» είναι απλώς υπεραριθμοί με άπειρα 9 προς τα αριστερά.

Η πρόσθετον και ο πολλαπλασιαρός των υπεραριθμών (όπως και η αφαίρεση) έχουν τις συνηθισμένες ιδιότητες αυτών των πράξεων: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$, κ.λπ. Ειδικά, για κάθε υπεραριθμό x μπορούμε να υπολογίσουμε τον υπεραριθμό $x^2 - x$, και, από το θεώρημά μας, προκύπτει αρέσως ότι η εξίσωση $x^2 - x = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς λύσεις στους υπεραριθμούς: 0, 1, X και Y .

Αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα θέλαμε.

Πώς είναι δυνατόν;

Αν οι πράξεις με υπεραριθμούς ακολουθούν τους συνηθισμένους κανόνες, τότε και η συνηθισμένη απόδειξη ότι η εξίσωση $x^2 - x = 0$ έχει δύο λύσεις πρέπει να ισχύει και για τους υπεραριθμούς. Ας δούμε αν πράγματι ισχύει. Οπως και προηγουμένως, $x^2 - x = x(x - 1)$ — δεν υπάρχει τίποτε που να εμποδίζει αυτή την παραγοντοποίηση. Επομένως, αν $x^2 - x = 0$, τότε είτε $x = 0$ είτε $x - 1 = 0$. Γιατί όμως; Πώς γνωρίζουμε ότι το γινόμενο ab των υπεραριθμών a και b είναι μπέν μόνο και μόνο όταν ένας από αυτούς είναι μπέν; Στην πραγματικότητα, αυτό είναι λάθος! Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι $XY = 0$!

Πραγματικά, το x_k διαιρείται από το 5^k και το y_k διαι-

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \dots \\ a \quad + \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 6847 \\ 4219 \\ \hline 1066 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \dots \\ b \quad \times \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 6847 \\ 4219 \\ \hline 1623 \\ 6847 \\ 3694 \\ 7388 \\ \hline 7493 \end{array}$$

Σχήμα 1

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 6847 \\ 4219 \\ \hline 2628 \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline 7372 \end{array}$$

Σχήμα 2

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ - \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 0625 \\ 9376 \\ \hline 3750 \\ 4375 \\ 1875 \\ \hline 5625 \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline 00000 \\ 00132 \\ \hline 99868 \end{array}$$

Σχήμα 3

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \hline 0000 \end{array}$$

Σχήμα 4

ρείται από το 2^k , επομένως το γινόμενο $x_k y_k$ διαιρείται από το 10^k — δηλαδή καταλήγει σε k μπδενικά. Κατά συνέπεια, πολλαπλασιάζοντας τα X και Y φυφίο προς φυφίο, θα πάρουμε μόνο μπδενικά στο αποτέλεσμα. Για να διαλυθούν οι τυχόν αμφιθολίες σας, ρίξτε μια ματιά στο Σχήμα 4.

Εάν $a \neq 0$, $b \neq 0$ αλλά $ab = 0$, τότε τα a και b ονομάζονται διαιρέτες του μπδενός. Δεν υπάρχουν διαιρέτες του μπδενός ανάμεσα στους συνηθισμένους αριθμούς, αλλά μπορούμε να τους βρούμε στους υπεραριθμούς, και αυτό είναι η ουσία του ζητήματος.

Με την ευκαιρία, μπορούμε τώρα να επαληθεύσουμε ακόμη μία φορά ότι τα X και Y ικανοποιούν την εξισώση μας: αφού $X + Y = 1$ (θυμηθείτε ότι $x_k + y_k = 10^k + 1$ — δείτε την Άσκηση 1), $X(X - 1) = -X(1 - X) = -XY = 0$, και, οροίως, $-Y(Y - 1) = 0$.

Η εξίσωση $X^m = X$

Αν $x^2 = x$, τότε $x^3 = x^2 \cdot x = x \cdot x = x^2 = x$, $x^4 = x^3 \cdot x = x \cdot x = x^2 = x$, κ.ο.κ.: $x^5 = x$, $x^6 = x$, Επομένως οι τέσσερις λύσεις της $x^2 = x$ ικανοποιούν την $x^m = x$ για κάθε m . Όμως, έχει άλλες λύσεις η εξίσωση $x^m = x$:

Ας ξεκινήσουμε με το $m = 3$. Εκτός από τις 0, 1, X και Y , η εξίσωση $x^3 = x$ έχει τη λύση $X - Y$:

$$(X - Y)^3 = X^3 - Y^3 - 3XY(X - Y) = X - Y,$$

αφού $XY = 0$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $(X - Y)^2 = 1$, απ' όπου επίσης συνεπάγεται ότι $(X - Y)^3 = X - Y$. Επιπλέον, μπορούμε ν' αλλάξουμε το πρόσωπο οποιαδήποτε ρίζας της εξίσωσης $x^3 = x$ και να πάρουμε τέσσερις ακόρι λύσεις: -1 , $-X$, $-Y$, $Y - X$. Συνολικά, έχουμε βρει εννέα λύσεις:

$$0, 1, -1, X, -X, Y, -Y, X - Y, Y - X$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3 = x$ δεν έχει άλλες λύσεις.

Η περίπτωση $m = 4$ (και γενικότερα η περίπτωση κάθε άρτιου m — δείτε το θεώρημα που ακολουθεί) δεν έχει το ίδιο ενδιαφέρον.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις $x^4 = x$ και $x^2 = x$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Στην περίπτωση $m = 5$ προκύπτουν νέες λύσεις. Για να τις περιγράψουμε, αρκεί να παρουσιάσουμε μία από αυτές. Θεωρήστε μία ακολουθία z_k όπου $z_1 = 2$ και όπου κάθε όρος z_k αποτελείται από τα τελευταία k φυφία του z_{k-1} :

$$z_1 = 2, z_2 = 32, z_3 = 432, \dots$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι το z_k προκύπτει από το z_{k-1} με την προσθήκη ενός φυφίου στα αριστερά, και ότι το $z_k^5 - z_k$ διαιρείται με το 10^k για κάθε k .

Οι αριθμοί z_k ορίζουν τον υπεραριθμό

$$Z = \dots 9879186432.$$

Άσκηση 5. Η εξίσωση $x^5 = x$ έχει δεκαπέντε λύσεις: τις εννέα λύσεις της $x^3 = x$ (δείτε την Άσκηση 2) και τους υπεραριθμούς $Z, -Z, X - Z, Z - X, X + Z, -X - Z$.

Όταν το m παίρνει μεγαλύτερες τιμές δεν εμφανίζο-

νται νέες λύσεις. Ο αναγνώστης μπορεί να προσπαθήσει να αποδείξει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Όταν το m είναι άρτιο, π έξιωση $x^m = x$ έχει τις ίδιες λύσεις (στους υπεραριθμούς) με την εξίσωση $x^2 = x$. Αν το m έχει τη μορφή $4n - 1$, αυτή π έξιωση έχει τις ίδιες λύσεις με την εξίσωση $x^3 = x$. Και όταν το m έχει τη μορφή $4n + 1$, τότε π $x^m = x$ έχει τις ίδιες λύσεις με την $x^5 = x$.

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στην εξίσωση $x^m = 1$: Όταν το m είναι περιττό, τότε π $x^m = 1$ έχει μία μόνο λύση $x = 1$. Αν το m είναι άρτιο αλλά δεν διαιρείται με το 4, τότε π $x^m = 1$ έχει τέσσερις λύσεις: $1, -1, X - Y, Y - X$. Και όταν το m είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε π $x^m = 1$ έχει τις οκτώ λύσεις: $1, -1, X - Y, Y - X, X - Z, Z - X, X + Z, -X - Z$.

Δύο ακόμη εξισώσεις

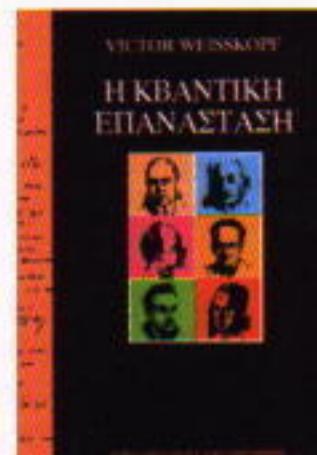
Άσκηση 6. Για ποιους (συνηθισμένους) αριθμούς m π έξιωση m = 1 έχει λύσεις στους υπεραριθμούς; (Δηλαδή, ποια συνηθισμένα κλάσματα μπορούμε να βρούμε ανάμεσα στους υπεραριθμούς;)

Άσκηση 7. Ισχύει το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat —«αν π είναι ένας (συνηθισμένος) ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2, τότε π έξιωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει καμία ρίζα»— για τους υπεραριθμούς x, y, z .

Συμπέρασμα

Μνη παραξενεύεστε αν π έννοια του υπεραριθμού οάς θύμιος κάτι. Είναι γνωστοί στους μαθηματικούς ως «ακέραιοι 10-αδικοί αριθμοί». Όλα τα προβλήματα ή, για να το διατυπώσουμε πιο θετικά, όλες οι εκπλήξεις που συναντήσαμε οφείλονται στο γεγονός ότι το 10 είναι σύνθετος αριθμός. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει p -αδικούς αριθμούς με p πρώτο αριθμό, (που ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, με τη διαφορά ότι τους γράφουμε χρησιμοποιώντας το αριθμητικό σύστημα που έχει βάση το p), π έξιωση μας $x^2 = x$ θα είχε δύο λύσεις, όπως ώφειλε. Στην πραγματικότητα, αν το σύστημα αριθμούς μας είχε ως βάση έναν πρώτο αριθμό, δεν θα είχαμε αρκετό υλικό για ένα παρόμοιο άρθρο.

Σειρά: ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

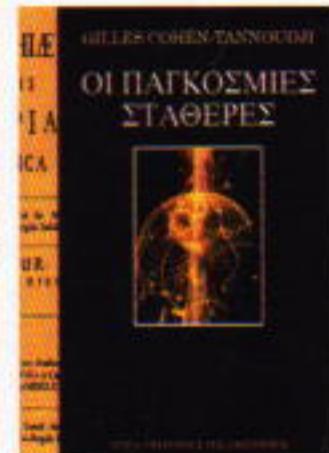


**Victor Weisskopf
Η ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ**

«Ο ανησυχος σύγχρονος άνθρωπος, όποια και αν είναι η μόρφωσή του, θα μπορέσει να καταλάβει, χάρη στα βιβλία αυτής της σειράς, τις νέες δυνατότητες της επιστήμης και τα προβλήματα που αυτές θέτουν στην κοινωνία.»

Albert Jacquard - La Croix

120 σελ., 1.800 δρχ.



**Gilles Cohén - Tannoudji
ΟΙ ΠΑΓΚΟΣΜΙΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ**

«Η σειρά Ορίζοντες της Επιστήμης αναδεικνύεται θεμελιώδης για τη διανόηση του καιρού μας...»

Max Gallo - Le Journal du Dimanche

137 σελ., 1.800 δρχ.

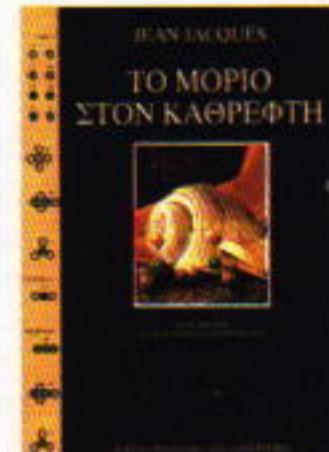


**Moshé Flato
Η ΙΣΧΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

«Κάθε βιβλίο αυτής της σειράς προσφέρει μια σαφή και επικαιρη σύνθεση ενός σημαντικού πεδίου έρευνας.»

L'Événement du Jeudi

108 σελ., 1.600 δρχ.

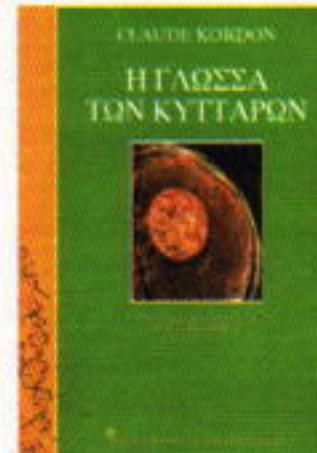


**Jean Jacques
ΤΟ ΜΟΡΙΟ ΣΤΟΝ ΚΑΘΡΕΦΤΗ**

«Με τη σειρά Ορίζοντες της Επιστήμης, οι Εκδόσεις Hachette επέλεξαν τον καλύτερο τρόπο εκλαϊκευσης της επιστήμης. Η προσπάθεια είναι απολύτως επιτυχημένη.»

Le Monte Diplomatique

157 σελ., 2.000 δρχ.



**Claude Kordon
Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ**

«Πρέπει όλοι να μελετήσουμε αυτές τις ουσιώδεις πληροφορίες, για να κατανοήσουμε την τόσο πλούσια σε αντιθέσεις, απορίες και προσδοκίες εποχή μας.»

Le Figaro

119 σελ., 1.800 δρχ.

Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα, Τηλ.: 36 43 272, 36 45 098, Fax: 36 41 864

Προκλήσεις στη Φυσική και τα Μαθηματικά

Μαθηματικά

M11

Σύγκριση της μέσης πλευράς και της μέσης διαγωνίου. Αποδείξτε ότι ο αριθμητικός μέσος των μηκών των πλευρών ενός τυχαίου κυρτού πολυγώνου είναι μικρότερος από ή ίσος με τον αριθμητικό μέσο των μηκών των διαγωνίων του. (V. Lev)

M12

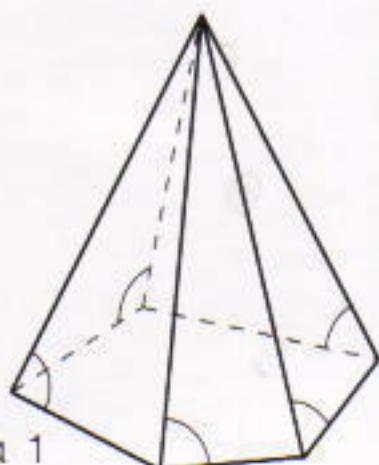
Γείτονες στα αριστερά. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταθέσουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$ ώστε οποιοδήποτε αριθμός i ($1 \leq i \leq n$) — που δεν βρίσκεται στην πιο αριστερή θέση — να έχει έναν τουλάχιστον από τους «γείτονές» του $i - 1$ και $i + 1$ σε κάποια από τις θέσεις που βρίσκονται αριστερά του; (A. Anjans)

M13

Διαλέγοντας τον 2 φορές μεγαλύτερο. Έχουμε έναν πίνακα με m γραμμές και n στήλες που περιέχει διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς. Μερικοί αριθμοί είναι υπογραμμισμένοι — και συγκεκριμένα, οι k μεγαλύτεροι αριθμοί σε κάθε στήλη (όπου $k \leq m$) και οι l μεγαλύτεροι αριθμοί σε κάθε γραμμή (όπου $l \leq n$). Αποδείξτε ότι τουλάχιστον kl αριθμοί είναι υπογραμμισμένοι δύο φορές. (S. Konyagin)

M14

Συνθήκη κανονικότητας. Η βάση $A_1A_2\dots A_n$ μιας n -γωνικής πυραμίδας



Σχήμα 1

$PA_1A_2\dots A_n$ έχει ίσες πλευρές $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$. Οι γωνίες PA_1A_2 , PA_2A_3 , ..., PA_nA_1 είναι επίσης ίσες (Σχήμα 1). Αποδείξτε ότι η πυραμίδα είναι κανονική — δηλαδή ότι η βάση της είναι κανονικό n -γωνο και ότι το ύψος της διέρχεται από το κέντρο της βάσης της. (V. Senderov και V. Dubrovsky)

M15

Η πιο απόκρημνη παραβολή. Βρείτε τον ελάχιστο θετικό αριθμό A τέτοιου ώστε για κάθε δευτεροβάθμια συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί την $|f(x)| \leq 1$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$ να ισχύει η ανισότητα $|f'(1)| \leq a$. (V. Pikulin)

Φυσική

Φ11

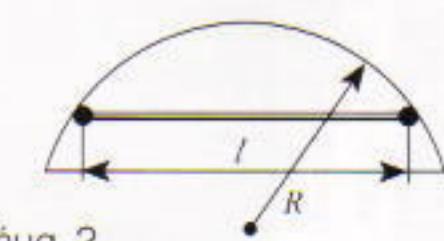
Τίχνη στο νερό. Ένα έντομο μπορεί να περπατήσει στην επιφάνεια του νερού χωρίς να βουλιάζει εξαιτίας της επιφανειακής τάσης. Ποια μορφή έχουν τα «ίχνη» που αφήνει πάνω στην επιφάνεια του νερού ενός ποταρού που κυλά πέρα, όταν το έντομο παραμένει ακίνητο σε σχέση με την όχθη του ποταρού; (S. Krotov και A. Stasenko)

Φ12

Σφυνωμένη κάτω από θόλο. Για ποιες τιμές του συντελεστή τριβής μπορεί να παραμείνει σε οριζόντια θέση κάτω από ένα θόλο ακτίνας R μια οτερεύ ράβδος μήκους l με άκρα από καουτσούκ (Σχήμα 2); (D. Grigoryev)

Φ13

Τοίχι στο θερμός. Για να επιτύχουμε ικανοποιητική θερμική μόνωση, αφαιρούμε τον αέρα από το χώρο που βρί-



Σχήμα 2

σκεται ανάμεσα στο εξωτερικό και στο εσωτερικό τοίχωμα ενός θερμός, επιτυγχάνοντας πίεση $P = 10^5$ atm σε θερμοκρασία δωματίου. Ο δύκος του δοχείου είναι 1 lt, και το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι $S = 600$ cm². Εκτιμήστε το χρόνο που θα χρειαστεί για να ψυχθεί το τούι από τους 90°C στους 70°C. Η ειδική θερμότητα του νερού είναι $c = 4,2 \times 10^3$ Joule / (kg · K) και η παγκόσμια σταθερά των αερίων είναι $R = 8,3$ Joule / (K · mol). Αγνοήστε τις απώλειες θερμότητας από το σκέπασμα του θερμός. (A. Stasenko)

Φ14

Σωματίδιο κοντά σε καλώδιο. Ένα φορτισμένο σωματίδιο με κινητική ενέργεια E_k περνά κοντά από ένα μακρύ, ομοιόμορφα φορτισμένο καλώδιο. Το σωματίδιο κινείται σε επίπεδο που είναι κάθετο στο καλώδιο και αποκλίνει από την αρχική διεύθυνση κίνησής του κατά μια μικρή γωνία a (Σχήμα 3). Βρείτε την a υποθέτοντας ότι το φορτίο του σωματιδίου είναι e , το δε φορτίο ανά μονάδα μήκους του καλωδίου είναι λ . Η ένταση του πλεκτρικού πεδίου σε απόσταση R από το καλώδιο, έχει τιμή $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 R$. (V. Mozhayev)



Σχήμα 3

Φ15

Φως μέσα από έναν φακό. Μια δέομη φωτός κατευθυνόμενη προς έναν λεπτό φακό τέμνει τον κύριο άξονά του υπό γωνία $\alpha = 4^\circ$ και σε απόσταση $d = 12$ cm μπροστά από το οπτικό κέντρο του φακού, και εξέρχεται από αυτόν σχηματίζοντας (με τον κύριο άξονα) γωνία $\beta = 8^\circ$. Βρείτε την εστιακή απόσταση του φακού. (V. Deryabkin)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ
ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

ΚΑΛΕΙΔΟΣΚΟΠΟ

Μενούτικό Εργαστήριο

Αφήστε το μωλό σας να κάνει άλματα

Anatoly Savin

Oι κανόνες αυτού του παιχνιδιού είναι ιδιαίτερα απλοί. Σε κάποια από τα πιο παρακάτω πλαίσια θα βρείτε ένα πρόβλημα και τρεις μήθαρές απαντήσεις. Το πού θα ρευματίζονται εσφράγισται από την απόφασην που θα επιλέξετε. Σε δίλλα πλαισια θα βρείτε υποδείξεις ή πις σωστές απαντήσεις και οδηγίες για το πώς θα πάτε στη συνέχεια — είτε επιορίζετε στο προηγούμενο πρόβλημα είτε προχωρείτε στο ένα καινούργιο. Αν υποχρεωθεί-

τε μερικές φορές να επιστρέψετε σε προηγουμένο πλάιο, μην πιστεύτε — πάντοτε μπορείτε να κερδίσετε κάτι, ακόριν και από ένα ταξίδι στα ίδια μέρη! Αν θέλετε, απρέδωτε τη διαδρομή σας στο περιθώριο.

Αν γνωρίζετε λίγο προγραμματισμό, μπορείτε εύκολα να μετατρέψετε το παχιδί αυτό σε πλαχιδί για υπολογιστή. Οα μπορούσατε επίσης να προσθέστε και μερικές δικές σας εργασίες.

Προσανθίστε να τηνετε μια πρωινή παραφύτικη ή εύελιξη που θα σαλέψει από όλες τις κομψές της. Μην προσπαθείτε να τετράγετε; Με ποσούς προσούς μπορεί να το φέρετε με γρεζ σπαστικές στο 6. Με γρεζ πηγαδιέτε στο 16. Με γρεζ πηγαδιέτε στο 11.

7 Ασπίδα! Το σπίριτο δεν είναι σύρι
η πόλη των βικτόρων των γάνων του
νομού της Ηγετού
οντας με την πόλη
την από την οποία
πάλι τον γάνων του
νομού της Ηγετού
προσέρχεται στην
πόλη της Ηγετού

περος από τους γρεγοριανούς. Επιστρέψτε στο 5.

20
expirano 17.

Αν προβλέψεις να αναπτύξουμε από τώρα το διάστημα από το 30 παραπομπές, και απός δύο περιπόσεις, ένα τέλος τετράγωνο. Οι αριθμοί είναι αυτοί που πιστοποιήθηκαν στην παραγωγή της παραγωγής.

Ένετε υπόλιτο δίκαιο! Ο αριθμός 1
σαν είναι σαν πρώτος σανε σύνθητος.
Φυσικά, αυτό είναι απλός θέριο ουρ-
φωνίας μεριδών των μεθηματικών. Πο-
λυτέρα ο αριθμός 1 θεωρούνταν
πρώτος, αλλά φροντέρα κρίθηκε προ-
πότερο να μη θεωρείται σαν πρώτος
σαν σύνθητος. Πινετες στο 17

Η εξίσωση $x^2 = 2^x$ έχει
πέντε λύσεις: πιο μικρή είναι οριός
δύο λόγως: πιο μεγάλη είναι οριός
τριες λόγως: πιο μεγάλη είναι οριός

Βρίσκεται κοντά στην αλιθια. Αν διαλέξουμε το 34 αυτή για το 30 ο φρόπος ή θα είναι προηγμένος πολύτικος - και αυχεκρίμενος, ο $\delta = 290$. Επομέρη-
τε στο 13.

πάντοτε μηροπέτε να κερδίσετε κάτι, ακόμη και από ένα ταξίδι ουα μέρη! Αν θέλετε, απρέσοντε τη διαδρομή ους στο περιθώριο. Αν γνωρίζετε λίγο προγραμματισμό, μηροπέτε εύκολα να μεταφέρετε το πανίδι αυτό σε παχύβια για υπολογιστή. Θα μηροποιείτε όμως να προσθέσετε και μερικές δικές ους εργασίες.

Oτα παρακάτω πλαισια θα βρείτε ένα πρόβλημα κατ τρεις μήθανές αναγνοετε. Το πώς θα πετανόποετε εξαρχίαται από την ανάντην που θα επλέξετε. Σε δλλα πλαισια θα βρείτε υποδείξεις πις σοορές ανανύοεις και οδηγίες για το πώς θα πάτε στη συνέχεια —τίτε επιορέφετε στο προγούμενο πρόβλημα είτε προχωρείτε σ' ένα καινούργιο. Αν υποχρεωθεί-

Il proponeva una politica più avventurosa del Segretario dell'Industria, che era anche un suo socio nel suo gruppo. Mentre il Segretario dell'Industria aveva deciso di non voler più fare affari con i comunisti, il Segretario della Difesa voleva invece che la Francia partecipasse alle guerre mondiali. Il Segretario della Difesa voleva anche che la Francia partecipasse alle guerre mondiali.

Αν προσέρχεται σε
απόλυτη απόφαση την ημέρα
την οποία ακέρινο αριθ-
μό ή το 30, παίρνου-
με, και στη σύνθετη πε-
ριόδο σεις, έτα τη-
λει ταρπάγεται. Οι
αριθμοί από τη συνή-
μη διάσταση είναι:
διάρροη: πηγαίνετε στο 22.
ένοια: πηγαίνετε στο 2.
δύο: πηγαίνετε στο 10.

19

Αλιά ή ανάνεωση ήταν η πρώτη στάση της ομάδας στην Αθήνα, όπου οι φίλοι της έπιασαν την ευκαιρία να πάρουν μερικές διακοπές στην πόλη. Το μεσημέρι της ημέρας, οι φίλοι της έπιασαν την ευκαιρία να πάρουν μερικές διακοπές στην πόλη. Το μεσημέρι της ημέρας, οι φίλοι της έπιασαν την ευκαιρία να πάρουν μερικές διακοπές στην πόλη.

21
Ora. Enseñan
solamente
el desarrollo
de la cultura
y el desarrollo
de la ciencia,
que es la que
nos enseña
que el desarrollo
de la cultura
es el desarrollo
de la ciencia.

Kết quả này có thể giải thích bằng cách sau đây: Khi n tăng, ta thấy rằng $\frac{1}{n}$ và $\frac{1}{n^2}$ đều giảm, do đó $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ cũng giảm. Tuy nhiên, $\frac{1}{n}$ và $\frac{1}{n^2}$ đều là số dương, do đó $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$. Khi n càng lớn, $\frac{1}{n}$ càng nhỏ, do đó $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ càng gần với $\frac{1}{n}$.

Βρίσκοτε κοντά στην Αλικαία. Αν δεν λέξουμε το 4 αντί για το 30 ο φρί-
κης μι θα ήταν προηγμέ-
νων ιδιούδικος - και αυτό κεκρι-
μένη, ο $a = 290$. Επιπρέπε-
τε στο 13

Dr. Evans will present
so-called 'soft' bonding techniques,
which involve the use of
epoxies that can be applied
in thin layers onto
substrates. This
method is claimed to
allow the use of
epoxies that are
not normally used
in such applications.
The new technique
is claimed to be
able to produce
epoxy bonds that
are as strong as
those produced by
conventional
bonding methods.

8

Βρισκότε κοντά στην
αλυκέα. Αν διαλέξουμε το
34 αυτή για το 30 ο φρο-
ντος π θα είναι προγραμμα-
τεωδικός - και σιγκεκρι-
μένα, ο $a = 200$. Επιστρέψ-
τε στο 13.

9
Autos o aplicaciones móviles o tablets que nos permiten acceder a la información de los viajes y reservarlos directamente en el móvil.

if you're not sure what to do, go
see your doctor or a pharmacist.
They can help you decide what
to do.

Επιτέλους απαντούμε των εστό του και την πρόσδικη σύνθημα περίπτωση του 1 αυτού ο δύο αριθμοί ταυτίζονται. Επιχρέψτε στο 4.

17

Αυτός ο αριθμός δεν είναι ο μηνόρος από τους τρεις, αλλά δεν είναι ουτός ο μεγαλύτερος. Επιστρέψτε στο 5.

9

Αυτάριστο, κάνετε λόγος. Τι κέντρα μάς ενδιέφερε της περιμέτρου του είναι, εν γένεται, διαφορετικά. Επιστρέψτε στο 17.

15

Μα τα πήγουτε κατ' αρχήν, αλλά δεν τη βρίσκετε δύλες. Προσπιθέτε να σχεδίαστε της υραφών, παραστέστε την $y = x^2$ και $y = 2$. Μεληθοτε τες και επιστρέψτε στο 8.

4

Ο αριθμός 1 είναι πράκτορας της πηγής στο 21. Ο αριθμός πηγής στο 23, κατάλληλα τη δύση πηγής στο 14.

22

Κάνατε λόγος. Παρατηρήστε πώς όταν ανδάνετε το n , αυξάνεται επίσης η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων ($n + 1$) και n^2 , που ισούται με $2n + 1$ και ότι για $n > 30$ γίνεται μεγαλύτερο από το 60. Επομένως, το πλήθος των αριθμών a^2 είναι πεπερασμένο. Επιστρέψτε στο 13.

16

Δεν έχετε εξεταστεί όλες τις διατάξεις θέσεως του επιτρέπεται. Είστε από την περιπόνων που έγινε θεατρικός, υπόρετης κατάλληλη, λαγόνταρο φραγκρή. Επιστρέψτε στο 1.

10

Σαστά! Οι δύο αριθμοί είναι ο 34 και ο 266. Προγράμμα, αν $a + 30 = n$ και $a - 30 = m$, τότε $60 = (n - m)(n + m)$. Οι δύο παρθύνοντας του δεξιού μέλους είναι είτε φρακός και ο δύο είτε περσιτός και ο δύο διαφέρονταν κατά 2m). πράγμα που είναι δινοτόν τε δύο περιπτώσεις: όταν $n + m = 30$ και $n - m = 2$, ή δύτικα $n + m = 10$ και $n - m = 6$. Ειστε προκύπτων δύο λόγως με $n = 16$, $m = 14$ και $n = 8$, $m = 2$, και όποις $a = 226$ και 34 συνιστούχα. Πηγαίνετε στο 5.

23

Καλά, πώς προέρχετε στην είναι δύνατος: 'Ένας σύνθετος φριθός έχει εξ οριού δύο διαιρέτες διαιροθήσιους από το 1. Επιστρέψτε στο 4.'

24

Έχετε απολύτως διάλογο! Ο μηχανισμός από τον ίδιον τον ίδιον παράγοντα $2^6 = 2.048$, $9 = 729$, $7 = 2.401$.

18

Ματέρετε σοσσά! Μην πείτε, όμος, να αποδεξείτε ότι υπόρχουν ακριβώς τρεις λόγοις. Αυτός είναι οι αριθμοί 2, 4, και $-0.76664\dots$. Πηγαίνετε στο 4.

12

Αυτό είναι λόγος. Σκεφτείτε το με την πουλιά σας! Υπάρχει τουλάχιστον μια δύον λίστα, ασύμμαχη ακέραια. Επιστρέψτε στο 8.

6

Βρίσκετε τη λιγότερο φραγκές θέσης των επινόδων, ψάξτε για κάτι απλούστερο. Επιστρέψτε στο 1.

21

εστό του και την πρόσδικη σύνθημα περίπτωση του 1 αυτού ο δύο αριθμοί ταυτίζονται. Επιχρέψτε στο 4.

Συγχαρητήρια, τα καταφέρατε! Ελπίζουμε να ακολουθήσετε τη συντομότερη διαδρομή: 1 - 11 - 8 - 18 - 4 - 14 - 17 - 7 - 13 - 10 - 5 - 24. ☐

Το μεγάλο πρόβλημα των διαστημικών πτήσεων

Kai η ανάσταση των προγόνων

Albert Stasenko

Ιατί ένα μεγάλο πρόβλημα; Μήπως δεν υπάρχουν αρκετά προβλήματα που ταλαιπωρούν τους ανυπέρασπιστους μαθητές; Χρειαζόταν και το παρακάτω;

Φανταστείτε πως ένας αστροναύτης που μαστορεύει κάτι σε κάποιο μέρος του αχανούς Διαστήματος στραβοκαταπίνει ένα φουντούκι και χρειάζεται να μεταφερθεί το ταχύτερο δυνατόν από το διαστημόπλοιο οποίος κινείται παράλληλα με το διαστημόπλοιο, σε απόσταση 100 km από αυτό, και με ίση ταχύτητα. Η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αντέξει ο αστροναύτης είναι $4g$, όπου g η επιτάχυνση της Βαρύτητας. Το ερώτημα που αυτοράτως εγείρεται για τον κυβερνήτη του διαστημοπλοίου είναι: πόσο ελάχιστη ποσότητα καυσίμων χρειάζεται ο πύραυλος-ασθενοφόρο για να μεταφέρει τον ασθενή στο ιατρικό κέντρο του διαστημικού σταθρού το ταχύτερο δυνατόν; Η ταχύτη-

τα με την οποία εξέρχονται από τον πύραυλο τα αέρια της καύσης είναι σταθερή και ίση με 2 km/sec .

Ο κυβερνήτης, από συνήθεια μάλλον, κάνει αμέσως τις εξής σκέψεις: Εστω u η ταχύτητα και m η μάζα του πυραύλου μια δεδομένη χρονική στιγμή. Νομάδη μπορούμε να διαχωρίσουμε τον πύραυλο σε δύο μέρη (Σχήμα 1): το ένα (τα αέρια της καύσης), με μάζα ΔM , το οποίο σε χρονικό διάστημα Δt θα κινηθεί προς τα πίσω το άλλο (που περιλαμβάνει τον αστροναύτη), με μάζα $m - \Delta M$, το οποίο θα κινηθεί προς τα εμπρός και στο ίδιο χρονικό διάστημα θα έχει αποκτήσει ταχύτητα $u + \Delta u$. Έστω u_0 η σχετική ταχύτητα των εξερχόμενων αερίων ως προς τον πύραυλο: τότε η ταχύτητά τους ως προς το σημείο εκκίνησης του πυραύλου θα είναι $(u + \Delta u) - u_0$. Επειδή ο διαχωρισμός των δύο μερών του πυραύλου οφείλεται στη δράση εσωτερικών δυνάμεων, η ολική ορμή του συστήματος πυραύλου-αερίων

καύσης θα διατηρείται σταθερή (στο ούστημα αναφοράς του διαστημικού σταθμού και του διαστημοπλοίου, τα οποία κινούνται παράλληλα μεταξύ τους με την ίδια σχετική ταχύτητα ως προς τα άστρα), οπότε:

$$(m - \Delta M)(u + \Delta u) + \Delta M(u + \Delta u - u_0) = mu.$$

Εκτελώντας τις πράξεις (ο κυβερνήτης έμαθε να τις κάνει από μνήμης όταν βρισκόταν στη Γη), η αρχή διατήρησης της ορμής παίρνει τη μορφή:

$$m\Delta u = u_0\Delta M. \quad (1)$$

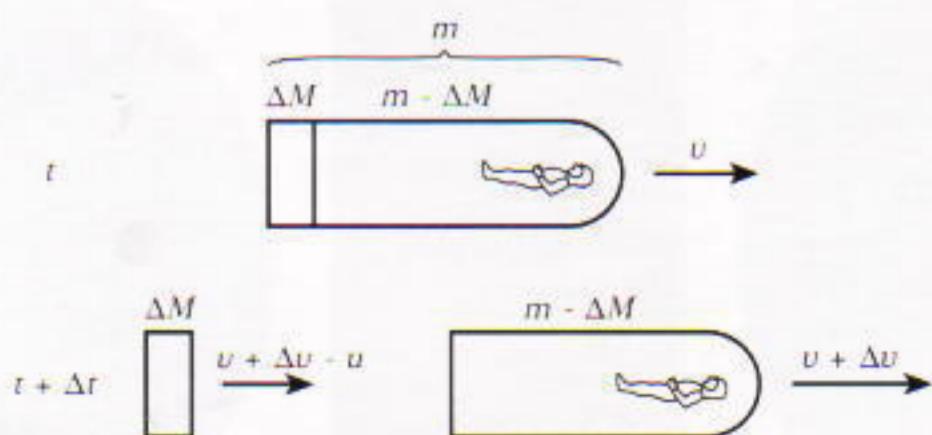
Θεωρώντας ότι η μάζα των εξερχόμενων αερίων είναι ίση με την ελάττωση της μάζας του πυραύλου ($\Delta M = -\Delta m$), μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (1) ως

$$\frac{\Delta u}{u_0} = -\frac{\Delta m}{m}. \quad (2)$$

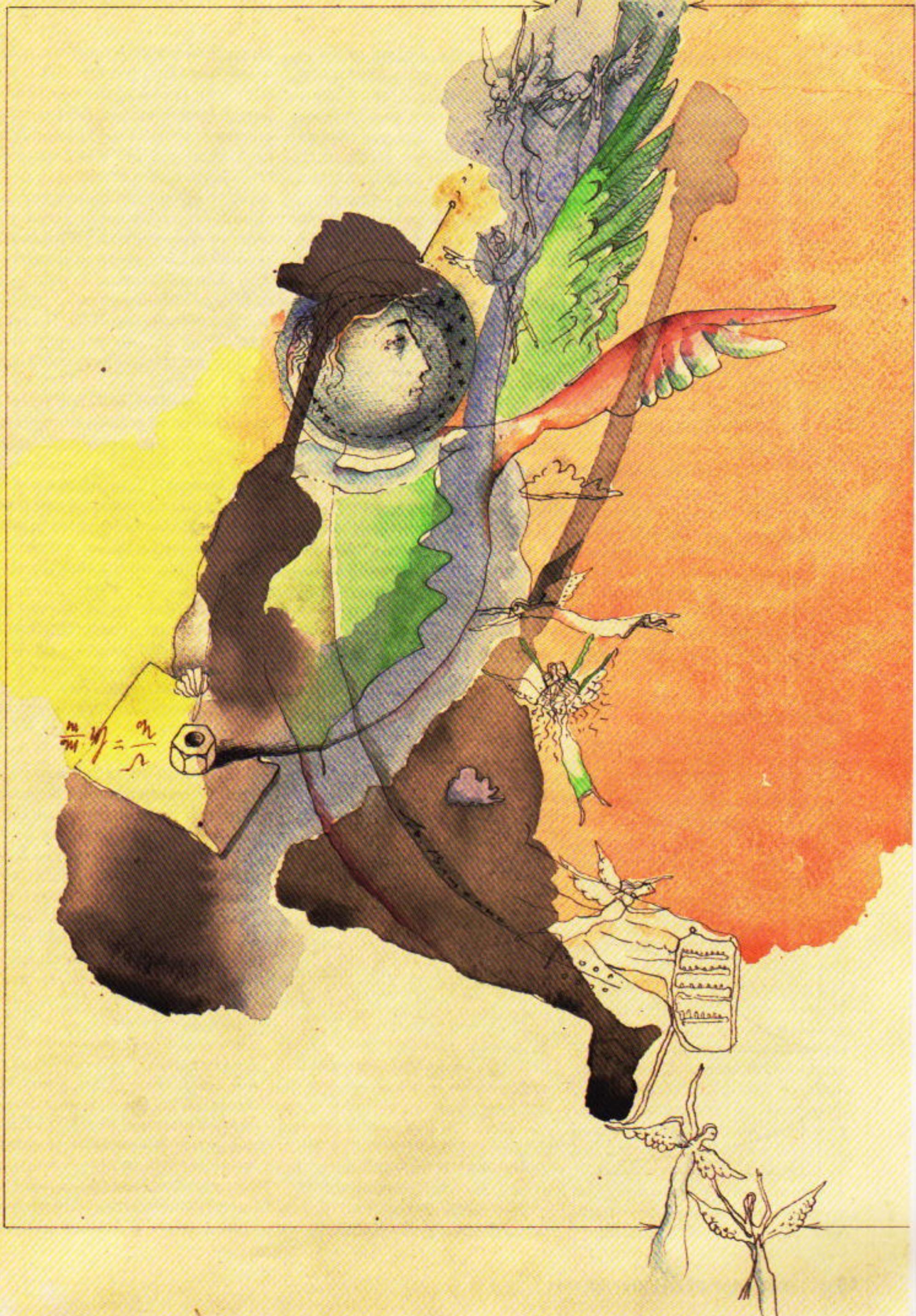
«Μα καλά», θα σκεφτείτε, «αυτός ο φανταστικός κυβερνήτης δεν άνοιγε βιβλίο όταν σπούδαζε;», δεδομένου ότι η στοιχειώδης ολοκλήρωση της εξίσωσης (2) μας δίνει τον τύπο του Tsiolkovsky, τον οποίο βεβαίως έπρεπε να γνωρίζει:

$$\frac{u}{u_0} = \ln \frac{m_0}{m} \quad (3)$$

(όπου υποθέτουμε ότι τη στιγμή $t = 0$ η μάζα του πυραύλου ήταν m_0). Παρ' όλα αυτά, πρέπει να σας κα-



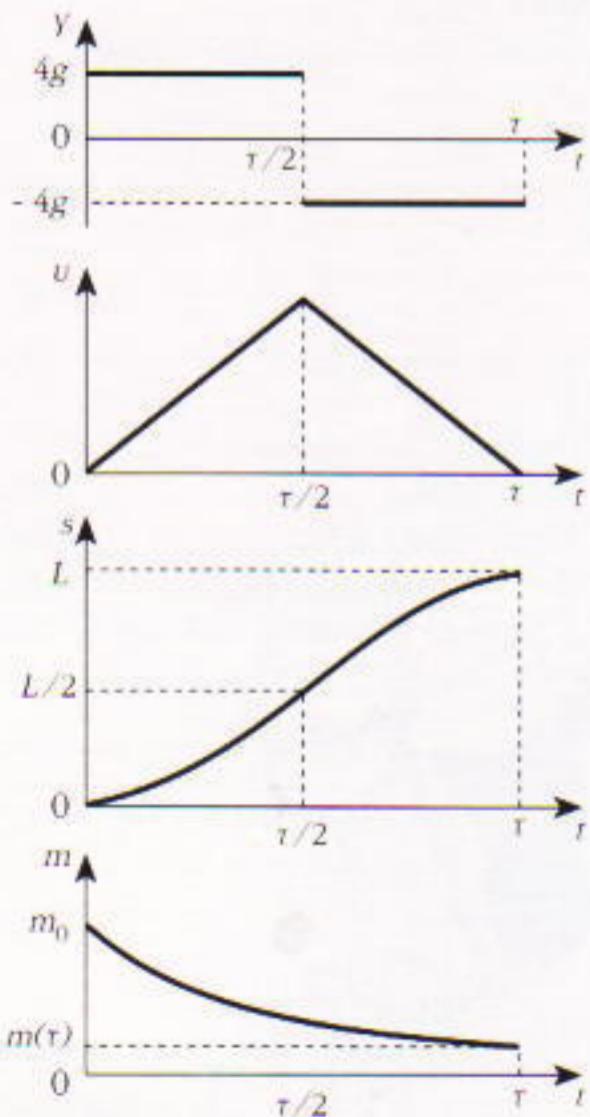
Σχήμα 1



Θησυχάσω διαβεβαιώνοντάς σας ότι ο κυθερνήτης γνώριζε την εξίσωση (3), διαφορετικά πώς θα μπορούσε να γίνει αστροναύτης; Οι διαταγές που είχε πάντα να μεταφέρει τον ασθενή συνάδελφό του όσο γρηγορότερα γινόταν, χωρίς δύναμη να επιταχύνει περισσότερο από $4g$, γεγονός που σημαίνει ότι κατά την πτήση η επιτάχυνση του σκάφους πρέπει να είναι σταθερή —δηλαδή $\gamma = \gamma_{\max} = 4g$. Αυτό μας υποχρεώνει να επανέλθουμε στην εξίσωση (2) [τη διαφορική μορφή της εξίσωσης (3)] και, διαιρώντας με Δt , να θέσουμε $\Delta u / \Delta t = 4g = \text{σταθερό}$. Εισάγοντας στην εξίσωση (3) τον τύπο $u = 4gt$, λαμβάνουμε τελικά την εξίσωση που εκφράζει τη μεταβολή της μάζας του πυραύλου (και που οποία πρέπει να εισαχθεί στον υπολογιστή του σκάφους)

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{4gt}{u_0}} \quad (4)$$

Συχνά στα βιβλία μελετάται μια άλλη περίπτωση, στην οποία ισχύει η συνθήκη του σταθερού ρυθμού μ , κατανάλωσης καυσίμων. Δηλαδή μ



Σχήμα 2

= σταθερό (σε kg/sec) και $m(t) = m_0 - \mu t$. Η συνθήκη αυτή, δύναται, οδηγεί σε συνεχή αύξηση της επιτάχυνσης, η οποία μπορεί να παραβιάσει τη συνθήκη του δικού μας προβλήματος ($\gamma_{\max} = 4g$). Άρα, λοιπόν, ο κυθερνήτης μας, κάτι γνώριζε που ακολούθησε την παραπάνω τρόπο λύσης.

Δεν μένουν πια πολλά για να κάνουμε. Ο πύραυλος-ασθενοφόρο πρέπει να φτάσει στον διαστημικό σταθμό με μηδενική ταχύτητα. Κάθε μικρή αλλά πεπερασμένη ταχύτητα θα δημιουργούσε κατά την επαφή μαζί του απείρως μεγάλη επιβράδυνση, η οποία απαγορεύεται. Στο πρόβλημά μας η κίνηση γίνεται με σταθερή επιτάχυνση. Επομένως, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τη μεταβολή των μεγεθών της κίνησης του πυραύλου σε συνάρτηση με το χρόνο (βλ. Σχήμα 2). Φαίνεται ότι στη μέση της τροχιάς του πυραύλου, τη χρονική στιγμή $t = \tau/2$ (όπου τ ο ολικός χρόνος της κίνησης), πρέπει να αντιστραφεί η φορά της πρωτοτικής δύναμης. Από τους γνωστούς τύπους της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση παίρνουμε:

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 = \frac{g\tau^2}{2},$$

από όπου προκύπτει:

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Η τελική μάζα του πυραύλου θα ισούται με

$$\frac{m(\tau)}{m_0} = e^{-\frac{4g}{u_0} \sqrt{\frac{L}{g}}} = e^{-\frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{10^5}{10}}} = \frac{1}{e^2}.$$

Επομένως, η μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν (και τα οποία αποτελούσαν μέρος της αρχικής μάζας του πυραύλου) προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 1 - \frac{1}{e^2}$$

(όπου θεωρήσαμε ότι όλα τα καύσιμα καταναλώνονται ακριβώς ως τη στιγμή που ο πύραυλος συνδέεται στον διαστημικό σταθμό).

Ας εξετάσουμε τώρα ένα άλλο πρό-

βλήμα. Αντί για φουντούκι ο αστροναύτης μας καταπίνει ένα ολόκληρο σάντουιτς (γεγονός όχι τόσο δραματικό) μόλις αντιλαμβάνεται ότι ένα εχθρικό διαστημόπλοιο να πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα $v_0 = 2 \text{ km/sec}$. Πόσο κοντά πρέπει ν' αφήσει να πλησιάσει το εχθρικό διαστημόπλοιο πριν εξαπολύσει ένα πυρπνικό βλήμα, αν θέλει το βλήμα του να χτυπήσει το εχθρικό σκάφος με τη μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια; Τα συστήματα ελέγχου του βλήματος αντέχουν σε επιταχύνσεις έως $100g$. Η ταχύτητα εξόδου των αερίων είναι η ίδια με αυτή στο προηγούμενο πρόβλημα ($u_0 = 2 \text{ km/sec}$).

Είναι σαφές ότι το βλήμα πρέπει να κινηθεί με τη μέγιστη επιτάχυνση $\gamma = \gamma_{\max} = 100g$ και ότι δεν υπάρχουν λόγοι για ν' αλλάξει η κατεύθυνση της πρωτοτικής δύναμης. Η σχετική ταχύτητα του βλήματος ως προς το στόχο μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $u = u_0 + \gamma t$, και η απόσταση μεταξύ τους δίνεται από την εξίσωση $s = s_0 - u_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2$.

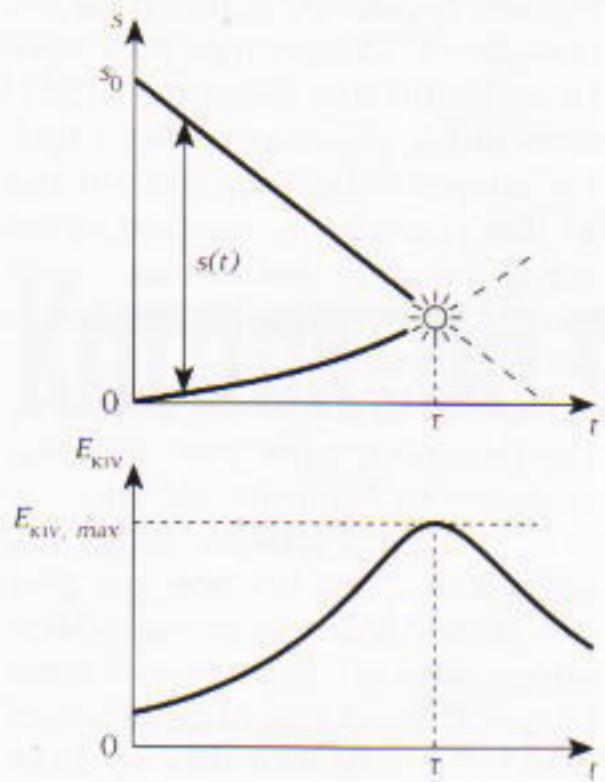
Με τη βοήθεια της εξίσωσης (4) μπορούμε να εκφράσουμε την κινητική ενέργεια του βλήματος ως

$$E_{\text{kin}} = \frac{mu^2}{2} = \frac{m_0}{2} e^{-\frac{u}{u_0}} (u_0 + \gamma t)^2.$$

Είναι γνωστό ότι το γινόμενο μιας φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης επί μία αύξουσα τριώνυμη συνάρτηση δευτέρου βαθμού παρουσιάζει ένα μέγιστο. Αυτό το μέγιστο μπορεί να βρεθεί από τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο (Σχήμα 3). Όσοι αναγνώστες γνωρίζουν διαφορικό λογισμό μπορούν να θέσουν την πρώτη παράγωγη της κινητικής ενέργειας ως προς το χρόνο ίση με μηδέν: $dE_{\text{kin}}/dt = 0$, από όπου προκύπτει:

$$-\frac{(u_0 + \gamma t)^2}{u_0} + 2(u_0 + \gamma t) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες. Η μία αντιστοιχεί στο $u_0 + \gamma t = 0 \Rightarrow t_1 = -(u_0/\gamma) < 0$, (η $u_0 > 0$, διότι το διαστημόπλοιο πλησιάζει). Η ρίζα αυτή αναφέρεται στο παρελθόν και δεν μας ενδιαφέρει. Η δεύτερη ρίζα εί-



Σχήμα 3

ναι $t_2 = \tau = (2u_0 - v_0)/\gamma$, π. οποία σύρφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος δίνει

$$\tau = \frac{2 \cdot 2 - 2}{10^3} 10^3 = 2 \text{ sec.}$$

Αυτή η ρίζα μπορεί να είναι αρνητική αν $v_0 > 2u_0$, το οποίο συμβαίνει όταν το εχθρικό σκάφος πλησιάζει τόσο γρήγορα ώστε το βλήμα έχει αρκετό χρόνο για να αποκτήσει την ταχύτητα που αντιστοιχεί στη μέγιστη κινητική ενέργεια

$$E_{kiv} = \frac{2m_0 u_0^2 e^{-\frac{v_0}{\gamma}}}{c^2}.$$

Τελικά βρίσκουμε τη ζητούμενη απόστασην από την εξίωση $s(t)$, θέτοντας $s(\tau) = 0$ για $t = \tau$. Έτσι,

$$s_0 = \frac{4u_0^2 - v_0^2}{2\gamma} = 6 \text{ km.}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την εξίωση (3) καταφέραμε να λύσουμε δύο προβλήματα τόσο διαφορετικά ως προς τους οκοπούς τους. Το ένα αναφέρεται στην αλληλεγγύη και το άλλο στην εξόντωση, και στις δύο περιπτώσεις, όμως, χρησιμοποιείται εξελιγμένη τεχνολογία. Μήπως το ανθρώπινο γένος είναι εγκλωβισμένο για πάντα σ' έναν φαύλο κύκλο δυμιουργίας και καταστροφής, σε πεί-

ομα των συνεχώς αυξανόμενων γνώσεών μας; Είχαν δίκιο τα μεγαλύτερα πνεύματα της εποχής μας να είναι απαιτούμενα;

«Τέλειες μέθοδοι και ασφαλείς οκοποί — αυτά είναι, κατά τη γνώμη μου, τα χαρακτηριστικά της εποχής μας.» (Άλμπερτ Αϊνστάιν)

«Οι φτερωτές μας οκέφεις μετατρέπουν σε πουλερικά.» (Henry David Thoreau)

«Προοκολλημένοι στην παλιά πρακτική, θεωρούμε απλώς την εποτήμη μως έναν νέο τρόπο για ν' αποκομιδούμε τα ίδια παλιά αγαθά, ωφελούμενοι και καλλιεργήσιμη γη. Δέσαμε τον Πίγασο στ' αλέτρι.» (Pierre Teilhard de Chardin)

Υπάρχει ακόμη ελπίδα. Κατ' αρχάς η ίδια π πτήση είναι κάτι περιοστέρο από μεταφορά από ένα σημείο Α σε ένα Β. Μήπως θυμάστε τι νιώσατε την πρώτη φορά που πετάχατε με αεροπλάνο, κοιτάζοντας από κάτω τα ούννεφα και από πάνω την άβυσσο γεμάτη αστέρια ή τον Ήλιο να λάμπει; (Οι φυσικοί ήθελαν από τα πανάρχαια χρόνια να πετάξουν, αρχίζοντας απ' τον Δαίδαλο —σίγουρα ήταν φυσικός— και τον απείθαρχο γιο του Ίκαρο.) Για παράδειγμα, το 1783 ο Jacques Alexander Caesar Charles, ειδικός στους νόμους των αερίων, κατασκεύασε ένα αερόστατο ακριβώς μετά τους αδερφούς Montgolfier. Ο Charles το γέμισε υδρογόνο και έκανε αρκετές πτήσεις, περιλαμβανομένης και μιας πάνω από τις Άλπεις. Το 1804 ο Joseph Louis Gay-Lussac έκανε δύο πτήσεις με αερόστατο και έφτασε στο ύψος των 7 km. Το 1887 ο Dmitry Mendeleyev, ο οποίος επινόησε τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων, έκανε μια μοναχική πτήση με αερόστατο για να παρατηρήσει την έκλειψη Ήλιου (και ήταν ήδη στα σαράντα του).

Αλλά ο άνθρωπος που ανακάλυψε την πολύ σημαντική εξίωση (3) τι οκεφτόταν; Πράγματι, γιατί ένας επαρχιώτης δάσκαλος απορροφήθηκε απ' τη μαγεία του Διαστήματος και απορακρύθηκε από τα λιβάδια και τα δάση, από την καθημερινή ζωή; Γιατί ξόδεψε μεγάλα ποσά σε πειράματα και ιδιωτικές δημοσιεύσεις εργασιών του απορρίπτονταν σχεδόν απ' όλους στην εποχή του; Μπορούμε

όλα αυτά να τα αποδώσουμε στη μανία του για αναγνώριση — το καθετί στις εργασίες του υπήρξε ορθό και γόνιμο. Τα κίνητρά του πρέπει να ήταν βαθύτερα.

Στο πρερολόγιό του παραπονείται ότι οι άνθρωποι των θεωρούν «απλώς έναν μονόπλευρο μηχανικό, όχι έναν φιλόσοφο. Ένα διαστημόπλοιο είναι για μένα μόνο ένα μέσο, μια μέθοδος για να διεισδύσω στο Διάστημα». Άλλα γιατί; Επιπλέον γεννιέται μια υποψία: ότι κάθε μεγάλος διανοητής προσπαθεί να λύσει κάποια μεγάλα προβλήματα, που βρίσκονται πέρα από τις ανθρώπινες ανάγκες. Η ανακάλυψη τέτοιων προβλημάτων, όμως, αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην ιστορία της επιστήμης και πολύ χρήσιμο εργαλείο στη διδασκαλία της.

Στην ιστορία της παγκόσμιας αστροναυτικής μπορεί κανείς να διακρίνει αλυσίδες λαμπρών προσωπικοτήπων και αξιοπρόσεκτων γεγονότων συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσα από κυκεώνες προσώπων και συμβάντων. Σε τούτο το άρθρο θα μνημονεύσω τρία τέτοια μεγάλα πνεύματα, στιβαρούς κρίκους στην αλυσίδα της ρωτικής αστροναυτικής.

Ας αρχίσω με τον N.F. Fyodorov (1828-1903), τον νόθο γιο του πριγκίπα Gagarin και της Βιβλιοθηκής του Μουσείου Rumyantsev. Ο Fyodorov, ένας «σεμνός και ταπεινός φιλόσοφος που φορούσε παλιά τριμένα αλλά καθαρά ρούχα», δεν δημοσίευσε σχεδόν κανέναν από τους στοχασμούς του όσο ζούσε. Τι απασχολούσε το νου του; Ούτε λίγο ούτε πολύ, η φυσική, οωματική αθανασία κι όχι μόνο αυτή των μελλοντικών γενεών, την οποία θα επετύχαν κάποτε η επιστήμη, αλλά και των περασμένων γενεών, με δύο λόγια η ανάσταση των προγόνων μας. Αυτό το θεωρούσε ως τον κύριο οκοπό της επιστήμης, και απαίτησε να χτίζονται τα πανεπιστήμια μέσα στα νεκροταφεία, έτοις ώστε οι φοιτητές να μη χάνουν το χρόνο τους σε μικροπράγματα αλλά να οκέφτονται για την νίκη της ζωής επί του θανάτου.

Ακριβώς όπως στη σύγχρονη ορολογία διαχωρίζουμε την επιστήμη σε «θεωρητική» και «εφαρμοσμένη», ο Fyodorov φαίνεται ότι υπήρξε ο υπο-

οπρικτής ενός «εφαρμοσμένου» χριστιανισμού. Η άποψή του ανταποκρινόταν στα δόγματα της Ορθόδοξης Πίστης: «*Προσδοκῶ ἀνάστασιν νεκρῶν καὶ ζωὴν τοῦ μέλλοντος αἰώνος*».

Τι οκεφτόταν άραγε όταν πήγε στα Βουνά του Πανίρ; Ότι εκεί οι ουρανοί είναι πιο κοντά, ότι ο Ήλιος και η Σελήνη είναι ολόλευκοι, ότι τ' άστρα είναι πολύχρωμα αλλά δεν τρεμοπαίζουν; Η ότι, σύμφωνα με την αρχαία παράδοση των Αρίων, κάθε μαχάτια (πνευματικός διδάσκαλος) πρέπει να ζησει για ένα χρονικό διάστημα στα Ιραλάια;

«Ανάμεσα στο πλήθος των νεκρών γενεών και την πολλαπλότητα των κόσμων υπάρχει μια τελεολογική σχέση, να δημιουργήσουμε όλους τους κατοίκους όλων των κόσμων από το ίδιο αίμα και τις οτάχτες της Γης... Η Γη, π οποία κατάπιε αμέτρητες γενές, αθούμενη και οδηγούμενη από την ουράνια αγάπη και γνώση, θα επιστρέψει όσους κατάπιε και θα εποικίσει τους ουράνιους αστρικούς κόσμους μ' απούς. Θα είναι μια σπου-

δαία, καταπληκτική αλλά όχι θαυμαστή πημέρα, διότι η ανάσταση δεν θα οφείλεται σε κάποιο θάύμα αλλά θα προέρχεται από τη γνώση και την κοινή προσπάθεια.» (N.F. Fyodorov)

Ο επόμενος κρίκος: για τρία χρόνια (1873-1876) οι απόφεις αυτού του ρώσου φιλοσόφου υπήρξαν αντικείμενο μελέτης του Tsiolkovsky. Σίγουρα οι ιδέες του Fyodorov έγιναν δεκτές από το μαθητή του ως ερεθίστημα για συντονισμένη προσπάθεια προκειμένου να προετοιμαστεί το επόμενο βήμα: όχι τόσο το πώς θα βάζει όλους τους αναστημένους προγόνους μας αλλά κυρίως όλες τις μελλοντικές γενεές των απογόνων μας. Η απάντηση πάντα προφανής. Προς τα πάνω, εκεί που δεν υπάρχει βαρύτητα, στην θάλασσα του φωτός, στον ωκεανό της ενέργειας, στο μακρινό Διάστημα.

Και τώρα ο ουσιαστικός κρίκος που συνδέει τον φυσικό και φιλόσοφο Tsiolkovsky με το σχεδιαστή πυραύλων Sergey P. Korolyov. Η συνεργασία τους οδήγησε στον πρώτο

τεχνητό δορυφόρο —σπουδών στα ρωσικά— (1957), ύστερα στον πρώτο ανθρώπο στο Διάστημα (1961) (μαν απλώς σύμπτωση το ότι ο πρώτος κομμοναύτης Yury Gagarin είχε το ίδιο επώνυμο με τον πατέρα του N.F. Fyodorov);, έπειτα στους πρώτους ανθρώπους στη Σελήνη, και ο κατάλογος συνεχίζεται.

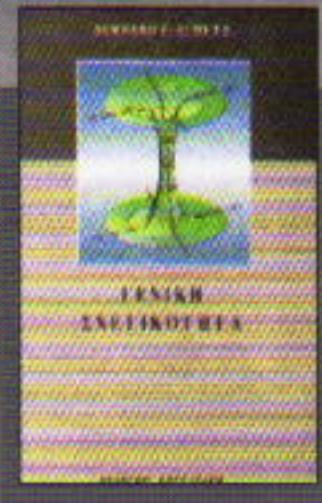
Έτσι η φυσική και η τεχνολογία κατάφεραν, προς τιμήν τους, να υπερνικήσουν τη βαρύτητα της Γης.

Φυσικά, ο τροφικός στόχος της υπερνίκησης του θανάτου, όχι μόνο στο μέλλον αλλά και στο παρελθόν, απέχει πολύ από την πραγματοποίηση του. Ο Fyodorov, όπως αναφέρει, συνέλαβε τη βασική ιδέα το 1851, οπότε και την έθεσε ως στόχο του ανθρώπινου πνεύματος. Για την κοινή λογική αυτό μάλλον αποτελεί ουτοπία, ή ίσως αποκλειστικό δικαίωμα του Παντοδύναμου. Ποιες όμως ανώτερες «πνευματικές πηγές» μπορεί να βρίσκονται πίσω από τις απλούστερες εξισώσεις της φυσικής —όπως για παράδειγμα της εξισώσης (3); ◻



B. SCHUTZ
ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η γενική σχετικότητα έγινε η κεντρική πύλη της θεωρητικής φυσικής, με σημαντικές εφαρμογές στην υαλοφυσική και τη φυσική σιωματιδίων οψηλής ενέργειας. Το βιβλίο αναπτύσσει τη γενική σχετικότητα και τα απαραίτητα μαθηματικά της, ζεκτινώντας από στοιχειώδεις έννοιες και μεθοδικά οδηγεί τη φυσική κατανόηση σε υψηλό βεβηλό.



D. RUELLE
ΤΥΧΗ ΚΑΙ ΧΑΟΣ

Τύχη, σύμπτωση, ή χάος στα φυσικά συστήματα: Ο Ruelle απλύτως στο ευρύτερο αναγνωστικό κοινό με τον καλύτερο τρόπο που απαντεί η Γαλλική παράδοση. Το βιβλίο ανήκει στην τελευταία γενιά έργων για τη θεωρία του Χάος, είναι βαθύσταχτο και γλαφυρό —είναι απόλυτη στο διάβασμα.

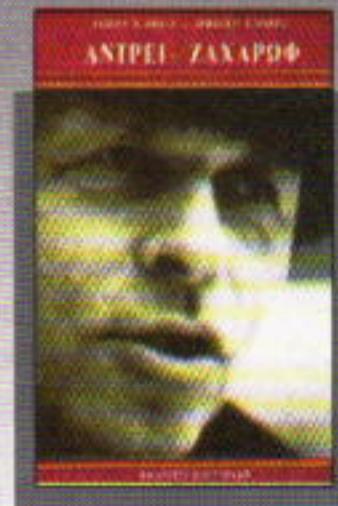
Ε Κ Α Ο Σ Ε Ι Σ

ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΕΣ: ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 2 ΤΗΛ. 3615926



DREIL-KAPITZA
ΑΝΤΡΕΙ ΖΑΧΑΡΟΦ

Το βιβλίο αποτελεί φόρο τιμής προς τον εξαιρέτη επιστήμονα και ανθρωπιστή, από φίλους και συνεργάτες των στη Συμβετική Ένωση και την Αμερική. —η συλλογή των κειμένων επιτρέπει στον αναγνώστη να σχηματίσει ολοκληρωμένη εντύπωση γι' αυτό το «δημόσιο πρόσωπο».



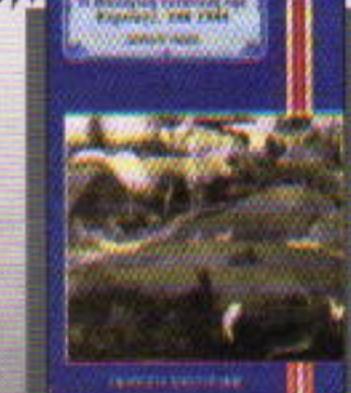
Κ Ω Σ Τ Α Ρ Α Κ Η

ΓΡΑΦΕΙΑ: ΚΑΛΛΙΔΡΟΜΙΟΥ 54Α ΤΗΛ. 3614410



C. CROSBY
ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΟΣ ΙΜΠΕΡΙΑΛΙΣΜΟΣ

Το κύριο σέμα του πληθυσμού στις εύκρατες περιοχές των κόμοντ διεμφεύγει από την εισβολή των Ευρωπαίων. Οι στρατιωτικές επιτυχίες εξηγούνται εύκαλπα —επρόκειτο για την υπερηγή της παροπόλου υπόλιτον απεναντί σε τόξα και ακόντια. Όμως η μετακίνηση των Ευρωπαίων και η αντικατάσταση των εντοπίσιων πληθυσμών, ήταν θέμα περισσότερο της βιολογίας παρά της στρατιωτικής κατάκτησης.



Κατασκευή τριγώνων από τρία στοιχεία

Από τα 168 προβλήματα, τα 28 δεν έχουν ακόμη λυθεί!

George Berzsenyi

Στην τελευταία ουνάντη ποπ της Αμερικανικής Μαθηματικής Ένωσης (MAA) και της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας (AMS) στο Σινοινάτι, απόλαυσα μια καππλικτική βραδιά με τέσσερις φίλους μου μαθηματικούς, τον Stanley Rabinowitz (υπεύθυνο έκδοσης της σειράς *Indexes to Mathematical Problems*), τον Curtis Cooper, τον Robert Kennedy (ο πρώτος είναι συντονιστής σύνταξης και ο δεύτερος επιμελητής προβλημάτων στο θαυμάσιο *Missouri Journal of Mathematical Sciences*), και τον Leroy (Roy) Meyers (επιμελητή προβλημάτων για πολλά χρόνια στο *Mathematics Magazine*). Επειδή ο Roy και εγώ συνεργαζόμαστε με τη συντακτική επιτροπή που διευθύνει ο Stanley, όπως ήταν φυσικό, συζητήσαμε αρκετά για τα βιβλία που πρόκειται να εκδώσει ο Stanley μέλλον η εταιρεία του, η MathPro Press. Ανάμεσα σε αυτά περιλαμβάνονται οι *Μαθηματικές Ολυμπιάδες του Λένινγκραντ*, από το 1987 ως το 1991, το *Προβλήματα και Λύσεις από το Mathematical Visitor*, από το 1877 ως το 1896, οι Διαγωνισμοί *NYSML-ARML*, από το 1989 ως το 1994, και δύο ακόμη τόμοι από το *Index to Mathematical Problems*, που καλύπτουν τις περιόδους 1975-1979 και 1985-1989.

Μια και ο Stan και ο Roy ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για τη γεωμετρία, η ουζήτη πραγματίζει στράφηκε σε ορισμένα προβλήματα αυτής της περιοχής, και έτοις έμαθα ότι ο Roy είναι ένας διακεκριμένος ειδικός στα προβλήματα κατασκευασμάτων τριγώνων από

δεδομένα στοιχεία τους. Συγκεκριμένα, ανακάλυψε ότι υπάρχουν 186 μη ισομορφικά προβλήματα που προκύπτουν αν επιλέξουμε τρία στοιχεία από τα δεκαοκτώ του επόμενου καταλόγου:

πλευρές	a, b, γ
γωνίες	A, B, Γ
ύψη	h_a, h_b, h_y
διάμεσοι	μ_a, μ_b, μ_y
διχοτόμοι	$\delta_a, \delta_b, \delta_y$
ακτίνα περιγεγραμένου κύκλου	R
ακτίνα εγγεγραμένου κύκλου	r
πριμπερίμετρος	s

(Χάριν συντομίας, έχω παραλείψει τους όρους «μήκος» και «μέτρο» από τον κατάλογο.)

Η πρώτη μου πρόκληση στους αναγνώστες είναι να κατασκευάσουν τα 186 προβλήματα που αναφέραμε προηγουμένως. Ως στοιχείο βοήθειας δίνω την αριθμού που έχει κάνει ο Roy στον κατάλογο των προβλημάτων. Ο κατάλογός του είναι μια παραλλαγή του καταλόγου που είχαν παρουσιάσει οι Alfred Posamentier και William Wernick στο *Advanced Geometric Constructions* (Προχωρημένες Γεωμετρικές Κατασκευές, Εκδόσεις Dale Seymour, 1988). Όσοι αναγνώστες ενδιαφέρονται, μπορούν να ανατρέξουν στο Κεφάλαιο 3 του εν λόγω βιβλίου για μια εκπενέστερη εισαγωγή στο θέμα.

Βασικά, τα προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:

1. Πλεονάζουσες τριάδες, όπου δύο

οποιαδήποτε από τα τρία στοιχεία καθορίζουν το τρίτο. Από τα 186 προβλήματα, μόνο τα (A, B, Γ) , (A, B, h_y) , (a, A, R) ανήκουν στην κατηγορία.

2. Μη επιλύσιμα προβλήματα, τα οποία δεν επιλύονται με ευκλείδεια μέσα (δηλαδή με κανόνα και διαβήτη). Υπάρχουν 27 τέτοιες τριάδες.

3. Επιλύσιμα προβλήματα (με κανόνα και διαβήτη). Υπάρχουν 128 τέτοια προβλήματα.

4. Ανοιχτά προβλήματα. Αυτά παρατίθενται στη συνέχεια, με την αριθμού που τους έχει δώσει ο Roy.

72. a, μ_b, δ_a	131. a, μ_b, r
81. h_a, μ_a, δ_b	135. h_a, μ_b, r
82. h_a, μ_b, δ_a	138. a, δ_b, r
83. h_a, μ_b, δ_b	142. h_a, δ_b, r
84. h_a, μ_b, δ_y	143. μ_a, δ_a, r
86. μ_a, μ_b, δ_y	144. μ_a, δ_b, r
88. a, δ_b, δ_y	149. μ_a, R, r
89. A, δ_a, δ_y	150. δ_a, R, r
90. A, δ_b, δ_y	165. h_a, μ_b, s
110. h_a, μ_b, R	172. h_a, δ_b, s
117. h_a, δ_b, R	173. μ_a, δ_a, s
118. μ_a, δ_a, R	174. μ_a, δ_b, s
119. μ_a, δ_b, R	179. μ_a, R, s
120. δ_a, δ_b, R	180. δ_a, R, s

Για να αποδείξει τη μη επιλυσιμότητα ορισμένων από αυτά τα προβλήματα, ο Roy ανακάλυψε το ακόλουθο συχνά χρήσιμο πόρισμα ενός θεωρήτα του Gauss: *Είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε με κανόνα και*

Η συνέχεια στη σελ. 62

Καθρέφτης γεμάτος νερό

«Κάτοπτρον εἶδους χαλκός ἐστί, οἶνος δέ νοῦ.»

Αισχύλος

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

Το μυστικό είναι οι καθρέφτες.» Είτε όταν παρακολουθούμε τα μαγικά κόλπα του ταχυδακτυλουργού, καθώς τρυπά με τα κοφτερά σπαθιά του το κιβώτιο με τη χαριτωμένη βοηθό, είτε όταν καρδιοχτυπούμε στο τρενάκι της Ntσνεύλαντ, καθώς περνά από τον στοιχειωμένο πύργο και τα φαντάσματα διασχίζουν τα δωμάτια.

Σε τούτο το άρθρο θα μελετήσουμε το είδωλο που σχηματίζεται από ένα κοίλο κάτοπτρο που το έχουμε γεμίσει νερό. Δεδομένου ότι στη φυσική η βεβαιότητά μας για τη λύση ενός προβλήματος μεγαλώνει όταν διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, και δεδομένου ότι υπάρχουν αρκετοί τρόποι προσδιορισμού της θέσης ενός ειδώλου, θα θέλαμε να εντοπίσουμε τους περισσότερους από αυτούς τους τρόπους. Ελπίζουμε δε, ότι εσείς θα βρείτε μια λύση εντελώς διαφορετική από όσες προσδοκούμε εμείς.

Στα κεφάλαια γεωμετρικής οπτικής, η ύλη ουσιαστικά ξεκινά με την ανάκλαση σε επίπεδα κάτοπτρα. Η πρώτη αρχή που διδάσκεται είναι πως η γωνία πρόσπιτων του φωτός ισούται με τη γωνία ανάκλασης. Η ίδια αρχή ισχύει και όταν το κάτοπτρο είναι οφαιρικό: η γεωμετρία του, μάλιστα, ορίζει ότι μια ακτίνα φωτός παράλληλη στον κύριο οπτικό άξονα του κατόπτρου, μετά την ανάκλαση

της από αυτό διέρχεται από το οπρείο του κύριου άξονα που ονομάζεται κύρια εστία του κατόπτρου εάν το κάτοπτρο είναι κοίλο, ενώ εάν είναι κυρτό απ' την κύρια εστία διέρχεται πι γεωμετρική προέκταση της ανακλώμενης ακτίνας. Επομένως, σε ένα κοίλο κάτοπτρο όλες οι παράλληλες στον κύριο άξονα ακτίνες φωτός (και οι οποίες, γενικώς, βρίσκονται κοντά του) μετά την ανάκλαση τους συγκλίνουν στην κύρια εστία, ενώ σε ένα κυρτό κάτοπτρο αποκλίνουν με τέτοιο τρόπο ώστε οι γεωμετρικές προεκτάσεις τους πίσω από την ανακλαστική επιφάνεια να συγκλίνουν στην κύρια εστία.

Η σχέση που συνδέει τη θέση ενός αντικειμένου και τη θέση του ειδώλου του δίνεται από τον τύπο των οφαιρικών κατόπτρων

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f},$$

όπου s_1 και s_2 είναι οι αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου από την κορυφή του κατόπτρου, αντίστοιχα, και f η εστιακή απόσταση του κατόπτρου. Συχνά η τιμή τής f βρίσκεται τυπωμένη στην πίσω όψη του οφαιρικού κατόπτρου, ισούται πάντας με το μισό της ακτίνας καμπυλότητας του κατόπτρου.

Για να εφαρμόσουμε σωστά τον παραπάνω τύπο, πρέπει να θυμηθούμε τις εξής συμβάσεις: Η απόσταση s_1

λαμβάνεται θετική αν το αντικείμενο βρίσκεται μπροστά από την ανακλαστική επιφάνεια του κατόπτρου (πραγματικό αντικείμενο). Μερικές φορές, όμως, «αντικείμενο» μπορεί να είναι το είδωλο που παράγεται από μια άλλη οπτική διάταξη. Σ' αυτή την περίπτωση το αντικείμενο θα βρίσκεται πίσω από την ανακλαστική επιφάνεια του κατόπτρου (φανταστικό αντικείμενο) και π απόσταση s_1 πρέπει να λαμβάνεται αρνητική. Εάν το είδωλο σχηματίζεται μπροστά από την ανακλαστική επιφάνεια (πραγματικό είδωλο), η απόσταση s_2 λαμβάνεται θετική, ενώ αν σχηματίζεται πίσω από την ανακλαστική επιφάνεια του κατόπτρου (φανταστικό είδωλο) η s_2 λαμβάνεται αρνητική. Τέλος, η εστιακή απόσταση f λαμβάνεται θετική για τα κοίλα κάτοπτρα και αρνητική για τα κυρτά.

Εάν, για παράδειγμα, ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση $3f$ μπροστά από ένα κοίλο κάτοπτρο, τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο των κατόπτρων

$$\frac{1}{3f} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f},$$

βρίσκουμε $s_2 = 3f/2$, γεγονός που σημαίνει ότι το είδωλο σχηματίζεται μπροστά από την ανακλαστική επιφάνεια και σε απόσταση $3f/2$ από την κορυφή του κατόπτρου. Το είδωλο μπορεί να εντοπιστεί και γραφικά, αν



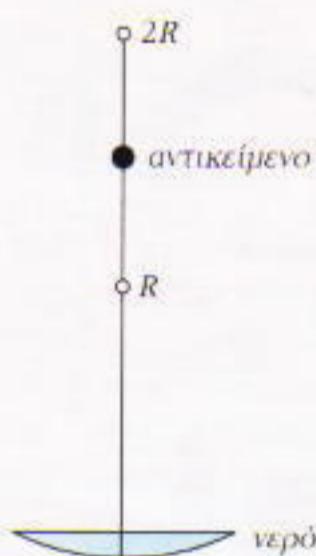
σχεδιάσουμε την πορεία μερικών φωτεινών ακτίνων. Βρείτε πού θα σχηματιστεί το είδωλο αν το κάτοπτρο είναι κυρτό.

Ο τύπος των σφαιρικών κατόπτρων είναι όμοιος με τον τύπο των φακών που γνωρίσατε στο προηγούμενο τεύχος, στο άρθρο του A. Zilberman. Οι αντίστοιχες συμβάσεις για τους φακούς είναι οι εξής: τα s_1 και s_2 λαμβάνονται θετικά εάν πρόκειται για πραγματικό αντικείμενο και είδωλο, αντίστοιχα (αν, δηλαδή, σχηματίζονται από τις ίδιες τις φωτεινές ακτίνες και όχι από τις γεωμετρικές προεκτάσεις τους) αν πρόκειται για φανταστικό αντικείμενο και είδωλο, αντίστοιχα, λαμβάνονται αρνητικά. Η εστιακή απόσταση f για τους συγκλίνοντες φακούς λαμβάνεται θετική, ενώ για τους αποκλίνοντες αρνητική.

Μια άλλη χρήσιμη σχέση είναι αυτή του τύπου των κατασκευαστών των φακών. Στην ειδική περίπτωση ενός επιπεδόκυρτου φακού, από αυτόν προκύπτει:

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R},$$

όπου n είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού του φακού και R η ακτίνα καμπυλότητας της κυρτής επιφάνειάς του.



Και τώρα, έπειτα από αυτή τη γρήγορη επανάληψη, ας έρθουμε στο συμερινό πρόβλημά μας. Όπως φαίνεται στο σχήμα, ένα κοίλο κάτοπτρο βρίσκεται ακουμπομένο στην οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζίου με την ανακλαστική επιφάνειά του προς τα πάνω, και το έχουμε γεμίσει νερό, με δείκτη διάθλασης $n = 4/3$. Ένα οπιμιακό φωτεινό αντικείμενο βρίσκε-

ται πάνω στον κύριο οπτικό άξονα του κάτοπτρου και σε απόσταση $d = 3R/2$ από την κορυφή του. Πού θα σχηματιστεί το είδωλο του εν λόγω αντικειμένου; Σε αντιστοιχία με την προσέγγιση «των λεπτών φακών», που συχνά χρησιμοποιούμε σε προβλήματα τέτοιου είδους, ας δεχτούμε ότι το «πάχος» του νερού στην παραπάνω διάταξη είναι αμελητέο.

Α. Ας ξεκινήσουμε με την τεχνική που χρησιμοποιούν και οι οφθαλμίατροι: συχνά τοποθετούν μπροστά από τα γυαλιά σας ένα φακό για να ελέγξουν τις βελτιώσεις που πρέπει να σας προτείνουν γι' αυτά. Η εστιακή απόσταση f_{al} ενός συστήματος λεπτών φακών (ή κατόπτρων) δίνεται από τη γενική εξίσωση

$$\frac{1}{f_{al}} = \sum \frac{1}{f_i}.$$

Επομένως, μπορείτε να αντικαταστήσετε το σύστημα κάτοπτρο-νερό μ' ένα άλλο κάτοπτρο, η εστιακή απόσταση του οποίου μπορεί να προκύψει από τον παραπάνω τύπο. Ο «φακός του νερού» εμφανίζεται στο άθροισμα μία ή δύο φορές; Χρησιμοποιήστε και τις άλλες μεθόδους για επαλήθευση.

Β. Μπορείτε επίσης να υπολογίσετε τη ζητούμενη εστιακή απόσταση γραφικά, σχεδιάζοντας την πορεία μιας ακτίνας παράλληλης στον κύριο άξονα του κάτοπτρου, η οποία διαθλάται καθώς συναντά την επιφάνεια του νερού, ανακλάται από το κάτοπτρο και, τέλος, διαθλάται πάλι καθώς εξέρχεται από το νερό. (Μην αμελήσετε τις απαραίτητες προσεγγίσεις.)

Γ. Μια τρίτη μέθοδος πηγάδει από το γεγονός ότι το είδωλο που προκύπτει από ένα οπτικό στοιχείο λειτουργεί ως αντικείμενο για το επόμενο οπτικό στοιχείο, κ.ο.κ. Βρείτε, λοιπόν, το είδωλο που σχηματίζεται από τη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-νερού. Θεωρήστε αυτό το είδωλο ως αντικείμενο για το κάτοπτρο (χωρίς να υπάρχει νερό) και εντοπίστε το νέο είδωλο. Αυτό το είδωλο δίνει ένα άλλο νέο είδωλο ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-νερού (κατά την έξοδο του φωτός από το νερό). Αυτό, προφανώς, είναι το τελικό είδωλο που σχηματίζει το σύστημα

κάτοπτρο-νερό.

Δ. Η πιο ριφοκίνδυνη μέθοδος είναι εκείνη που θεωρεί τη διάταξη μας ως συνδυασμό ενός «φακού νερού», ενός κατόπτρου και ενός επιπλέον «φακού νερού». Βρείτε τη θέση του ειδώλου που σχηματίζει κάθε οπτικό στοιχείο ξεχωριστά, θεωρώντας το είδωλο που σχηματίζει το ένα στοιχείο ως αντικείμενο για το επόμενο. Η λύση είναι ριφοκίνδυνη διότι, σύμφωνα με τις συμβάσεις, μπορείτε πολύ εύκολα να κάνετε λάθος σε κάποιο πρόσωπο.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Οκτωβρίου 1994. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία!

Σήματα διαβάσεων

Σε προηγούμενο τεύχος είχε ζητηθεί από τους αναγνώστες του Quantum να υπολογίσουν πότε είναι ασφαλές να διασχίσουν μια διασταύρωση «με κίτρινο» και πότε να πατήσουν φρένο. Ελπίζουμε οι περισσότεροι από σας να σκεφτήκατε το πρόβλημα ψύχραιμα, σταρατημένοι μπροστά στο φανάρι καθώς περιμένατε να ανάψει το πράσινο, και όχι διασχίζοντας τη διασταύρωση με το κίτρινο φανάρι αναμμένο.

Α. (α) Για τη ζώνη διάβασης, ο οδηγός μπορεί να συνεχίσει να κινείται χωρίς να ελαττώσει ταχύτητα και να διασχίσει τη διασταύρωση με ασφάλεια σε όσο χρόνο παραμένει αναμμένο το κίτρινο φανάρι. Η ζώνη διάβασης, d_δ , εξαρτάται από την ταχύτητα v_0 του αυτοκινήτου, το χρονικό διάστημα t_k κατά το οποίο παραμένει αναμμένο το κίτρινο φανάρι, το πλάτος w της διασταύρωσης, και το μήκος L του αυτοκινήτου ($n d_\delta$ προφανώς είναι διαφορετική για μια ρακριά λιμουζίνα και διαφορετική για ένα μικρό αυτοκίνητο πόλης). Ακριβέστερα,

$$d_\delta > v_0 t_k - w - L.$$

(β) Για τη ζώνη στάσης, ο οδηγός μπορεί να σταματήσει με ασφάλεια πριν από τη διασταύρωση. Η ζώνη στάσης, d_o , εξαρτάται από την ταχύτητα του αυτοκινήτου, v_0 , την επιβράδυνση του γ κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος (αρνητικός αριθμός),

και το χρόνο αντίδρασης t_a του οδηγού. Ακριβέστερα,

$$d_a > u_0 t_a - \frac{u_0^2}{2\gamma}.$$

(γ) Το αν υπάρχει ζώνη διλήμματος ή ζώνη επικάλυψης εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ της ζώνης διάβασης και της ζώνης στάσης. Έτοι, αν αυτή η διαφορά, d_i , είναι αρνητική υπάρχει ζώνη διλήμματος, και αν είναι θετική υπάρχει ζώνη επικάλυψης. Ακριβέστερα,

$$\begin{aligned} d_i &= u_0 t_k - w - L - u_0 t_a + \frac{u_0^2}{2\gamma} = \\ &= \frac{1}{2\gamma} u_0^2 + (t_k - t_a) u_0 - (w + L). \end{aligned}$$

B. Για να υπάρχει πάντοτε ζώνη διλήμματος, πρέπει $d_i < 0$, ή

$$\frac{1}{2\gamma} u_0^2 + (t_k - t_a) u_0 - (w + L) < 0$$

Αν η διακρίνουσα του παραπάνω τριώνύμου είναι αρνητικός αριθμός, θα υπάρχει πάντοτε ζώνη διλήμματος. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει ο χρόνος κατά τον οποίο παραμένει αναμμένο το κίτρινο φανάρι να είναι μικρότερος από το χρόνο αντίδρασης του οδηγού. (Σ' αυτή την καθόλου ρεαλιστική περίπτω-

ση ο χρόνος t_k δεν αφήνει στον οδηγό κανένα περιθώριο για αποφάσεις.) Αυτό επιπλέον μπορεί να ισχύει αν ο όρος που περιλαμβάνει την επιτάχυνση είναι πολύ μικρός σε σχέση με τη διαφορά $t_k - t_a$.

Αν η διακρίνουσα του τριώνυμου είναι θετικός αριθμός, τότε αυτό έχει δύο ρίζες —τις οποίες βλέπετε μέσα στο πλαίσιο— υπάρχουν δηλαδή δύο θετικές τιμές για την ταχύτητα u_0 . Θεωρώντας ότι η u_1 είναι μικρότερη από την u_2 , τότε ζώνη διλήμματος θα υπάρχει αν $u_0 > u_2$ ή $u_0 < u_1$. Ζώνη επικάλυψης θα υπάρχει αν $u_1 < u_0 < u_2$. Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς γιατί η μεγάλη ταχύτητα συνεπάγεται μια ζώνη διλήμματος πώς γίνεται όμως να συνεπάγεται το ίδιο πράγμα μια μικρή ταχύτητα;

Ένας άλλος τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε πως οι έδηγοι συνήθως διασχίζουν τέτοιες διασταυρώσεις με μια τυπική τιμή ταχύτητας, οπότε μένει να δούμε πόσος πρέπει να είναι ο t_k προκειμένου το αυτοκίνητο να διασχίζει τη διασταύρωση με ασφάλεια. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να

$$v_{1,2} = \frac{- (t_k - t_a) \pm \sqrt{(t_k - t_a)^2 + 4 \frac{1}{2\gamma} (w + L)}}{2 \frac{1}{2\gamma}} = \gamma \left[(t_k - t_a) \pm \sqrt{(t_k - t_a)^2 + \frac{2(w + L)}{\gamma}} \right]$$

λύσουμε την ανισότητα ως προς t_k , οπότε προκύπτει ότι ζώνη διλήμματος θα υπάρχει όταν

$$t_k < t_a + \frac{w + L}{u_0} - \frac{u_0}{2\gamma}.$$

Ζώνη επικάλυψης θα υπάρχει όταν ο t_k είναι μεγαλύτερος από την παραπάνω τιμή.

Γ. Αν το αυτοκίνητο κατεβαίνει έναν καπνιφορικό δρόμο κλίσης φ , θα έχει επιτάχυνση $g \cdot \text{πρφ}$. Θέτωντας $g' = g \cdot \text{πρφ}$, έχουμε

$$d_i = u_0 t_k + \frac{1}{2} \gamma t_k^2 - w - L$$

$$d_i = u_0 t_a + \frac{1}{2} \gamma t_a^2 - \frac{(u_0 \gamma t_a)^2}{2(\gamma + g')}$$

Η ζώνη επικάλυψης ισούται, για άλλη μια φορά, με τη διαφορά μεταξύ της ζώνης διάβασης και της ζώνης στάσης. ◻



QUANTUM

Κάντε ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε τό *Quantum* στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους ουναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα. Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).

Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη.

Η τιμή της συνδρομής υπερβολικά χαμηλή.

Περιοδικό *Quantum*, Ιοαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

Αποκαλυπτικές πλακοστρώσεις

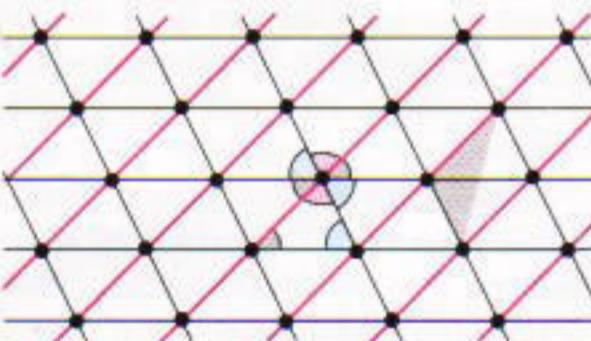
Μια ακόμη απόδειξη των θεωρημάτων του Ναπολέοντα, του Πυθαγόρα και του Pick

Vladimir Dubrovsky

Αν ανοίξετε ένα παλιό σχολικό εγχειρίδιο γεωμετρίας δεν πρόκειται να βρείτε καμία αναφορά στις πλακοστρώσεις. Αυτό δεν είναι παράξενο: Η παραδοσιακή γεωμετρία έχει αναπτυχθεί εδώ και χιλιετίες, ενώ αυτή η μαθηματική έννοια έχει γίνει αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών τα τελευταία, συγκριτικά, χρόνια. Στις μέρες μας, και επειδή ο ρόλος τους στη σύγχρονη γεωμετρία γίνεται ολονέν σπουδαιότερος, αλλά και χάρη στην κομψότητα του θέματος, εισέρχονται σταδιακά στη σχολική ύλη.

Οι πλακοστρώσεις έχουν πλήθος ενδιαφέρουσες ιδιότητες, και γι' αυτό το λόγο συνήθως μελετώνται αυτόνομα. Σε τούτο το άρθρο, όμως, θέλω να παρουσιάσω τον τρόπο εφαρμογής τους στην επίλυση παραδοσιακών, ακόμη και κλασικών γεωμετρικών προβλημάτων τα οποία, κατ' αρχάς, δεν είχαν καμία σχέση με τις πλακοστρώσεις. Οι λύσεις που θα μελετήσουμε δεν είναι ούτε οι μοναδικές ούτε πάντοτε οι συντομότερες. Σίγουρα, όμως, είναι όμορφες, και ελπίζω ότι θα τις απολαύσετε όσο τις απόλαυσα και εγώ.

Θα αρχίσουμε με τα δύο απλούστερα είδη πλακοστρωσών, αυτά που βλέπετε στο Σχήμα 1. Είναι η παραλληλόγραμμη και η τριγωνική πλακόστρωση. Δημιουργούμε την πρώτη διαχωρίζοντας το επίπεδο με δύο σύνολα παραλλήλων και ισαπεχουσών ευθειών, και τη δεύτερη τέμνοντας τα



Σχήμα 1

προηγούμενα παραλληλόγραμμα κατά μήκος παράλληλων διαγωνίων τους. Είναι φανερό ότι ως πλακίδιο για την πλακόστρωσή μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ή ένα τρίγωνο οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος.

Ακόμη και η απλή τριγωνική πλακόστρωση μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε ένα θεμελιώδες γεωμετρικό θεώρημα. Κοιτάξτε και πάλι το Σχήμα 1. Βλέπετε σε ποιο θεώρημα αναφέρομαι; Είφατε σίγουρος ότι το βλέπετε, και δεν είναι άλλο παρά το θεώρημα που αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Στο Σχήμα 1, οι γωνίες των έξι τριγωνικών πλακιδίων γύρω από την κοινή τους κορυφή δεν αφήνουν κανένα κενό. Αφού η κάθε γωνία ενός πλακιδίου εμφανίζεται δύο φορές σε αυτές τις έξι γωνίες, το άθροισμα των γωνιών ενός πλακιδίου είναι 180° .

Επομένως, η παρατήρηση αυτής της πλακόστρωσης μας βοηθά να ανακαλύψουμε ένα θεμελιώδες γεωμετρικό γεγονός. Αυτή η «αποκαλυπτική ισχύς» εμφανίζεται στις περισσότε-

ρες από τις «αποδείξεις μέσω πλακοστρώσεων» που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Επίοτε, το απλό παράδειγμά μας εξηγεί έναν από τους λόγους για τους οποίους οι πλακοστρώσεις είναι χρήσιμες για να ανακαλύψουμε διάφορα γεωμετρικά γεγονότα και τις αποδείξεις τους: Όταν ένα σχήμα περιβάλλεται από τα αντίγραφά του σε μια πλακόστρωση, τα τμήματά του συναρμόζονται με τρόπο που καθιστά ορατές κάποιες σχέσεις που αρχικά ήταν δυσδιάκριτες.

Υπάρχει μία ακόμη ιδιότητα, περισσότερο τεχνικού χαρακτήρα, που κάνει χρήσιμες τις πλακοστρώσεις. Αυτή, όμως, απαιτεί λεπτομερέστερες εξηγήσεις.

Μέτρηση εμβαδών με απαρίθμηση

Θεωρήστε μια παραλληλόγραμμη πλακόστρωση και ένα τυχαίο επίπεδο σχήμα. Το εμβαδόν του σχήματος είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πλήθος των παραλληλογράμμων που περιέχει επί το εμβαδόν ενός από αυτά. Όσο μικρότερα είναι τα παραλληλόγραμμα τόσο καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνουμε —δηλαδή, φανταζόμαστε το σχήμα σταθερό και τα παραλληλόγραμμα να γίνονται όλο και μικρότερα. Άλλα μπορούμε επίσης να φανταστούμε την πλακόστρωση σταθερή και το σχήμα να διαστέλλεται συνεχώς. Τότε, υποθέτοντας ότι τα πλακίδια έχουν μοναδιαίο εμβα-

δόν, το εμβαδόν του σχήματός μας είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πλήθος των πλακιδίων που περιέχει, και το σφάλμα γίνεται μικρότερο όσο μεγαλύτερο γίνεται το σχήμα.

Αντί να μετράμε τα παραλληλόγραμμα, μπορούμε να μετράμε τις κορυφές τους. Το σύνολο όλων των κορυφών των παραλληλογράμμων σε μια πλακόστρωση ονομάζεται **πλέγμα**. Οι κορυφές συνομάζονται κόμβοι του πλέγματος. Κάθε κόμβος του πλέγματος είναι η κάτω αριστερή κορυφή ακριβώς ενός παραλληλογράμμου της πλακόστρωσης που συνδέεται με το πλέγμα. Έχοντας αυτή την αντιστοιχία κατά νου, μπορούμε να δούμε ότι το πλήθος των κόμβων που περιέχονται ο' ένα σχήμα δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των παραλληλογράμμων που περιέχονται σε αυτό, και ότι δεν είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των παραλληλογράμμων που έχουν κοινά σημεία με το σχήμα. Επομένως, θεωρώντας το εμβαδόν του ενός παραλληλογράμμου της πλακόστρωσης μας ίσο με τη μονάδα (αυτό θα το υποθέτουμε σε όλο το άρθρο, εκτός και αν αναφέρουμε ρητά κάτι αλλο), μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του σχήματος είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πλήθος των κόμβων που καλύπτει.

Αυτή η προσέγγιση γίνεται όλο και πιο ακριβής όσο το σχήμα μεγεθύνεται, αλλά δεν μπορούμε να πετύχουμε απόλυτη ακρίβεια για όλα τα σχήματα. Όριας, για κάποια ιδιαίτερα σχήματα υπάρχουν τύποι που μας επιτρέπουν να βρούμε την ακριβή τιμή του εμβαδού τους μετρώντας τους κόμβους που καλύπτουν. Ένας τέτοιος τύπος δίνεται από το θεώρημα του Pick, που μας λέει ότι το εμβαδόν ενός πολυγώνου του οποίου οι κορυφές είναι κόμβοι ενός πλέγματος ισούται με $i + b/2 - 1$, όπου τα i και b είναι, αντίστοιχα, το πλήθος των κόμβων στο εωτερικό και στο σύνορο του πολυγώνου. Στη συνέχεια, όμως, θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τύπο. Αν σε ένα παραλληλόγραμμο πλέγμα επιθέσουμε μια νέα πλακόστρωση —κατασκευαζόμενη από πλακίδια που είναι αντίγραφα κάποιου σχήματος—, τότε ο εν λόγω τύπος θα μας δώσει το εμβαδόν αυτού του σχήματος.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την απλούστερη περίπτωση: ας υποθέσουμε ότι κάθε πλακίδιο της πλακόστρωσης που μελετάμε περιέχει στο εωτερικό του το ίδιο πλήθος κόμβων, n , του αρχικού πλέγματος και ότι δεν έχει κανέναν κόμβο στο σύνορό του. Τότε το εμβαδόν του ενός πλακιδίου ισούται, απλώς, με n .

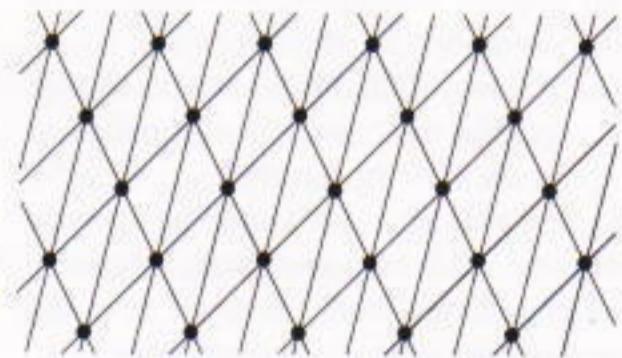
Πραγματικά, ας πάρουμε έναν μεγάλο κύκλο με ακτίνα R . Υποθέστε ότι περιέχει N πλακίδια της πλακόστρωσης που μελετάμε. Επομένως, το εμβαδόν του πR^2 ισούται περίπου με Nt (αυτό ισχύει για μια παραλληλόγραμμη πλακόστρωση, και φυσικά για κάθε άλλο είδος πλακόστρωσης). Αυτό σημαίνει ότι $Nt / \pi R^2 \rightarrow 1$ όταν το R τείνει στο άπειρο. Από την άλλη πλευρά, όπως έχουμε δει, το εμβαδόν του κύκλου είναι κατά προσέγγιση ίσο με το πλήθος των κόμβων που περιέχει, το οποίο, με τη σειρά του, ισούται κατά προσέγγιση με Np . Επομένως, $Np / \pi R^2 \rightarrow 1$ επίσης. Άρα, $p/t = Np/Nt \rightarrow 1$ όταν το R τείνει στο άπειρο. Αυτό όμως είναι δυνατόν μόνο αν $t = p$, αφού ούτε το t ούτε το p εξαρτώνται από το R .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ανάλογο επιχείρημα όταν τα πλακίδια έχουν κόμβους στο σύνορό τους. Σε αυτήν την περίπτωση, όμως, όταν υπολογίζουμε το πλήθος p των κόμβων που καλύπτει ένα πλακίδιο, πρέπει να απαριθμούμε κάθε συνοριακό κόμβο μ' έναν παράγοντα $1/k$, όπου k είναι το πλήθος των πλακιδίων στα οποία ανήκει ο κόμβος. Τότε, καθώς προσθέτουμε της αριθμούς p για όλα τα N πλακίδια ενός μεγάλου κύκλου, θα απαριθμήσουμε κάθε «συνοριακό» κόμβο k φορές (μία φορά για κάθε πλακίδιο που τον περιέχει). Κάθε φορά που τον απαριθμούμε η συμβολή του είναι $1/k$, και επομένως η συνολική του συμβολή οτού άθροισμα είναι 1. Το πλήθος των κόμβων στον κύκλο θα είναι και πάλι (κατά προσέγγιση) Np , και καταλήγουμε ξανά στην επιθυμητή ιστόπτη $t = p$.

Ας ξαναδούμε, για παράδειγμα, την αρχική μας παραλληλόγραμμη πλακόστρωση (Σχήμα 1). Κάθε παραλληλόγραμμο πλακίδιο καλύπτει τέσσερις κόμβους, αλλά κάθε κόμβος καλύπτεται από τέσσερα πλακίδια, και έτοι το μέσο πλήθος κόμβων ανά πλακίδιο είναι $4 \cdot 1/4 = 1$, που ισού-

ται με το εμβαδόν του ενός πλακιδίου. Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα μας προσφέρει ένα τυχαίο τρίγωνο το οποίο είναι έτοι τοποθετημένο στο πλέγμα ώστε να μην υπάρχουν άλλοι κόμβοι στο εωτερικό ή το σύνορο του τριγώνου εκτός από τις κορυφές του (δείτε το σκιασμένο τρίγωνο στο Σχήμα 1). Ας αποδείξουμε ότι το εμβαδόν ενός παρόμοιου τριγώνου ισούται με $1/2$ (δηλαδή, έχει το μισό εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου του πλέγματος που, όπως υποθέσαμε, έχει μοναδιαίο εμβαδόν).

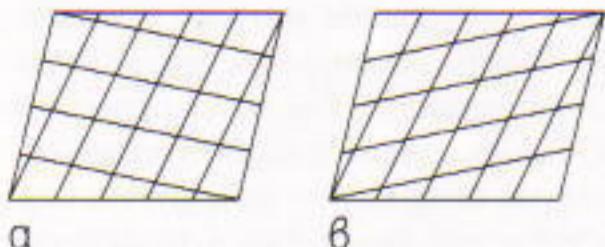
Καλύπτουμε το επίπεδο με όροια αντίγραφα του δεδομένου τριγώνου,



Σχήμα 2

όπως στο Σχήμα 2. Τότε, όλα αυτά τα τρίγωνα θα έχουν τις κορυφές τους στο πλέγμα και δεν θα έχουν κανέναν άλλο κόμβο στο εωτερικό τους ή στις πλευρές τους. (Μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το πλέγμα μεταφέρεται στον εαυτό του έπειτα από οποιαδήποτε παράλληλη μετατόπιση κατά διάνυσμα \vec{AB} —όπου A και B είναι τυχαίοι κόμβοι.) Τώρα, κάθε τριγωνικό πλακίδιο καλύπτει τρεις κόμβους, και κάθε κόμβος ανήκει σε έξι πλακίδια. Επομένως το μέσο πλήθος κόμβων ανά πλακίδιο είναι $3 \cdot 1/6 = 1/2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Με την ευκαιρία, μπορείτε πλέον να δοκιμάσετε να αποδείξετε το θεώρημα του Pick χωρίζοντας ένα τυχαίο πολύγωνο με τις κορυφές του στο πλέγμα σε τρίγωνα αυτού του είδους, και μετρώντας το πλήθος των τριγώνων.

Αυτή η μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού ενός πλακιδίου μπορεί να εφαρμοστεί όταν η πλακόστρωση και το πλέγμα ουνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ισομετρία που μεταφέρει ένα πλακίδιο σε ένα άλλο να απεικονίζει όλο το πλέγμα στον εαυ-



Σχήμα 3

τό του. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι η διάταξη των κόμβων σε όλα τα πλακίδια είναι όμοια.

Άσκηση 1. Οι δύο απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου μοναδιαίας επιφάνειας διαιρούνται σε η ίσα τμήματα, ενώ οι άλλες δύο πλευρές διαιρούνται σε τη ίσα τμήματα. Τα σημεία διαιρεσης συνδέονται με δύο διαφορετικούς τρόπους, όπως θλέπετε στα Σχήματα 3α και 3β. Βρείτε τα εμβαδά των μικρών παραλληλογράμμων που προκύπτουν.

Σε αυτό το πρόβλημα, το πλέγμα δίνεται από τις συνθήκες. Μερικές φορές, όπως στην επόμενη άσκηση, πρέπει να δημιουργήσετε εσείς το κατάλληλο πλέγμα.

Άσκηση 2. Δίνονται τα σημεία A_1 , B_1 και C_1 στις πλευρές BC , CA και AB ενός τριγώνου ABC , τέτοια ώστε $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = 1/2$. Το τρίγωνο ABC έχει μοναδιαίο εμβαδόν. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που οχηματίζεται από τις ευθείες AA_1 , BB_1 και CC_1 .

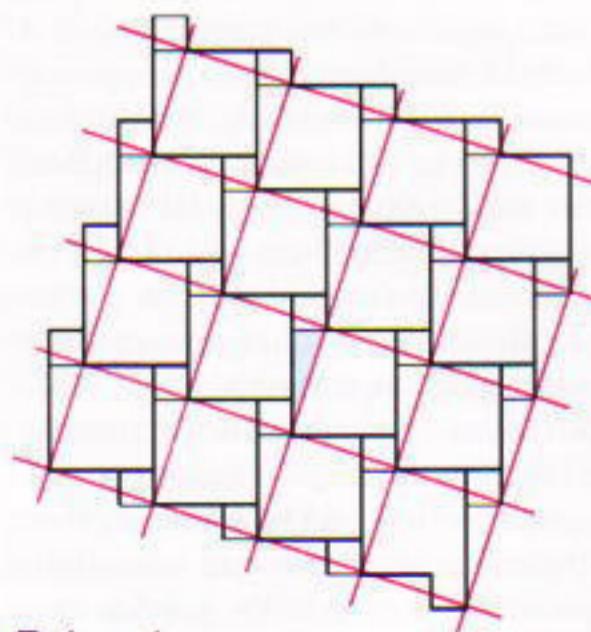
Επανεξέταση του Πυθαγορείου

Μια από τις ωραιότερες εφαρρογές των πλακοστρώσεων είναι η απόδειξη του θεωρήματος του Πυθαγόρα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.

Πάρτε δύο τετράγωνα —ένα μικρό και ένα μεγαλύτερο (θα είναι τα τετράγωνα που κατασκευάζονται με πλευρά τις κάθετες πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου)— και πλακοστρώστε ολόκληρο το επίπεδο με αντίγραφά τους με τον τρόπο που θλέπετε στο Σχήμα 4. (Για να αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο είναι πραγματικά δυνατό και ότι το σχήμα μας δεν είναι απλώς μια οφθαλμοπάτη, μπορούμε να κατασκευάσουμε πλακίδια σχήματος «λατινικού b» αποτελούμενα από ένα μικρό και ένα μεγάλο τετράγωνο, να κατασκευάσουμε άπειρες ταινίες με αυτά τα πλακίδια ταιριάζοντας το κάτω αριστερό μέρος ενός πλακιδίου στην

«εσοχή» ενός άλλου, και να καλύψουμε όλο το επίπεδο με αυτές τις ταινίες χωρίς να αφήσουμε κενά.) Σημειώστε τώρα με κόκκινο την κάτω αριστερή γωνία κάθε μεγάλου τετραγώνου (που είναι ταυτόχρονα η κάτω δεξιά γωνία ενός μικρού τετραγώνου). Τα κόκκινα σημεία σχηματίζουν ένα τετραγωνικό πλέγμα (μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας τις ουρμετρίες του σχήματός μας). Το μήκος της πλευράς των κόκκινων τετραγώνων ισούται με το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι οι πλευρές του μικρού και του μεγάλου τετραγωνικού πλακιδίου —δείτε το μπλε τρίγωνο στο σχήμα. Τώρα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε πλακίδιο σχήματος «b» καλύπτει δύο κόκκινους κόμβους και ότι κάθε κόκκινος κόμβος καλύπτεται από δύο παρόμοια πλακίδια: επομένως το εμβαδόν ενός παρόμοιου πλακιδίου (το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που κατασκευάζονται με βάση τις κάθετες πλευρές του ορθογώνιου) ισούται με $2 \cdot 1/2 = 1$ —δηλαδή, ισούται με το εμβαδόν ενός κόκκινου τετραγώνου (το τετράγωνο της υποτείνουσας).

Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την πλακόστρωση θλέπουμε και πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα πλακίδιο σχήματος «b» σε κομμάτια που μπορούν να συνδυαστούν ώστε να οχηματίσουμε ένα κόκκινο τετράγωνο: τα χωρίζουμε απλώς κατά μήκος των κόκκινων ευθειών. Επομένως, θρήκαμε μία ακόμη απόδειξη του διάσπου θεωρήματος. Παρομοίως, τα περισσότερα από τα προβλήματα αυτού



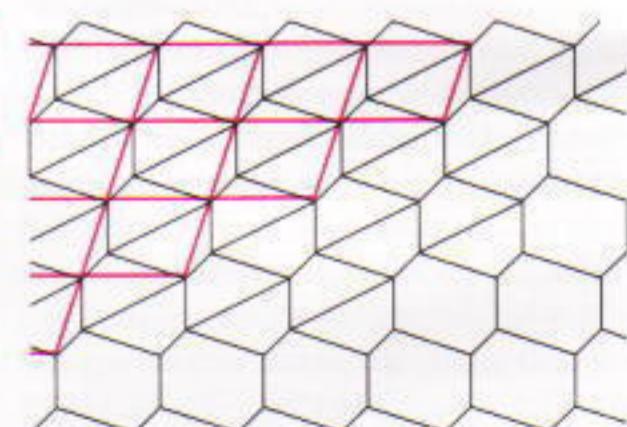
Σχήμα 4

του άρθρου που αφορούν εμβαδά επιλύονται είτε με απαρίθμηση κόμβων είτε με αυτήν την τελευταία μέθοδο χωρισμού και επανασύνδεσης —μπορείτε να επιλέγετε όποια προτιμάτε περισσότερο.

Τετράπλευρα και εξάγωνα

Όσο μεγαλύτερη είναι η ποικιλία των πλακοστρώσεων που εξετάζουμε τόσο μεγαλύτερη είναι και η ποικιλία των αποτελεσμάτων που μπορεί να εξαχθούν. Ας δούμε σε τι ουρπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε με τη βοήθεια μιας πλακόστρωσης που αποτελείται από όμοια τετράπλευρα πλακίδια τυχαίου σχήματος.

Για να πετύχουμε τέτοια πλακόστρωση, θεωρούμε μια παραλληλογραμμη πλακόστρωση (τις κόκκινες ευθείες στο Σχήμα 5) και σημειώνουμε ότι ένα σημείο σε κάθε παραλληλόγραμμο —στην ίδια θέση κάθε φορά σε σχέση με το παραλληλογραμμ (δείτε το πάνω μέρος του Σχήματος 5). Τα σημεία αυτά σχηματίζουν ένα πλέγμα πανομοιότυπο με το πλέγμα των κορυφών της πλακόστρωσης. Αν ενώσουμε το καθένα από αυτά τα σημεία με τις κορυφές του παραλληλογράμμου του και οθήσουμε τις κόκκινες ευθείες, δημιουργούμε μια πλακόστρωση που αποτελείται από ίσα κυρτά τετράπλευρα. Είναι φανερό ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα κυρτό τετράπλευρο οποιουδήποτε σχήματος για να κατασκευάσουμε ανάλογη πλακόστρωση: ξεκινάμε από μια πλακόστρωση παραλληλογράμμων των οποίων οι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες με τις διαγωνίους του δεδομένου τετραπλέυρου, σημειώνουμε τα κατάλληλα σημεία σε αυτά τα παραλληλογράμμα, και συνεχίζουμε όπως προηγου-



Σχήμα 5

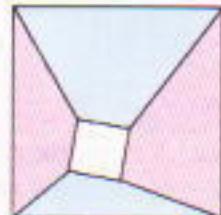
μένως. (Με την ευκαιρία, αυτή η διαδικασία κατασκευής ισχύει και για μπ κυρτά τετράπλευρα — πρέπει απλώς να συνδέουμε τα σημεία με τις κορυφές ενός συγκεκριμένου παραλληλογράμμου που δεν περιέχει αυτό το σημείο, ας πούμε μ' ένα παραλληλόγραμμο που βρίσκεται *π* γραμμές προς τα πάνω και *τ* γραμμές προς τα δεξιά του παραλληλογράμμου που περιέχει το σημείο. Μπορείτε να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε μια παρόμοια πλακόστρωση και να διαπιστώσετε αν τα γεγονότα που θα σχολιάσουμε στη συνέχεια ισχύουν και γι' αυτήν.)

Κάθε δύο διαδοχικά τετράπλευρα πλακίδια της πλακόστρωσής μας είναι συμμετρικά ως προς το μέσο της κοινής τους πλευράς, διότι οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ίσες και παράλληλες. Τα κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα (πλευρές παραλληλογράμμων) χωρίζουν τα συγκεκριμένα πλακίδια σε ζεύγη τριγώνων, και παρατηρούμε ότι τα τέσσερα τριγώνα που δημιουργούνται από δύο διαδοχικά τετράπλευρα είναι δυνατό να μετατοπιστούν ώστε να καλύψουν ένα κόκκινο παραλληλόγραμμο. Επομένως, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ισούται με το μισό του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου. Επαληθεύστε το μετρώντας κόμβους! Μια ακόρι απλή συνέπεια είναι ότι για κάθε σημείο *P* του παραλληλογράμμου *ABCD* το άθροιο των εμβαδών των τριγώνων *PAB* και *PCD* ισούται με το άθροιο των εμβαδών των *PBC* και *PDA* — κάθε ζεύγος τριγώνων δημιουργείται από το ίδιο τετράπλευρο τέμνοντάς το κάθε φορά κατά μήκος διαφορετικής διαγώνιου.

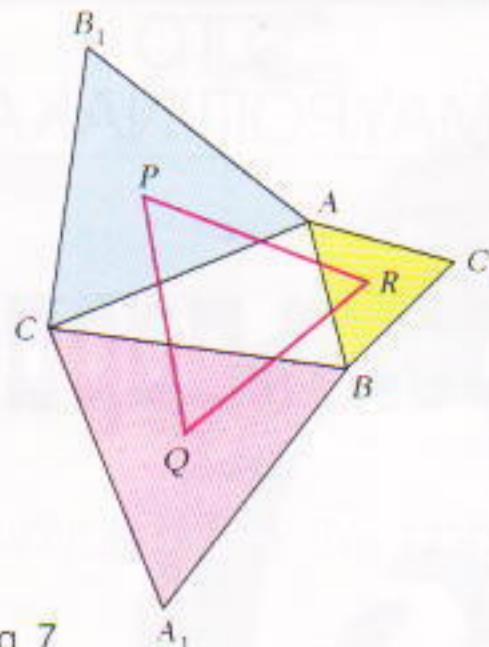
Αυτή η ιδιότητα των ζευγών τριγώνων είναι σχεδόν προφανής. Η γενίκευσή της, δημοσ., που ακολουθεί στην επόμενη ασκηση, θα απαιτήσει οπωδόποτε σοβαρή προσπάθεια.

Άσκηση 3. (V. Proizvolov) Μέσα σ' ένα τετράγωνο υπάρχει ένα μικρότερο. Οι κορυφές τους συνδέονται σχηματίζοντας τα τέσσερα τετράπλευρα που βλέπετε στο Σχήμα 6. Αποδείξτε ότι το άθροιο των εμβαδών των μπλε περιοχών ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ροζ περιοχών.

Οι επόμενες ασκήσεις αποδεικνύουν



Σχήμα 6



Σχήμα 7

ότι το πεδίο εφαρμογής των τεχνικών πλακόστρωσης είναι ευρύτερο απ' όσο θα μπορούσαμε να φανταστούμε κρίνοντας από τα προηγούμενα προβλήματα.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι η διάμεσος ενός τετραπλεύρου — δηλαδή το ευθύγραμμό τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών — είναι το πολύ ίσο με το ημιάθροιο των δύο άλλων πλευρών, ενώ ισούται με το ημιάθροιο τους μόνο όταν αυτές οι δύο πλευρές είναι παράλληλες.

Άσκηση 5. Στην αρχαία Αίγυπτο υπολόγιζαν το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ως το γινόμενο των ημιάθροιοι των απέναντι πλευρών του. Αποδείξτε ότι αυτός ο τύπος δίνει σωστό αποτέλεσμα μόνο στην περίπτωση ορθογωνίου.

Άσκηση 6. (I. Goldsheid). Έστω *P* ένα τυχαίο σημείο σ' ένα ορθογώνιο *ABCD*. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του *ABCD* είναι το πολύ $PA \cdot PC + PB \cdot PD$. [Υπόδειξη: αν θέλετε να λύσετε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πλακόστρωσης, πρέπει να τροποποιήσετε την κατασκευή της τετράπλευρης πλακόστρωσης που περιγράφαμε προηγουμένως.]

Ας επιστρέψουμε στο Σχήμα 5. Αν οθίσουμε την κοινή πλευρά δύο διαδοχικών τετραπλεύρων και όλες τις πλευρές των τετραπλεύρων που είναι παράλληλες της, θα πάρουμε μια πλακόστρωση του επιπέδου με εξάγωνα. Τα εξάγωνα αυτά έχουν κέντρα συμμετρίας (τα μέσα των οθισμένων πλευρών) και οι απέναντι πλευρές τους είναι ίσες και παράλληλες. Φυσικά, οποιοδήποτε εξάγωνο με κέντρο συμμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί

ως κατάλληλο πλακίδιο για μια παρόμοια πλακόστρωση.

Άσκηση 7. Συνδέουμε εναλλάξ τρεις κορυφές ενός εξαγώνου με κέντρο συμμετρίας, σχηματίζοντας ένα τρίγωνο. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του συγκεκριμένου τριγώνου ισούται με το μισό του εμβαδού του εξαγώνου.

Το πρόβλημα του Ναπολέοντα

Το παράδειγμα που θα σας παρουσιάσω στη συνέχεια είναι σίγουρα το πιο αξιοσημείωτο και εντυπωσιακό. Είναι ένα μάλλον φημισμένο θεώρημα που συνδέεται συχνά με το όνομα του Ναπολέοντα Βοναπάρτη. Είναι το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω *ABC* ένα τυχαίο τρίγωνο. Έστω *ABC₁*, *BCA₁*, και *CAB₁* τούπλευρα τρίγωνα που κατασκεύαζουμε στο εξωτερικό των πλευρών του τριγώνου *ABC*, και *P*, *Q*, *R* τα κέντρα τους (Σχήμα 7). Τότε το τρίγωνο *PQR* είναι επίσης τούπλευρο.

Το Σχήμα 8 μάς δείχνει ότι τα τρίγωνα του προβλήματος είναι δυνατό να εμφυτευθούν μέσα σε μια συγκεκριμένη πλακόστρωση. Μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως μια εξαγωνική πλακόστρωση όπως αυτές που εξετάσαμε παραπάνω, στην οποία κάθε εξάγωνο χωρίζεται σε τρία τούπλευρα τρίγωνα ίσα με τα *ABC₁*, *BCA₁*, και *CAB₁*, και σε τρία τρίγωνα ίσα με το *ABC*. Για να επιβεβαιώσουμε ότι υπάρχει τέτοια πλακόστρωση, κατασκεύαζουμε τα τρίγωνα *B₁EA* και *C₁AD* ίσα με το *ABC* (τέτοια ώστε οι κορυφές να αντιστοιχούν με βάση τις τούπτες $\angle E B_1 A = \angle A C_1 D = \angle B A C$ κ.ο.κ.). Τότε $B_1 E = AB = BC_1$, και $\angle E B_1 C + \angle B_1 C B + \angle C B C_1 = (\angle E B_1 A + 60^\circ) + (60^\circ + \angle A C B) + (\angle C B A + 60^\circ) = 180^\circ + (\angle B A C + \angle A C B + \angle C B A) = 360^\circ$, πράγμα που σημαίνει ότι το *B₁E* είναι παράλληλο με το *BC₁* (γιατί;). Ομοίως, το *CB₁D* είναι ίσο και παράλληλο με το *C₁D*. Συνεπάγεται ότι τα *B₁EC₁B* και *CB₁DC₁* είναι παραλληλόγραμμα με κοινή διαγώνιο την *B₁C₁*, και επορένως οι διαγώνιες τους *BE*, *B₁C₁*, και *CD* έχουν κοινό μέσο: άρα, το εξάγωνο *CBC₁DEB₁* έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του, πράγμα που μας επιτρέπει να πλακοστρώσουμε το επίπεδο με τα αντίγραφά του. Πα-

Η συνέχεια στη σελ. 62

Τα υπέροχα παραβολοειδή

Διπλή ανάκλαση και ανακατανομή της ενέργειας

M.I. Feingold

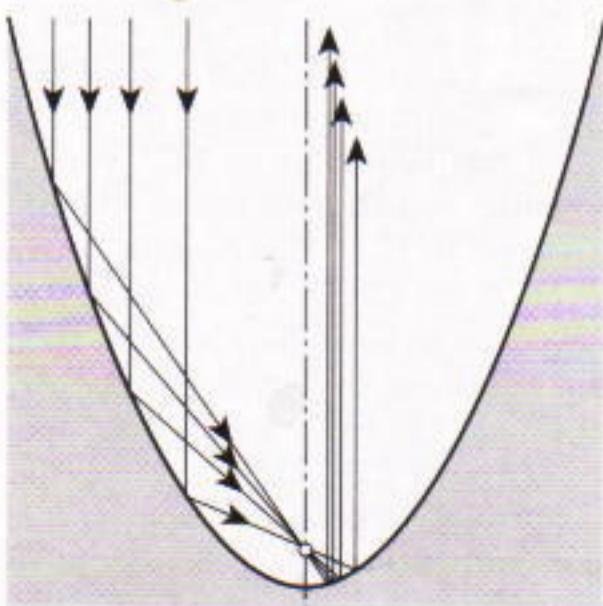
Ο «ψυσικός» οριομός των οπτικών ιδιοτήτων της παραβολής μπορεί να βασιστεί στην επόμενη ιδιότητα: μια ακτίνα φωτός που προσπίπτει σε μια παραβολή ακολουθώντας πορεία παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας της, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από την εστία της παραβολής. Με βάση την αρχή του αντιοτρεπτού της πορείας του φωτός συμπεραίνουμε ότι μια ακτίνα που διέρχεται από την εστία μιας παραβολής θα κινηθεί παράλληλα με τον άξονα συμμετρίας της μετά την ανάκλασή της. Σε αυτό το άρθρο θα ασχοληθούμε με οριομένα καθαρά «ψυσικά» χαρακτηριστικά της ανάκλασης του φωτός πάνω σ'ένα παραβολοειδές — δηλαδή, πάνω σε μια επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή μιας παραβολής γύρω από τον άξονα συμμετρίας της. Το παραβολοειδές κάτοπτρο είναι ένα παραβολοειδές με κοί-

λη ανάκλαστική επιφάνεια. Όταν ακτίνες φωτός προσπίπτουν σ'ένα παρόμοιο κάτοπτρο παράλληλα με τον άξονα συμμετρίας του παραβολοειδούς, μετά την ανάκλαση όλες τους διέρχονται από την εστία του παραβολοειδούς κατόπιν, λες και συγκεντρώνονται όλες εκεί. Από την άλλη πλευρά, οι ακτίνες που προέρχονται από μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στην εστία του παραβολοειδούς κατόπιν, μετά την ανάκλαση τους σχηματίζουν παράλληλη δέσμη.

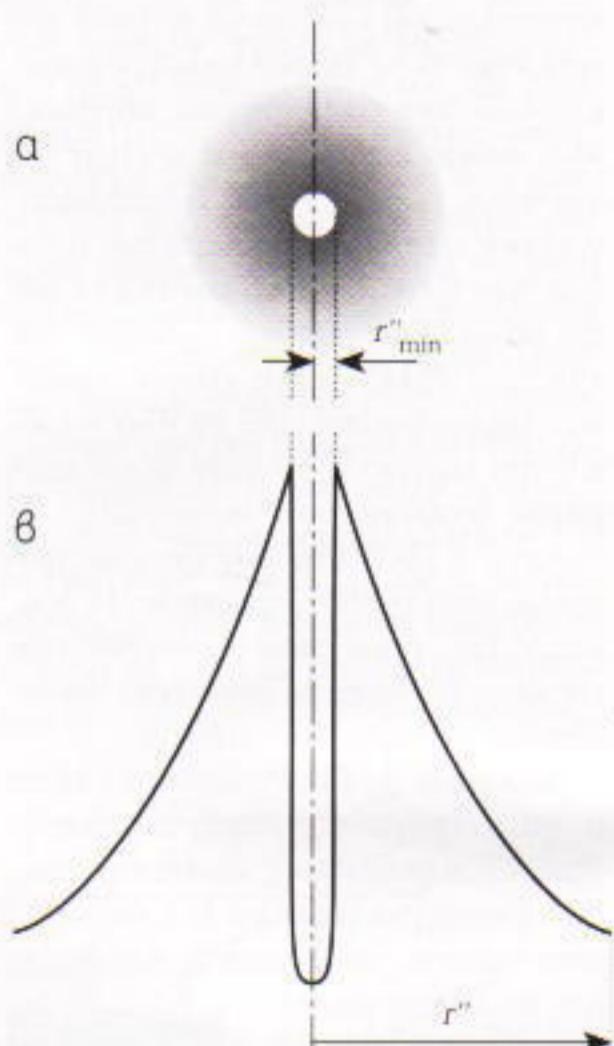
Πρέπει να επομένουμε ότι και τα δύο αυτά φαινόμενα είναι το αποτέλεσμα μίας και μόνο ανάκλασης των ακτίνων στην παραβολοειδή επιφάνεια. Όταν το παραβολοειδές έχει αρκετά μεγάλο βάθος, οι περισσότερες από τις εισερχόμενες ακτίνες θα ανακλαστούν δύο φορές (Σχήμα 1). Μετά την πρώτη ανάκλαση, κάθε ακτίνα, αφού διέλθει από την εστία, θα ανακλαστεί ακόμη μία φορά στην απέναντι πλευρά τού παραβολοειδούς. Με άλλα λόγια, η εστία γίνεται ένα είδος σημειακής πηγής φωτός.¹ Όμως, οι ακτίνες που προέρχονται από αυτό το σημείο εγκαταλείπουν το παραβολοειδές σχηματίζοντας παράλληλη δέσμη. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το παραβολοειδές κάτοπτρο μετατρέπει μια εισερχόμενη δέσμη, που είναι παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας του, σε εξερχό-

μενη δέσμη, που είναι επίσης παράλληλη με αυτό τον άξονα.

Η εισερχόμενη και η εξερχόμενη δέσμη, όμως, διαφέρουν σε ότι αφορά την ενέργειά τους. Για να το καταλάβουμε αυτό, ας δούμε το Σχήμα 2. Παρουσιάζει τα αποτελέσματα ενός πολύ απλού πειράματος. Φωτογραφικό φίλμ τοποθετείται κάθετα στον άξονα συμμετρίας του κατόπιν, με τη



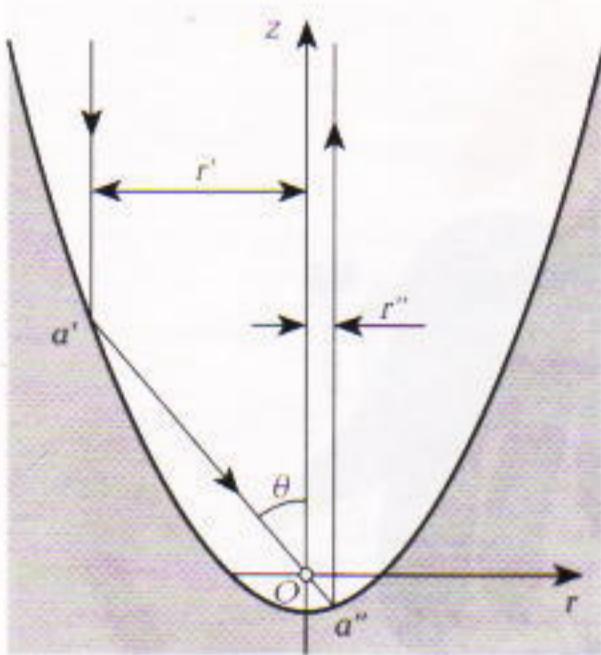
Σχήμα 1



Σχήμα 2

(a) Κατανομή της έντασης του φωτός στην εγκάρσια τομή της εξερχόμενης δέσμης.
(b) Διάγραμμα της έντασης του φωτός ως συνάρτωσης της απόστασης από τον άξονα της δέσμης.





Σχήμα 3

φωτοευαισθητή επιφάνειά του προς την πλευρά της ανακλαστικής επιφάνειας του κάτοπτρου. Το κάτοπτρο φωτίζεται από μια φωτεινή δέσμη παράλληλη στον άξονα, π. οποία παρουσιάζει οροιόμορφη κατανομή ενέργειας κατά την εγκάρσια τομή της — δηλαδή, σε κάθε σημείο της εγκάρσιας τομής της δέσμης, διέρχεται από τη μονάδα της επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου το ίδιο ποσό ενέργειας. Το εισερχόμενο φως θα έπεφτε οροιόγενώς πάνω στο φιλμ. Στο πείραμά μας, όμως, πάνω στη φωτοευαισθητή επιφάνεια του φιλμ πέφτει το εξερχόμενο φως, π. οποίο δημιουργεί το αποτέλεσμα που βλέπετε στο Σχήμα 2.

Κατ' αρχάς μπορούμε να ερμηνεύσουμε το γεγονός αυτό με τον εξής τρόπο: Έστω Oz ο άξονας συμμετρίας του παραβολοειδούς, και έστω r' και r'' οι αποστάσεις ανάμεσα σ' αυτόν και στις εισερχόμενες και εξερχόμενες ακτίνες αντίστοιχα (Σχήμα 3). Όσο μακρύτερα από τον άξονα βρίσκεται η προσπίπουσα δέσμη τόσο πιο κοντά στον άξονα είναι η αναδυόμενη — δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το r' τόσο μικρότερο είναι το r'' . Επομένως, η ενέργεια των περιφερειακών περιοχών της εισερχόμενης δέσμης μετατοπίζεται προς τις κεντρικές περιοχές της εξερχόμενης δέσμης. Εάν η προσπίπουσα δέσμη είναι αρκετά πλατιά (δηλαδή, στην περίπτωση που η ακτίνα του κάτοπτρου είναι μεγάλη), αυτό το φαινόμενο οδηγεί σε οπραντική συγκέντρωση της ενέργειας κοντά στον άξονα συμμετρίας. Το αποτέλεσμα είναι ότι το φως εξέρ-

χεται από το κάτοπτρο έχοντας πρακτικά τη μορφή μιας λεπτής δέσμης, και δυσ πλατύτερη είναι η εισερχόμενη δέσμη τόσο στενότερη θα είναι η εξερχόμενη.

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: ένα παραβολοειδές κάτοπτρο συγκεντρώνει ενέργεια όχι μόνο στην εστία του αλλά και κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του.

Μπορούμε να κάνουμε μερικούς υπολογισμούς γι' αυτό το φαινόμενο. Ας θεωρήσουμε την παραβολή από την περιστροφή της οποίας γύρω από τον άξονα Oz δημιουργείται η παραβολοειδής επιφάνεια. Αν θεωρήσουμε ως αρχή O του συστήματος των συντεταγμένων την εστία, π. η εξίσωση της παραβολής είναι π

$$z = \frac{r^2}{4f} - f, \quad (1)$$

όπου f είναι η εστιακή απόσταση, και r και z είναι αντίστοιχα η τετρημένη και η τεταγμένη ενός τυχόντος σημείου της παραβολής. Μια εισερχόμενη ακτίνα που συναντά την παραβολή στο σημείο a' σε απόσταση r' από τον άξονα συμμετρίας θα περάσει μετά την ανάκλαση από την εστία και στη συνέχεια θα συναντήσει ξανά την παραβολή στο σημείο a'' σε απόσταση r'' από τον άξονα Oz (Σχήμα 3). Ας συμβολίσουμε με θ τη γωνία που σχηματίζεται από τον άξονα Oz και το τμήμα $a'a''$. Η εξίσωση της ευθείας $a'a''$ είναι π

$$z = -r \cdot \operatorname{sin} \theta. \quad (2)$$

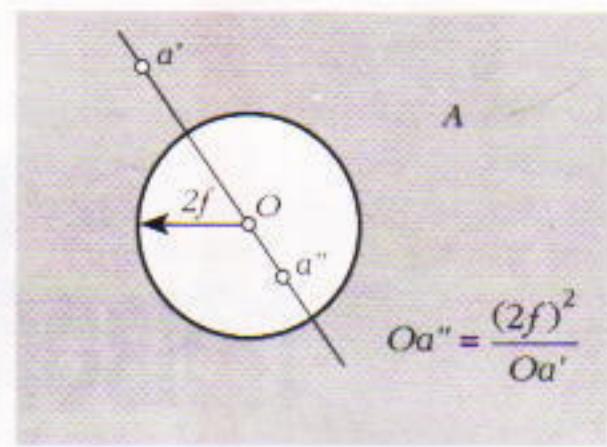
Τα σημεία a' και a'' ανίκουν τόσο στην παραβολή που ορίζει η εξίσωση (1) όσο και στην ευθεία που ορίζει η εξίσωση (2). Επομένως, μπορούμε να εξισώσουμε τα δεξιά μέλη των (1) και (2):

$$r^2 + 4fr \cdot \operatorname{sin} \theta - 4f^2 = 0. \quad (3)$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση έχουμε

$$r_1 = 2f \cdot \operatorname{sin} \frac{\theta}{2}, \quad r_2 = 2f \cdot \operatorname{csc} \frac{\theta}{2}. \quad (4)$$

Οι ρίζες r_1 και r_2 είναι οι τιμές της συντεταγμένης r για τα σημεία a' και a'' . Επομένως, $r' = |r_1|$ και $r'' = r_2$.



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (4) συνεπάγεται ότι

$$r'r'' = 4f^2. \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) μπορεί να προκύψει από το θεώρημα του Viète χωρίς να επιλύσουμε την εξίσωση (3). Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι προηγούμενο ποιοτικό συμπέρασμά μας ότι οι αποστάσεις των εισερχόμενων και των εξερχόμενων ακτίνων από τον άξονα συμμετρίας Oz είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Μπορούμε να «διαβάσουμε» την εξίσωση (5) με τον εξής τρόπο. Θεωρήστε το επίπεδο A , κάθετο στον άξονα Oz του παραβολοειδούς κάτοπτρου. Κάθε ακτίνα, είτε εισερχόμενη είτε εξερχόμενη παράλληλα με τον άξονα Oz , τέλινε το επίπεδο αυτό «αφίνοντας» ένα ίχνος με μορφή κουκκίδας (Σχήμα 4). Σύρφωνα με την εξίσωση (5), η διπλή ανάκλαση στη παραβολοειδές ισοδυναμεί μ' ένα μετασχηματισμό των σημείων του επιπέδου A , ο οποίος μετασχηματίζει κάθε ευθύγραμμο τμήμα $Oa' = |r'|$ στο τμήμα $Oa'' = |4f^2/r_1|$. Αυτό το είδος μετασχηματισμού ονομάζεται αντιστροφή ως προς κύκλο² κέντρου O και ακτίνας $2f$.

Οι εξίσωσεις (4) και (5) περιέχουν όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε σχετικά με την ανακατανομή της ενέργειας μιας προσπίπουσας δέσμης φωτός. Ας προσπαθήσουμε να τις εντοπίσουμε.

Ας ξεχωρίσουμε μέσα στην προσπίπουσα δέσμη έναν στενό δακτύλιο πλάτους $\Delta r'$ και εσωτερικής ακτίνας r' ($\Delta r' \ll r'$) ο οποίος βρίσκεται

2. Στην πραγματικότητα, σ' αυτή την περίπτωση δεν έχουμε μια «καθαρή» αντιστροφή, αλλά ένα συνδυασμό δύο μετασχηματισμών: μια αντιστροφή και ένα μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς το σημείο O .

σ' ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα του παραβολειδούς. Οι αποστάσεις των ακτίνων που διέρχονται από αυτόν το δακτύλιο από τον άξονα συμμετρίας κυμαίνονται στο διάστημα $[r', r' + \Delta r']$ —δείτε το Σχήμα 5. Μετά τη διπλή ανάκλαση στο κάτοπτρο, αυτές οι ακτίνες τέμνουν το επίπεδο A σε σημεία που ανήκουν σ' έναν δακτύλιο πλάτους $\Delta r''$ και εξωτερικής ακτίνας r'' . Δηλαδή, η εξωτερική ακτίνα $r'' + \Delta r''$ του δακτυλίου «εισόδου» αντιστοιχεί στην εσωτερική ακτίνα $r'' - \Delta r''$ του δακτυλίου «εξόδου». Σύμφωνα με την εξίσωση (5), το γινόμενο αυτών των ακτίνων είναι $4f^2$ (Θα πάφουμε να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα των απόλυτων τιμών και θα θεωρήσουμε το r ίσο με την αριθμητική τιμή της απόστασης). Επομένως,

$$(r' + \Delta r')(r'' - \Delta r'') = r'r'' + r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 4f^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $r'r'' = 4f^2$, πάρουμε

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 0.$$

Αφού $\Delta r' \ll r'$ και $\Delta r'' \ll r''$, μπορούμε να αγνοήσουμε τον τελευταίο όρο της εξίσωσης και να γράψουμε

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' = 0.$$

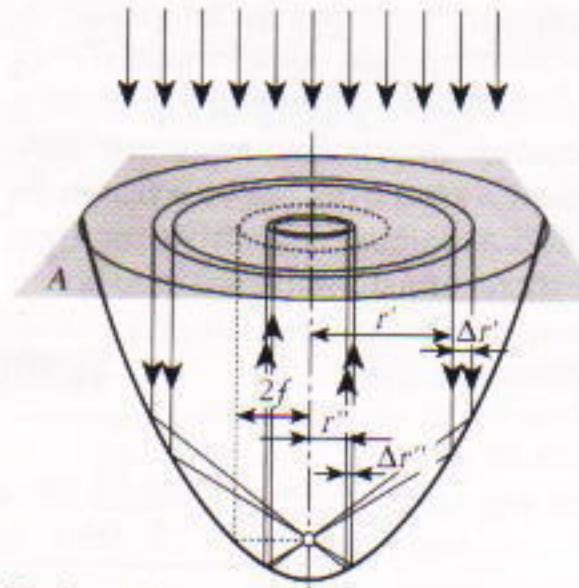
Συνεπάγεται τώρα άμεσα ότι

$$\frac{\Delta r''}{\Delta r'} = \frac{r''}{r'} = \frac{4f^2}{r'^2},$$

ή

$$\Delta r'' = \Delta r' \frac{4f^2}{r'^2}. \quad (6)$$

Επομένως, η ενέργεια, η οποία στην περίπτωση της εξερχόμενης δέομης διέρχεται από έναν δακτύλιο πλάτους $\Delta r'$, μετά τη διπλή ανάκλαση των ακτίνων στο κάτοπτρο διέρχεται από έναν δακτύλιο πλάτους $\Delta r'' < \Delta r'$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα της ενέργειας που διέρχεται από τη μονάδα επιφανείας στη μονάδα του χρόνου (αυτή η χαρακτηριστική τιμή είναι γνωστή ως ένταση της φωτεινής δέομης) είναι μεγαλύτερη στον δακτύλιο «εισόδου» απ' όσο στον δακτύλιο «εξόδου». Θεωρήσαμε την περίπτωση όπου $r' > 2f$. Αν $r' < 2f$, ο δακτύλιος «εισόδου» θα είναι μεγα-



Σχήμα 5

λύτερος από τον δακτύλιο «εξόδου», και αυτό σημαίνει ότι η ένταση του εξερχόμενου φωτός θα είναι μεγαλύτερη από την ένταση του εισερχόμενου.

Επομένως, η ανάκλαση του φωτός από το παραβολειδές κάτοπτρο προκαλεί ανακατανομή της ενέργειας. Ας βρούμε πώς μεταβάλλεται η ένταση σε σχέση με την απόσταση από τον άξονα συμμετρίας του παραβολειδούς. Έστω ότι η ένταση του εισερχόμενου φωτός είναι J_0 . Τότε, το ποσό ενέργειας που διέρχεται από έναν δακτύλιο πλάτους $\Delta r'$ στη μονάδα του χρόνου (δηλαδή, η φωτεινή ροή που διέρχεται από τον δακτύλιο) είναι το γινόμενο J_0 επί το εμβαδόν του δακτυλίου —δηλαδή

$$\Delta\Phi = J_0 2\pi r' \Delta r',$$

όπου r' είναι η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου.³ Μετά τη διπλή ανάκλαση στο κάτοπτρο όλη αυτή η ροή θα περάσει μέσα από εμβαδόν $2\pi r'' \Delta r''$. Επομένως η ένταση της εξερχόμενης δέομης θα είναι

$$J = \frac{\Delta\Phi}{2\pi r'' \Delta r''} = J_0 \frac{r' \Delta r'}{r'' \Delta r''} = J_0 \frac{16f^4}{r''^4}. \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) περιγράφει την απότομη αύξηση της έντασης του φωτός όταν μειώνεται η r'' —δηλαδή, όταν μειώνεται η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.

3. Το εμβαδόν του δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους με ακτίνες r και $r + \Delta r$ είναι $S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$. Οταν $\Delta r \ll r$, μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $(\Delta r)^2$ και να θεωρήσουμε ότι $S = 2\pi r \Delta r$.

Εντούτοις, αυτό το αποτέλεσμα δεν σημαίνει ότι η ένταση γίνεται άπειρη ακριβώς πάνω στον άξονα. Οι ακτίνες που αναδύονται πλησιέστερα στον άξονα είναι αυτές που βρίσκονται στην περιφέρεια της προσπίπουσας δέσμης. Είναι φανερό ότι η μεγαλύτερη απόσταση, r_{\max} , μιας προσπίπουσας ακτίνας από τον άξονα συμμετρίας ισούται με την ακτίνα του κατόπτρου. Αυτή αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση r_{\min} για την εξερχόμενη φωτός αυξάνεται σύμφωνα με την εξίσωση (7) όταν η r'' μειώνεται έως την τιμή r_{\min} , αλλά γίνεται πρακτικά μπενική όταν $r'' < r_{\min}$.⁴ Γι' αυτό το λόγο υπάρχει στο Σχήμα 2, στην καμπύλη της έντασης, η βαθιά κοιλότητα κοντά στον άξονα. Πάντως, η μέγιστη ένταση, που εμφανίζεται πολύ κοντά σε αυτή την κοιλότητα, μπορεί πολλές φορές να είναι μεγαλύτερη από την ένταση J_0 της εισερχόμενης δέομης.

Αποκτήσαμε όλες αυτές τις πληροφορίες από έναν απλό τύπο —την εξίσωση (5)!

Ας εξετάσουμε τώρα τις εξιόωσεις (4). Περιγράφουν την πορεία των ακτίνων «μέσα» στο παραβολειδές, μεταξύ των δύο ανακλάσεων. Αυτές οι ακτίνες, συγκλίνοντας κατ' αρχάς προς την εστία και αποκλίνοντας στη συνέχεια από αυτήν, σχηματίζουν ένα είδος σημειακής πηγής ακριβώς στη θέση της εστίας. Αυτή η πηγή, όμως, διαφέρει από μια πραγματική. Εκπέμπει το φως ανισοτροπικά —δηλαδή, η ένταση του εκπεμπόμενου φωτός μεταβάλλεται ανάλογα με τη διεύθυνση της δέομης.

Δεν μπορούμε να μη σκεφτούμε ότι υπάρχει κάποια απόκρυφη ομορφιά σε όλες αυτές τις ιδιότητες του παραβολειδούς!

Πρέπει να επομένω ότι τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε είναι ουσιά μόνο μέσα στο πλαίσιο εξιδιανικευμένων καταστάσεων που δεν αντιστοιχούν πλήρως στην πραγματικότητα. Αναφερθήκαμε στο παραβολειδές ως μια μαθηματικά ιδανική επιφάνεια. Ένα πραγματικό κάτοπτρο είναι

4. Στην πραγματικότητα, η κατανομή της έντασης του εξερχόμενου φωτός είναι πιο περιλογιστική της περιθλασης στα άκρα του κατόπτρου.

μόνο μια προσέγγισή του. Η ανακλαστική επιφάνειά του δεν είναι εντελώς συμμετρική: έχει τρύπα που δεν είναι εξίσου λεία με τα υπόλοιπα — κ.ο.κ.

Επίσης, έχουμε χρονιμοποιήσει την έννοια της δέσμης παραλλήλων ακτίνων. Στην πραγματικότητα, οποιαδήποτε φωτεινή δέσμη διαδίδεται μέσα σε κάποια μη μπενική στρεά γωνία. Όλο κι όλο μπορούμε να μιλήσουμε για μια πρακτικά παράλληλη δέσμη — δηλαδή, μια δέσμη που αποκλίνει τόσο λιγό ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να αγνοήσουμε αυτή την απόκλιση για κάποια ουγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Για παράδειγμα, μια φωτεινή δέσμη που πέφτει πάνω σ'ένα παραβολειδές κάτοπτρο προερχόμενη από ένα άστρο μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά παράλληλη. Άλλα, ακόμη και σ'αυτή την περίπτωση, η εξερχόμενη δέσμη θα παραμορφωθεί εξαιτίας της λεγόμενης εκτροπής λόγω περιθλασης, η οποία οφείλεται στην κυρατική φύση του φωτός. Και όσο στενότερη είναι αυτή η δέσμη (δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του κατόπτρου) τόσο μεγαλύτερη είναι η εκτροπή των ακτίνων. Ποσοτικά, η εκτροπή λόγω περιθλασης χαρακτηρίζεται από τη γωνία απόκλισης που σχηματίζει μια εκτραπείσα ακτίνα με τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Η τάξη μεγέθους αυτής της γωνίας είναι

$$\varphi \cong \frac{\lambda}{r''_{\min}},$$

όπου λ είναι το μήκος κύρατος του

προσιπποντος φωτός. Επομένως, όσο λεπτότερη και ουγκεκριμένη είναι η δέσμη τόσο ομαντικότερη είναι η εκτροπή. Ας υπολογίσουμε την απόσταση z μέσα στην οποία η δέσμη θα έχει διπλασιάσει την ακτίνα της (έως αυτό το σημείο η δέσμη μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά παράλληλη). Βρίσκουμε ότι

$$z \equiv \frac{r''_{\min}}{\varphi} \equiv \frac{r''_{\min}}{\lambda} \equiv \left(\frac{r''_{\min}}{\lambda} \right)^2.$$

Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, όσο λεπτότερη και ουγκεκριμένη είναι η δέσμη (με τις υπόλοιπες ουνθήκες να παραμένουν οι ίδιες) τόσο λιγότερο «παράλληλη» μένει. Συνεπώς, δεν είναι μόνο πρακτικά αδύνατο να κατασκευάσουμε ένα πολύ βαθύ παραβολειδές, αλλά είναι και άχρηστο από θεωρητική άποψη. Η κυρατική θεωρία του φωτός δεν μας επιτρέπει να πετύχουμε μια δέσμη φωτός που να είναι τόσο ισχυρή αλλά και τόσο παράλληλη όσο επιθυμούμε.

Επομένως, τα όμορφα και απρόσιμα φαινόμενα που συνδέονται με τη διπλή ανάκλαση στο παραβολειδές εκ περιστροφής είναι δυνατά μόνο μέσα σε κάποια συγκεκριμένα όρια — όταν μπορούμε να αγνοήσουμε την κυρατική φύση του φωτός. Αυτό συμβαίνει όταν η μικρότερη από όλες τις διαστάσεις του συστήματος — η ακτίνα r''_{\min} — είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος κύρατος του φωτός. Αυτή η ουνθήκη θέτει ένα όριο στο βαθμό «ενίσχυσης» του φωτός που μπορούμε να επιτύχουμε.

Συνέχεια από τη σελ. 17

ενώ στη συνέχεια γίνεται χημική επεξεργασία του υλικού. Αυτές και άλλες τεχνητές πορώδεις κατασκευές χρησιμοποιούνται επί μακρόν στην πλεκτρονική και την οπτική, καθώς και σε πολλές τεχνολογικές διεργασίες σχετικές με το φιλτράρισμα υγρών και αερίων. Βεβαίως, αυτά τα μοντέρνα υλικά έχουν εκτοπίσει κατά πολύ τα πολυπορειδή σε τεχνικά χαρακτηριστικά και σε δυνάμει εφαρμογές. Από την άλλη, όμως, οι ουγγρονες επινοήσεις δεν μαρίζουν όπως τα παντάρια, ούτε φυτρώνει από κάτω τους η αρμιλλαρία η μελιτοφόρος...

ΠΕΡΑΝ

Η δημιουργία και η παραγωγή εντύπων, είναι το κύριο αντικείμενο των εργασιών μας. Διαβέβουμε γι' αυτό τη γνώση, την πείρα και τον τεχνολογικό εξοπλισμό.

Από την αρχική ιδέα μέχρι την τελική εκπόνηση, έμαστε κοντά σας για να εξυπηρετήσουμε τις ανάγκες σας και να πετύχουμε το αριθμό δυνατό αποτέλεσμα.

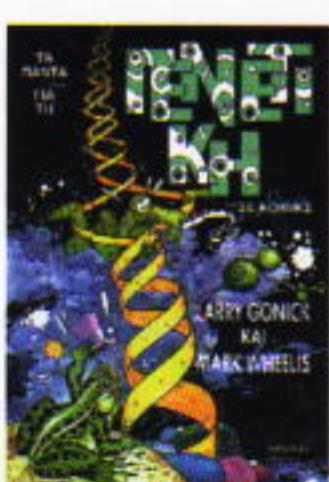
Όποια και αν είναι η δουλειά σας, μικρή ή μεγάλη, σε όποιο στάδιο και αν βρισκεται, μη διστάσετε να ζητήσετε τη συνδρομή μας.

Γιατί... για μας, οι πελάτες είναι συμεράτες μας, ο σκοπός τους σκοπός μας και η επένδυσή τους δική μας επένδυση.

ΡΕΘΥΜΝΗΣ 8, 164 52 ΑΘΗΝΑ

ΤΗΛ.: (01) 99 67 156

FAX : (01) 99 67 156



224 σελ. 17 - 25 εκ., 2.800 δρ.

• « Αν δεν μπορέσετε να κατανοήσετε τη γενετική από το βιβλίο, πολύ φοβάμαι ότι δεν θα το καταφέρετε ποτέ. »

The New Scientist
Η κατινόητη θεμάτων όλως η κληρονομιά της, ο νόμος του Μέντελ, οι μεταλλάξεις, το DNA, οι γενετικές ασθένειες, ο ανασυνδιασμός των γονιδίων κ.λ. ποτέ άλλοτε δεν έχει γίνει τόσο επικόλη και τη ανέγνωση τόσο ειχαριστη.

O Mark Wheelis είναι καθηγητής μικροβιολογίας στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Ντέβις.

Από τις Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ

TO QUANTUM ΔΙΑΒΑΖΕΙ

Ένα βιβλίο μαθηματικών προβλημάτων

Loren C. Larson

Problem-solving through Problems, Σειρά: Problem Books in Mathematics, Springer Verlag, 1983.

του Γιώργου Ευαγγελόπουλου

Ο εκδοτικός οίκος Springer, ίσως ο πιο σημαντικός της εποχής μας με κριτήρια τον αριθμό, την ποικιλία αλλά και την ποιότητα των μαθηματικών του εκδόσεων, είναι εκείνος που μας προσέφερε το αξεπέραστο έργο των Pólya και Szegő, *Problems and Theorems in Analysis*. Το έργο αυτό γαλούχησε γενιές νεαρών φιλόδοξων μαθηματικών, αλλά ενέπνευσε και ώριμους ερευνητές και δασκάλους. Έγινε κλασικό!

Πολλά χρόνια μετά την πρώτη έκδοση του έργου αυτού, μόλις το 1981, ο Springer, ανάμεσα στις τόσες σειρές των μαθηματικών του εκδόσεων, καθιερώνει ακόμη μία, υπό τον τίτλο: "Problem Books in Mathematics". Διευθυντής της είναι ο καθηγητής Paul R. Halmos, διακεκριμένος μαθηματικός. Στη σειρά περιλαμβάνεται ήδη και το έργο ενός καθηγητή του Μαθηματικ. Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών πρόκειται για το *Exercises in Probability* του Θεόφιλου Κάκουλλου.

Το βιβλίο του Larson υπήρξε ένα από τα πρώτα της σειράς. Είναι αρκετά γνωστό στους Έλληνες μαθηματικούς, όπως διαπιστώνουμε αν εξετάσουμε την ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία. Επί παραδείγματι, οι καθηγητές Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλας το περιλαμβάνουν στην εξαιρετικά ενημερωμένη βιβλιογραφία που παραθέτουν στο τέλος του θαυμάσιου βιβλίου τους *Απειροστικός Λογισμός* —τόμος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1987. Αξίζει να τονιστεί ότι οι εν λόγω συγγραφείς αξιοποίουν τις λίγες, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αρετές του υπό κρίση βιβλίου!

Σύμφωνα με τον πρόλογο του συγγραφέα, οι στόχοι του βιβλίου, το οποίο απευθύνεται σε ταλαντούχους μαθητές λυκείου και προπτυχιακούς φοιτητές, είναι οι ακόλουθοι:

α) να «απομονώσει» και να ουσιαστοποιήσει μερικές από τις πιο χρήσιμες «τεχνικές-μεθόδους» επίλυσης δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων

β) να «αναλύσει-εξηγήσει» ενδιαφέροντα παραδείγματα και να προτείνει προς επίλυση προβλήματα που δεν τα ουνανιά κανείς εύκολα στην υπάρχουσα βιβλιογραφία και

γ) κατ' αυτό τον τρόπο να προετοιμάσει τους αναγνώτες του για συμμετοχή σε δύσκολους μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπως οι Ολυμπιάδες και ο Putnam.

Θα πάρουμε τα πράγματα με τη σειρά για να δούμε κατά πόσο επιτυχάνει τους στόχους του.

α) Για να επιτύχει τον πρώτο του στόχο ο συγγραφέας επιχειρεί μια συστηματική παρουσίαση τεχνικών και μεθόδων από το πρώτο κιόλας κεφάλαιο του βιβλίου, το οποίο τιτλοφορείται «Ευρετικές» (υιοθετεί τον όρο που εισήγαγε από την Ψυχολογία και τη Φιλοσοφία στα Μαθηματικά ο George Pólya, του οποίου δυστυχώς το όνομα δεν αναφέρεται πουθενά στο βιβλίο). Μερικές «Ευρετικές» επιγράφονται: «Ψάξτε για κάποιο υπόδειγμα», «Διατυπώστε ένα ισοδύναμο πρόβλημα», «Εξετάστε περιπτώσεις», «Αξιοποιήστε τη Συμμετρία», «Δουλέψτε αντίστροφα», «Γενικεύστε», κ.λπ.

Η επλογή των προβλημάτων που περιλαμβάνονται στις παραγράφους με τους παραπάνω τίτλους δεν υπήρξε πάντοτε επιτυχής. Επίοτε, οι «Ευρετικές» δεν αναλύνται στο απαιτούμενο βάθος και λογομονούνται(!) από τον ίδιο το συγγραφέα όταν, σε αρκετές περιπτώσεις, δεν τις χρησιμοποιεί ή δεν τις χρησιμοποιεί σωστά κατά την επίλυση προβλημάτων που παραθέτει στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

β) Σχετικά με τον δεύτερο στόχο πρέπει να επισημανθούν τα εξής:

i) Τα προβλήματα δεν είναι από εκείνα που σπάνια ουνανιά κανείς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Είναι προβλήματα που προτάθηκαν σε Μαθηματικές Ολυμπιάδες, καθώς και προβλήματα των περιοδικών *The American Mathematical Monthly*, *Crux Mathematicorum*, κ.ά. Λείπουν όμως θέματα από Ολυμπιάδες ξένων χωρών (υπάρχουν πέντε μόνο προβλήματα από τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες της τέως ΕΣΣΔ!), ενώ και οι στήλες προβλημάτων σημαντικών μαθηματικών περιοδικών (όπως του *Elemente der Mathematik*, του *Kvant* κ.ά.) «αγνοούνται». Η παρατήρηση όμως δεν θα είχε ιδιαίτερη βαρύτητα αν δεν τονιζόταν ότι τα προβλήματα, εύκολα και δύσκολα, έχουν πολυχρονοποιηθεί και είναι σε μεγάλο ποσοστό γνωστά!

ii) Τα προβλήματα δεν παρουσιάζονται με σταδιακή αύξηση του βαθμού δυσκολίας τους. Ο συγγραφέας δεν «προειδοποιεί» τον αναγνώστη του για το βαθμό δυσκολίας του εκάστοτε προτεινόμενου προβλήματος. Το γεγονός αυτό επιδρά αρνητικά και στην ψυχολογία του λύτη! Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εξετάζοντας την ακόλουθη «ακραία» περίπτωση:

— Στη σελίδα 50 παρατίθεται (χωρίς κανένα σχόλιο!) ως Πρόβλημα 1.11.1 το εξής: «Εάν η ομρεία ενός επιπέδου δεν βρίσκονται όλα πάνω σε μία ευθεία γραμμή (δηλαδή δεν είναι όλα συνευθεια-

- κά), τότε υπάρχει μία τουλάχιστον ευθεία γραμμή που οποία περιέχει δύο μόνο από τα σημεία αυτά». Αυτό το όντως δύσκολο πρόβλημα προτάθηκε από τον Sylvester το 1983 και αφού ληφθεί πρώτη φορά το 1933, οπότε οι Karamata και Paul Erdős το «υπενθύμισαν» στην μαθηματική κοινότητα, λύθηκε από τον T. Gallai τον ίδιο χρόνο. Μάλιστα, η παραπάνω διατύπωση του προβλήματος, που οποία τελικά επικράτησε, ανήκει στον Motzkin, ο οποίος αναδιατύπωσε το «Πρόβλημα του Sylvester», ώστε να το κάνει περισσότερο «εύληπτο» (βλ. την αρχική του διατύπωση, όπως και τη λύση του καθηγητή L.M. Kelly, στο θαυμάσιο βιβλίο του Δ.Γ. Κοντογιάννη, *Μαθηματικές Ολυμπιάδες-Γεωμετρία*, σελ. 22-23).
- iii) Μία από τις λίγες αρετές του βιβλίου είναι ότι περιλαμβάνει προβλήματα από πολλούς και διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών, δηλαδή από την Αριθμητική, την Άλγεβρα, την Πραγματική Ανάλυση και τη Γεωμετρία.

γ) Είναι πλέον προφανές ότι, εφόσον δεν επιτυγχάνονται οι δύο πρώτοι στόχοι, είναι απολύτως ανέφικτος και ο τρίτος, δηλαδή η σωστή προετοιμασία μαθητών και φοιτητών για συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπου προτείνονται δύσκολα και πρωτότυπα προβλήματα.

Η επιχειρηματολογία μου θα μπορούσε να σταματήσει εδώ. Επειδή όμως στα Μαθηματικά οιλεί κανείς πιο πειστικά με την επίκληση παραδειγμάτων, θα παραθέσω αμέσως αρκετά.

Θα ξεκινήσω με μερικά από τα πολλά παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο καθηγητής Flanders στην βιβλιοκριτική του, που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *The American Mathematical Monthly*, Νοέμβριος 1985, σελ. 676-78.

Παράδειγμα 1: Ας μελετήσουμε το Πρόβλημα 5.3.3., στη σελίδα 172: «Εκφράστε το γινόρενο

$$\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn}$$

ως ρητό αριθμό». Πρόκειται για το Πρόβλημα B2 του 39ου Μαθηματικού Διαγωνισμού Putnam (2 Δεκ. 1978).

Ο Flanders γράφει: «Η λύση του συγγραφέα είναι μια πλήρης σελίδα οργίου πράξεων, που αρχίζει με ανάλυση του παρονομαστή $m n \cdot (m+n+2)$ σε απλά κλάσιμα. Η τελική απάντηση δίνει την εντύπωση θαύματος! Πέρα από την προφανή «ασχήμια» της συνεχούς αλυσίδας των πολύπλοκων τιοτήτων που εκτείνονται σε 17 γραμμές, με τουλάχιστον ένα τυπογραφικό λάθος, και ενώ όλα θα μπορούσαν να είχαν «διαρθρωθεί» σε κάτι πολύ πιο απλό και καταληπτό, πώς στην ευχή θα μπορούσε να είχε εφαρμοστεί η μέθοδος του συγγραφέα σε παρονομαστή $m n \cdot (m+n+7)$ ή $m n p \cdot (m+n+p+3)$; (Ευρετική Νο 12: «Γενικεύοτε»!).

Ο Flanders προτείνει την ακόλουθη λύση: «Εάν θέσουμε

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{m+n+k+1}}{mn \cdot (m+n+k+1)},$$

τότε μία διαφοριστική απλουστεύει την κατάσταση και έχουμε

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \cdot (m+n+k+1)} = \int_0^1 x^k [\ln(1-x)]^2 dx \\ = \int_0^1 (1-x)^k (\ln x)^2 dx.$$

Αρκούν ένα απλό διωνυμικό ανάπτυγμα και μία ολοκλήρωση, ώστε να λάβουμε

$$S_k = 2 \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(j+1)^3} \binom{k}{j}.$$

Παράδειγμα 2: Προχωρούμε στο Πρόβλημα 6.6.4., στη σελ. 219: «Εστω f διαφορίσιμη με f συνεχή στο $[a, b]$. Δείξτε ότι (εάν) υπάρχει αριθμός c στο $(a, b]$, τέτοιος ώστε $f'(c) = 0$, τότε μπορούμε να βρούμε αριθμό ξ στο (a, b) , τέτοιον ώστε $f'(\xi) = [f(\xi) - f(a)] / (b - a)$.

Ο Flanders, αφού παρατηρεί ότι η λύση του Larson καλύπτει δύο πλήρεις σελίδες και δεν επιτυγχάνει το στόχο της — διότι, αφενός ο παρονομαστής $b - a$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, αφετέρου ο ξ μπορεί να βρεθεί στο $(a, c]$ —, χρησιμοποιεί την «Ευρετική»:

«Διατυπώστε ένα ισοδύναμο πρόβλημα», και έτσι έχουμε να επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

«Εστω $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$, διαφορίσιμη στο $(a, b]$, με $f'(b) = 0$, και έστω $k > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αριθμός x στο (a, b) , τέτοιος ώστε $f'(x) = k [f(x) - f(a)]$ ».

Ιδού η λύση του:

«Χωρίς να αποβαίνει εις βάρος της γενικότητας, μπορούμε να πάρουμε $a = 0$ και $f(a) = 0$. Θέτουμε $g(x) = e^{-kx} f(x)$, ένα τέχνασμα που ο συγγραφέας ανέφερε μερικές σελίδες πριν. Εάν $f'(x) > kf(x)$ στο (a, b) , τότε $g'(x) > 0$ και $g(b) > g(a) = 0$, από όπου $f(b) > 0$. Σύμφωνα με την ιδιότητα Darboux, έχουμε $f'(b) \geq kf(b) > 0$, πράγμα που είναι αδύνατο. Παροροίως, $f'(x) < kf(x)$ στο (a, b) είναι αδύνατο, οπότε προκύπτει το συμπέρασμά μας».

Παράδειγμα 3: Υπάρχει όμως και πρόβλημα στο οποίο ο Larson επιχειρεί «λύση», που οποία όμως δεν αποτελεί λύση! Αναφέρομε στο Πρόβλημα 3.5.4., που βρίσκεται στη σελίδα 76:

«Δείξτε ότι κάθε θετικός ρητός αριθμός είναι το άθροισμα ενός πεπερασμένου αριθμού διακεκριμένων όρων αρμονικής σειράς, δηλαδή της σειράς

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Πρόκειται για το Πρόβλημα B6 του 14ου διαγωνισμού Putnam (6 Μαρτίου 1954).

Φαίνεται ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι προτιμούσαν να εκφράζουν ένα ρητό κλάσμα ως άθροισμα κλασμάτων, καθένα από τα οποία έχει αριθμητή τη μονάδα, π.χ.

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}, \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}, \text{ κ.λπ.}$$

Γι' αυτό οι μιας αρμονικής σειράς καλούνται ευχάριστα αιγυπτιακά κλάσματα. Το Πρόβλημα 3.5.4. αποτελεί ένα θέωρημα πάνω στα αιγυπτιακά κλάσματα.

Ο αναγνώστης του βιβλίου του Larson οφείλει να διαγράψει πλήρως τη λύση της σελίδας 67 και να στραφεί εναλλακτικά είτε στη λύση που περιλαμβάνεται στο βιβλίο των A.M. Gleason, R.E. Greenwood και L.M. Kelly, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition — Problems and Solutions: 1938-1964*, M.A.A., 1988, είτε ο' αυτή που δίνει ο J.C. Owing στο περιοδικό *The American Mathematical Monthly*, τόμ. 5 (1968), σελ. 777-778 και αναδημοσιεύεται στο ανωτέρω βιβλίο.

Δίπλα στις «εντάσεις» του Flanders, ας μου επιτραπεί να προσθέσω και κάποιες δικές μου παραπρήσεις δύον αφορά την ποιότητα του έργου του Larson, επικαλούμενος συγκεκριμένα παραδείγματα του βιβλίου σε επίρρωση των ισχυρισμών μου.

Παρατήρηση 1: Αποτελεί πίστη μου ότι, όταν είναι δυνατή μια λύση που οδηγεί σε γενίκευση, πρέπει να προτιμάται από κάποια πιο ειδική, ακόμη και όταν η πρώτη εμφανίζει μεγαλύτερη δυοκολία στη συλλογή της. Μια λύση τότε μόνον υπηρετεί ουσιαστικούς διδακτικούς σκοπούς, όταν προτείνει στον αναγνώστη της καινούργιους δρόμους σκέψης και «αντιμετώπισης» παρόμοιων προβλημάτων ή όταν επιχειρεί γενικεύσεις των υποθεσεών τους και κατηγοριοποιήσεις. Παράδειγμα: Το Πρόβλημα 7.13., στη σελίδα 243:

«Εάν $0 \leq a, b, c \leq 1$, δείξτε ότι

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} = (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Πρόκειται για το Πρόβλημα Νο 5 της 9ης Μαθηματικής Ολυμπιάδας των ΗΠΑ (1980).

Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια είτε της Αλγεβρας είτε της Τριγωνομετρίας είτε της Ανάλυσης. Ο Larson δίνει μια αλγεβρική λύση, την οποία μπορεί να οκεφτεί και μαθητής Α' λυκείου, πλην όμως αυτή δεν οδηγεί σε κάποιο πιο ενδιαφέρον γενικό συμπέρασμα. Το πεδίο όμως αλλάζει «δραματικά» όταν μετατρέψουμε την αλγεβρική άσκηση σε πρόβλημα της Ανάλυσης. Όπως σημείωνα σε άλλη στήλη: «Ο καθηγητής M.S. Klamkin στο εξαιρετικό άρθρο του "Problem Proposing and Mathematical Creativity" στο *Circus Mathematicorum*, τον Δεκέμβριο του 1989, μας γνωρίζει ότι εκείνος πρότεινε την προκείμενη ανισότητα στη Μαθηματική Ολυμπιάδα των ΗΠΑ του έτους 1980, και ότι αποτελεί ειδική περιπτωση μιας γενικότερης ανισότητας, που αποδίδεται στον André Giroux (αιλούστερες αποδείξεις της τελευταίας ανισότητας δόθηκαν από τον A. Meir και τον ίδιο τον Klamkin). Ακολούθως ο Klamkin, αφού τονίζει ότι οι περισσότερες από τις αποδείξεις που δόθηκαν στην Ολυμπιάδα ήταν "άκομφες" και δεν οδηγούσαν εύκολα σε γενικεύσεις, γράφει:

«Μια απλή απόδειξη προκύπτει αμέσως, αν παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση της αριθμητικής πλευράς της ανισότητας είναι κυρτή για καθερία από τις μεταβλητές a, b και c . Έτοιμη η συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη

τιμή της στην ακραία τιμή 0 ή 1 καθερίας εκ των μεταβλητών, με άλλα λόγια, σε κάποια κορυφή (a, b, c) ενός κύβου του οποίου οι συντεταγμένες είναι 0 και 1. Αφού η τιμή της συνάρτησης σε κάθε κορυφή του κύβου ισούται με 1, τελειώσαμε».

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τη γενικότερη ανισότητα

$$\sum \frac{x_i^u}{(1+s-x_i)} + \prod (1-x_i)^v \leq 1$$

όπου $1 \geq x_i \geq 0$, $u, v \geq 1$ και $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$. Η τελευταία ανισότητα αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Giroux, η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση $u = v = 1$.

Παρατήρηση 2: Μερικές φορές ο συγγραφέας προτίνει προς επίλυση προβλήματα τα οποία έχουν μεν χρησιμοποιηθεί σε διάφορους διαγωνισμούς, πλην όμως έχουν συγκεντρώσει επικριτικά σχόλια, λόγω της ακαταλλολότητάς τους να μας οδηγήσουν σε μια σαφή διάγνωση των ικανοτήτων του εξεταζομένου. Αυτά τα σχόλια θα έπρεπε να τα γνωρίζει ο Larson, όταν μάλιστα είναι διατυπωμένα σε κείμενα ονομαστών μαθηματικών.

Παράδειγμα: Ας δούμε το Πρόβλημα 6.2.13., στη σελίδα 202: «Δώστε ένα παράδειγμα μιας συνεχούς πραγματικής συνάρτησης από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$, η οποία λαμβάνει κάθε τιμή στο $[0, 1]$ άπειρες φορές». Χωρίς την υπόδειξη του συγγραφέα, που παραπέμπει στο λυμένο παράδειγμα 6.1.8., κάθε απόπειρα επίλυσης του προβλήματος εμφανίζεται μάταιη.

Το πρόβλημα προτάθηκε, χωρίς καμία υπόδειξη, ως Νο Β3 του 20ού διαγωνισμού Putnam, το 1959. Ο καθηγητής L.J. Mordell στο άρθρο του *"The Putnam Competition"*, που πρετοδημοσιεύτηκε στο *American Mathematical Monthly* τον Μάιο του 1963, και αναδημοσιεύτηκε στο προαναφερθέν βιβλίο των Gleason, Greenwood και Kelly, αναφέρει για το εν λόγω πρόβλημα τα εξής: «Η λύση που δόθηκε φανερώνει ότι στην πραγματικότητα πρόκειται για ερώτημα με το οποίο μας ζητείται η εύρεση μιας συνάρτησης που διέρχεται από κάθε σημείο ενός τετραγώνου, όπως αυτή του Peano, και ότι απαιτείται η "επίκληση" του συνόλου C του Cantor, δηλαδή του συνόλου εκείνων των αριθμών που βρίσκονται μεταξύ 0 και 1 ($0 \leq x \leq 1$), τους οποίους μπορούμε να γράψουμε στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης, χρησιμοποιώντας μόνο μπεντικά και δυάρια. Πώς θα μπορούσε κάποιος που δεν έχει δει ποτέ συναρτήσεις αυτού του είδους —και προφανώς αυτό συμβαίνει με τους περισσότερους προπτυχιακούς φοιτητές— να απαντήσει στο ερώτημα; Φαίνεται αδύνατο να μπορέσει να τις ανακαλύψει στη διάρκεια ενός διαγωνισμού!».

Ολοκληρώνοντας την κριτική του βιβλίου, δεν μπορώ παρά να συμφωνήσω με τον Flanders πως ο Larson πρέπει να ελέγχει πιο προσεκτικά στο μέλλον την κάθε εργασία του. Στον έλληνα αναγνώστη δεν προτείνω το βιβλίο, παρά μόνον εάν η βιβλιοθήκη του είναι σχετικά «φτωχή» σε βιβλία και περιοδικά με θέματα δύσκολων μαθηματικών διαγωνισμών. Από το βιβλίο μπορεί να ενημερωθεί

για τη συνήθη μορφή αυτών των θερμάτων, να διδαχτεί κάποιες «τεχνικές» και να μελετήσει κάποια «καλά» προβλήματα. Σ' αυτή την περίπτωση, ας προσπαθήσει να λύσει μόνος του όσα προβλήματα μπορεί κι ας συρθεύεται όσο πιο λίγο γίνεται τις λύσεις του συγγραφέα, ώστε να μην επηρεάζεται από αυτές!

Επειδή, όμως, η καλή αρχή είναι το ήμιον του παντός, επιτρέψτε μου να ουσιαστώ στους αρχάριους λύτες, αλλά

και σε κάθε μαθηματικό (ειφόδον τα αγνοεῖ!), τα τρία έργα του Pólya, τα οποία κατά τον Klamkin παραμένουν ανυπέρβλητα:

- 1) *How to Solve It*, Princeton University Press (στα ελληνικά από τις Εκδόσεις Σπλιώτη),
- 2) *Mathematical Discovery*, τόμοι 1 και 2, John Wiley,
- 3) *Mathematics and Plausible Reasoning*, τόμοι 1 και 2, Princeton University Press.

Για ένα καλό ξεκίνημα

Jamal N. Islam,
An Introduction to Mathematical Cosmology
Cambridge University Press, 1992.

του Θεοφάνη Γραμμένου

Με τον όρο «Μαθηματική Κοσμολογία» εννοείται κυρίως η μελέτη του σύμπαντος στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, έχει δε επικρατήσει διεθνώς η Μαθηματική Κοσμολογία να καλύπτει ένα-δύο από τα (συνήθως) τελευταία κεφάλαια των βιβλίων που πραγματεύονται τη Γενική Σχετικότητα. Έτσι, το βιβλίο του Islam έρχεται να καλύψει ένα υπαρκτό κενό, το οποίο παίρνει ακόμη μεγαλύτερες διαστάσεις στα προπτυχιακά συγγράμματα. Ο συγγραφέας, γνωστός από το προηγούμενο βιβλίο του *Kotating Fields in General Relativity* (Cambridge University Press, 1985), απευθύνεται βασικά σε τελειοφοίτους ή/και μεταπτυχιακούς φοιτητές των Τμημάτων Φυσικής και Μαθηματικών. Πράγματι, πρόκειται για μια αρκετά διδακτική και εποπτική εισαγωγή στη σύγχρονη θεωρητική Κοσμολογία. Ο αναγνώστης, λοιπόν, που διαθέτει λίγες γνώσεις Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας και Διαφορικής Γεωμετρίας (π.χ. στο επίπεδο ενός προπτυχιακού μαθήματος), δεν θα συναντήσει καμία ουσιαστική δυσκολία στην πρελέπτη και κατανόηση του βιβλίου.

Επειτα από μια εισαγωγή υπό μορφή σύντομης επισκόπησης στη σύγχρονη Κοσμολογία, ακολουθεί ένα κάπως «συμπυκνωμένο» κεφάλαιο, στο οποίο ο συγγραφέας μάλλον υπενθυμίζει στον αναγνώστη στοιχεία από τη Γεωμετρία Riemann και τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Πιοτεύουμε ότι η αναφορά στα διανύομα Killing, ιδιαίτερα σημαντικά για την εξαγωγή της μετρικής Robertson-Walker που ακολουθεί ευθύς αρέσως, είναι υπέρ το δέον σύντομη για τον αναγνώστη με προπτυχιακές γνώσεις Γενικής Σχετικότητας. Παρουσιάζεται επίσης η μετρική Robertson-Walker, θερμελιακής σημασίας για τη σχετικιστική Κοσμολογία, και μελετώνται οι γεωμετρικές και κινηματικές ιδιότητές της.

Στο κεφάλαιο 3 ο συγγραφέας πραγματεύεται τα κοσμολογικά πρότυπα (σύμπαντα) Friedmann. Ακόμη, παρουσιάζει μια (νέα) ακριβή λύση για την καταστατική εξίσωσης του κοσμολογικού ρευστού, π. οποία εμπεριέχει ως ειδικές περιπτώσεις την αμιγή ακτινοβολία και τον κονιορτό ($r = 0$). Τέλος, αναλύονται οι έννοιες του ορίζοντα γεγονότων και του ορίζοντα σωματιδίων, όπως έχουν

εισαχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία από τον Rindler.

Το κεφάλαιο 4 είναι αφιερωμένο στα παραπροσιακά δεδομένα, απαραίτητα για την αποτίμηση των θεωρητικών μοντέλων, που έχουν παρουσιαστεί ώς τώρα. Τα δύο οπιμαντικότερα για την παραπροσιακή Κοσμολογία μεγέθυνται η σταθερά του Hubble και η παράμετρος επιβράδυνσης. Η πρώτη καθορίζει το ρυθμό διαστολής του σύμπαντος, ενώ η δεύτερη το ρυθμό επιβράδυνσης αυτής της διαστολής (αν και υπάρχει και η, μάλλον απίθανη, περίπτωση της επιτάχυνσης). Αναφέρονται οι τρόποι και οι δυσκολίες μέτρησης των δύο σταθερών, γίνονται δε και οριομένες παραπρόσεις για τη σχέση της παραμέτρου επιβράδυνσης προς την κρίσιμη πυκνότητα της ύλης του σύμπαντος, οι οποίες οδηγούν στην υπόθεση της οκοτείνης ύλης στο σύμπαν. Ωτόσο, ο συγγραφέας δεν επεκτείνεται περισσότερο στο θέμα αυτό (βλ. και κεφάλαιο 7). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η σύνοψη των στόχων της παραπροσιακής Κοσμολογίας έως το 2007, όπως τέθηκαν στο Συμπόσιο της Διεθνούς Αστρονομικής Ένωσης το 1987.

Στο κεφάλαιο 5 ο Islam ασχολείται με τις ουνέπειες μιας μη μπδενικής κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις πεδίου του Αΐνοτάιν, και τα συνακόλουθα κοσμολογικά πρότυπα. Η κοσμολογική σταθερά Λ επανήλθε στο προσκίνιο κυρίως την τελευταία εικοσαετία, ως αποτέλεσμα της ούζευξης της κλασικής (σχετικιστικής) Κοσμολογίας με τη Φυσική στοιχειωδών σωματιδίων με σκοπό την κατανόηση του πρώιμου σύμπαντος.

Ο αναγνώστης εισάγεται στον «κόρο των ανωμαλιών» στο κεφάλαιο 6, όπου του δίνεται η ευκαιρία να γνωρίσει συνοπτικά τα ομογενή αλλά μη ισότροπα κοσμολογικά πρότυπα (σύμπαντα Bianchi). Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η «στεγνή» παρουσίαση ενός από τα θεωρήματα των ανωμαλιών ως παραδείγματος για την κλάση των θεωρημάτων αυτών, μάλλον δεν διευκολύνει τον μη έμπειρο αναγνώστη να κατανοήσει το θέμα, ουσιαστικά δε παραπέμπεται στην ειδική βιβλιογραφία. Λαμβανομένου υπόψη του εισαγωγικού χαρακτήρα του βιβλίου, η αναλυτική παρουσίαση του θεωρήματος δεν κρίνεται, κατά τη γνώμη μας, απαραίτητη. Αντίθετα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η προσέγγιση των ανωμαλιών κατά Belinskii, Khalatnikov και Lifshitz. Οχι μόνο επειδή συνήθως δεν αναφέρεται στα ανάλογα εισαγωγικά βιβλία, αλλά και λόγω της σημασίας της για τη χαοτική Κοσμολογία.

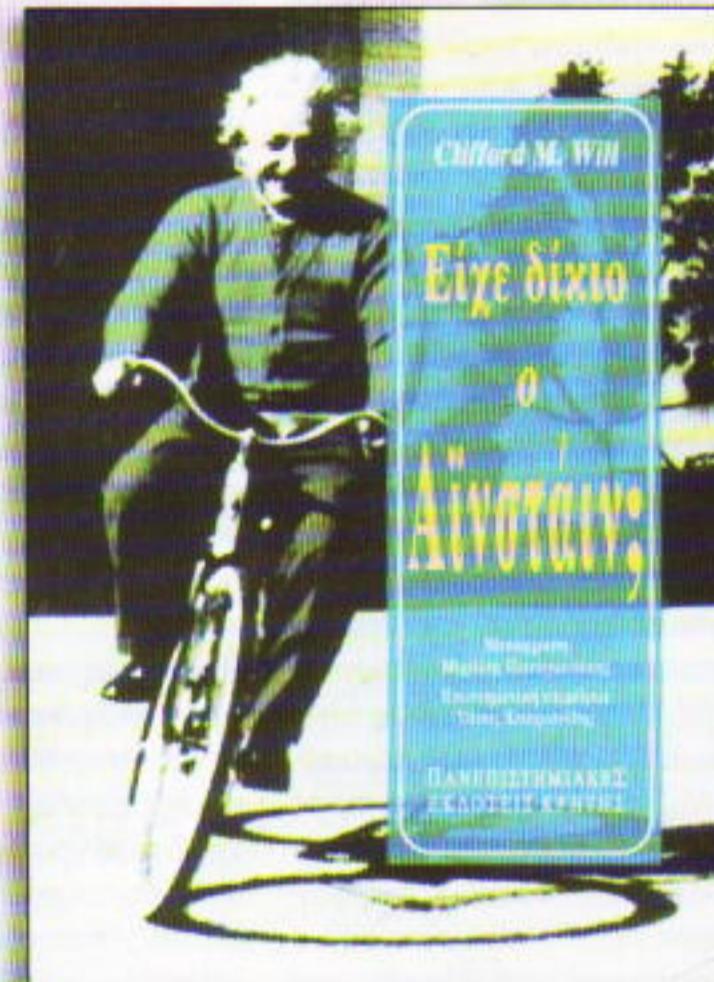
Στο κεφάλαιο 7 έχουμε μια (κυρίως ποιοτική) περιγραφή του πρώιμου σύμπαντος, π. οποία ωστόσο αποτελεί απαραίτητο προθάλαρι για το κεφάλαιο 8, όπου

μας προσφέρεται μια καλή (αλλά κατ' ανάγκην περιγραφική, λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα του βιβλίου) μελέτη του πολύ πρώιμου ούμπιαντος και των θεωριών περί του κοσμολογικού πληθωρισμού. Επίσης παρουσιάζεται ένα νέο ακριβές πληθωριστικό μοντέλο για ένα πολυωνυμικό δυναμικό έκτου βαθμού.

Στο επόμενο κεφάλαιο επιχειρείται μια εισαγωγή στην κβαντική Κοσμολογία και τη βασική της εξίσωση, αντίστοιχη της εξίσωσης Schrödinger, γνωστή ως εξίσωση Wheeler-DeWitt, όπως επίσης και στα ολοκληρώματα διαδρομών. Ίσως θα μπορούσε να αναλυθεί κάπως περισσότερο η έννοια του «υπερχώρου» (χώρου όλων των τριγεωμετριών), στην οποία αφιερώνεται μόνο μία σειρά. Ακόμη, θα ωφελούσε μια περαιτέρω ανάπτυξη των ολοκληρωμάτων διαδρομών, που αποτελούν ένα από τα βασικά εργαλεία σε μια από τις προσεγγίσεις του προβλήματος της κβάντωσης της βαρύτητας.

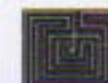
Στο κεφάλαιο 10 ο συγγραφέας καταπιάνεται με το ύστερο σύμπαν, όπως αυτό προβλέπεται από τη θεωρία του καθιερωμένου κοσμολογικού προτύπου. Το βιβλίο κλείνει με το κεφάλαιο 11, όπου αναφέρονται οι μετρήσεις του δορυφόρου COBE (Εξερευνητή του Κοσμικού Υποβάθρου), καθώς και άλλα παρατηρητικά δεδομένα των τεσσάρων τελευταίων ετών, όλα μεγάλης σπουδαιότητας για τη σύγχρονη θεωρητική Κοσμολογία (π.χ. μεταθέσεις προς το ερυθρό $z > 4$, νέες περιοχές τιμών της σταθεράς του Hubble). Ακόμη, παρουσιάζονται εν συντομίᾳ νέες θεωρητικές ιδέες (μη επιβεβαιωμένες παρατηρησιακά), όπως ακριβώς οι κοσμικές χορδές και διάφορες τοπολογικές δομές. Τέλος, δίνονται νέες ακριβείς κοσμολογικές λύσεις (μία κλάση μη ορογενών κλασικών λύσεων και μία πληθωριστικών λύσεων).

Το βιβλίο δεν ξεφεύγει από τους στόχους που έχει θέσει εξαρχής ο συγγραφέας, δηλαδή αφενός να εισάγει τον αναγνώστη στη μέχρι σήμερα καθιερωμένη σχετικιστική Κοσμολογία, αφετέρου να κεντρίσει το ενδιαφέρον του για τα σύγχρονα προβλήματα που προκύπτουν από το ουνδυασμό Γενικής Σχετικότητας και Κβαντομηχανικής και την εφαρμογή του στη μελέτη του ούμπιαντος. Με δεδομένη την έλλειψη ανάλογης ελληνικής βιβλιογραφίας (πλην της Κοσμολογίας των Κοντόπουλου-Κωτοάκη), το βιβλίο του Islam αποτελεί σπραντικό βοήθημα για όσους προτίθενται να ακολουθήσουν μεταπυχιακές σπουδές στη Γενική Σχετικότητα και τη θεωρητική Λοτροφυσική, καθώς συγκροτεί ένα καλό αρχικό υπόβαθρο, στο οποίο μπορεί αργότερα να οπριχθεί η μελέτη πιο προχωρημένων βιβλίων.



ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΥΤΟ, ο Clifford Will με το κύρος του ειδικού και τη γλαφυρότητα ενός ταλαντούχου αφηγητή, περιγράφει την τιτάνια προσπάθεια επιστημόνων και ερευνητικών ομάδων απ' όλο τον κόσμο να απαντήσουν στο «αυθάδες» ερώτημα ΕΙΧΕ ΔΙΚΙΟ Ο ΑΪΝΣΤΑΪΝ; Να βεβαιωθούν αν το ωραιότερο ίσως δημιούργημα του ανθρώπινου μυαλού, η ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ, περιγράφει σωστά τον κόσμο μας στην κλίμακα των άστρων, των γαλαξιών και του σύμπαντος στο σύνολό του.

ΕΙΧΕ ΤΕΛΙΚΑ ΔΙΚΙΟ Ο ΑΪΝΣΤΑΪΝ; Θα «πέσει» ή δεν θα «πέσει» η θεωρία του; Στο βιβλίο του Clifford Will θα βρείτε την πιο πρόσφατη απάντηση σε ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα της επιστήμης του καιρού μας.



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ
Τ.Θ. 1527, 71 110 ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΗΛ. 210035, FAX 239735**

Συνέχεια από τη σελ. 51

ρατηρότε ότι $AE = AD = DE$ (διότι και τα τρία τρίματα ισούνται με το BC , και επομένως το ADE είναι ισόπλευρο τρίγωνο ίσο με το BCA_1 .

Ας σχηματίσουμε τώρα το «ναπολέοντειο τρίγωνο» PQR καθώς και όλα τα τρίγωνα που κατασκευάζονται με τον ίδιο τρόπο: συνδέουμε τα κέντρα των έγχρωμων ισόπλευρων τριγώνων (στο σχήμα μας, με κόκκινες γραμμές). Όλα αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα, διότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα μισά δημιουργούνται με την ίδια ακριβώς κατασκευή όπως το PQR — συνδέοντας τα κέντρα τριών ισόπλευρων τριγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός (λευκού) τριγώνου ίσου με το ABC — ενώ καθένα από τα υπόλοιπα έχει τις πλευρές του μία προς μία ίσες με τις πλευρές των τριγώνων του πρώτου είδους. Τώρα, κάθε κόμβος του πλέγματος των κόκκινων ευθείων είναι κοινή κορυφή έξι τέτοιων τριγώνων (ιων με το PQR). Και στα έξι τρίγωνα δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι οι γωνίες σε αυτήν την κορυφή είναι ίσες μεταξύ τους (αφού βρίσκονται απέναντι από αντίστοιχα ίσες πλευρές των τριγώνων). Επομένως, καθεμία από αυτές τις γωνίες είναι 60° . Και το ίδιο ισχύει

για όλες τις γωνίες όλων αυτών των τριγώνων. Επομένως, τα τρίγωνα είναι πράγματι ισόπλευρα!

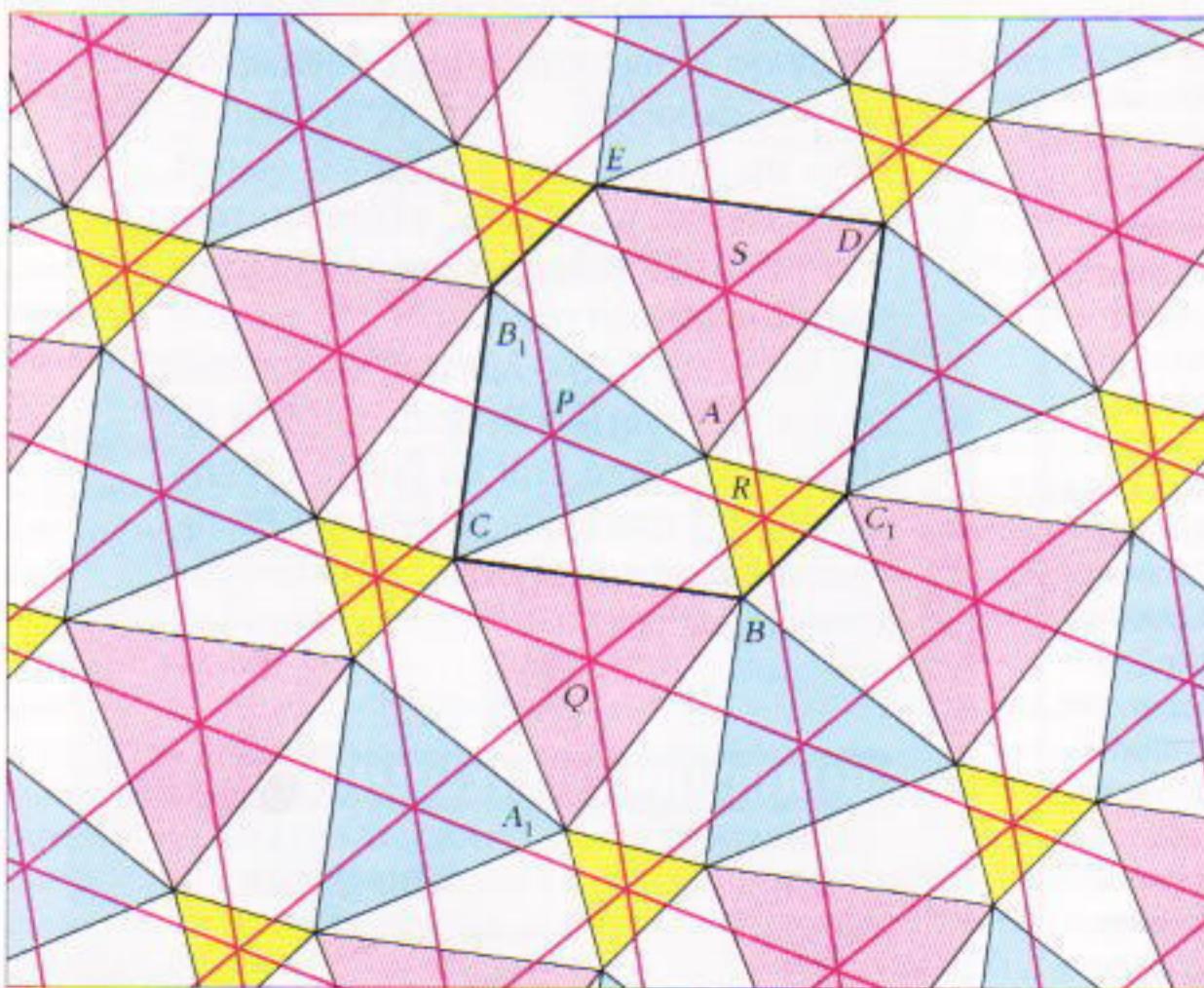
Το θεώρημα αποδείχτηκε, αλλά ως ανταμοιβή για τις προσπάθειές μας (που δεν ήταν και τόσο οκληρές, έτσι δεν είναι;) παίρνουμε έναν κομψό τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου PQR . Μπορούμε να θεωρήσουμε τους κόμβους της κόκκινης πλακόστρωσης ως ένα παραλληλόγραμμο πλέγμα, και επομένως κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει εμβαδόν $1/2$. Κάθε εξάγωνο πλακίδιο περιέχει τρεις κόμβους του κόκκινου πλέγματος στο έσωτερικό του και κανέναν στο σύνορό του, και επομένως, το εμβαδόν του ισούται με 3 «μονάδες του κόκκινου πλέγματος». Άρα, το εμβαδόν του εξαγώνου είναι εξαπλάσιο του PQR . Από την άλλη πλευρά, το εξάγωνο αποτελείται από τρία αντίγραφα του τριγώνου ABC και τρία ισόπλευρα τρίγωνα που κατασκευάζονται στις πλευρές του. Καταλήγουμε, λοιπόν, στον τύπο:

$$\text{Εμβαδόν}(PQR) =$$

$$\frac{1}{2} \text{Εμβαδόν}(ABC) + \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2),$$

όπου $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64



Σχήμα 8

Συνέχεια από τη σελ. 43

διαβήτη ένα ευθύγραμμο τρίγωνο του οποίου το μήκος είναι π ρίζα π το αντίθετο της ρίζας μιας κυβικής εξίσωσης με ριζές συντελεστές που δεν έχει ριζές ρίζες, όταν το μοναδιαίο μήκος είναι δεδομένο.

Για να χρησιμοποιήσει αυτό το θεώρημα, ο Roy αντιστοίχισε προσεκτικά επιλεγμένες ριζές τιμές στα δεδομένα, παρήγαγε μια κυβική εξίσωση με ρίζες τις πλευρές του τριγώνου (π άλλα θεμελιώδη στοιχεία του) και κατασκευάσμιους συντελεστές, και κατόπιν απέδειξε ότι αυτή πιο κυβική εξίσωση δεν έχει ριζές ρίζες. Σε κάποια άλλα προβλήματα, τα δεδομένα του οδήγησαν στην κατασκευασμότητα μιας γωνίας 20° πιο σε άλλες αδύνατες περιπτώσεις.* Πρέπει, πάντως, να επισημάνουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, ακόμη και όταν πιο κατασκευή δεν μπορεί να γίνει με ευκλείδεια μέσα, πρέπει να υπάρχει ένα τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και τα 186 προβλήματα ως ανακατασκευή ενός τριγώνου από τα δεδομένα στοιχεία.

Το ενδιαιφέρον του Leroy Meyer γι' αυτό το είδος των προβλημάτων ξεκίνα από την εποχή του λυκείου, όταν —όπως και πολλοί άλλοι μαθηματικοί στο ξεκίνηρά τους— γοπτεύτηκε από την ποικιλία αυτών των προβλημάτων και τις έξιπνες τεχνικές επίλυσής τους. Αργότερα, το ενδιαιφέρον του αναθερμάνθηκε από ένα άρθρο του William Wenick στο *Mathematics Magazine*. Το επόμενο άρθρο μου θα έχει θέμα τη συνεργασία τους που επακολούθησε. Επειδή σχεδιάζω να παρουσιάσω σ' αυτό το άρθρο 20 επιπλέον άλιτα προβλήματα, προτείνω στους αναγνώστες μου να προσπαθήσουν εν τω μεταξύ να λύσουν τα 28 προβλήματα που αναφέραμε προηγουμένως.

* Η πιο συνηθισμένη απόδειξη του αδυνάτου της τριχοτόμησης με κανόνα και διαβήτη όλων των γωνιών βασίζεται στο ότι δεν τριχοτομείται ούτε καν πιο γωνία 60° . Μια τέτοια κατασκευή οδηγεί στην εξίσωση $8x^3 - 6x - 1 = 0$, που έχει λύση την $x = \sin 20^\circ$ (διότι $4\sin 20^\circ - 3\sin^2 20^\circ = \sin 60^\circ = 1/2$). Η εξίσωση αυτή, όμως, είναι μη επιλογήμη σύρφωση με το παραπάνω πόρισμα του Gauss. Επομένως, πιο γωνία των 20° δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη. (Σ.τ.ε.)

Εξάμηνα Μαθηματικών στη Βουδαπέστη

Το πρόγραμμα Εξαμήνων Μαθηματικών της Βουδαπέστης (Budapest Semesters in Mathematics) που εγκαινιάστηκε το 1984 από τους Paul Erdős, László Lovász και Vera T. Sós, προφέρει στους προπτυχιακούς φοιτητές όλου του κόσμου μια μοναδική ευκαιρία για ένα εξάμηνο ή ένα χρόνο οπουδών στο εξωτερικό, σε ένα από τα πιο προηγμένα κέντρα μαθηματικών στον κόσμο. Χάρη σ' αυτό το πρόγραμμα, οι μέλλοντες μαθηματικοί και ειδικοί της επιστήμης των υπολογιστών μπορούν, από τα προπτυχιακά τους έτη, να διδαχτούν ποικίλα θέματα από όλους τους τομείς των μαθηματικών, υπό την επίβλεψη διακεκριμένων ούγγρων καθηγητών, οι περιούπολοι από τους οποίους έχουν πολύχρονη διδακτική πείρα από τις ΗΠΑ. Οι τάξεις είναι ολιγομελείς (δεν ξεπερνούν ποτέ τους 30 οπουδαστές), τα μαθήματα γίνονται στα αγγλικά, και οι βεβαιώσεις οπουδών αναγνωρίζονται από τα εκπαιδευτικά ιδρύματα όλου του κόσμου.

Οι τάξεις διευθύνονται από τη Διεθνή Λέσχη του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου της Βουδαπέστης, το οποίο βρίσκεται κοντά στο ιστορικό κέντρο της πόλης. Οι ανέσεις είναι εξαιρετικές, τα αναγκαία έξοδα λιγοστά, και τα διδακτρά παραμένουν σε λογικά πλαίσια. Το φθινοπωρινό εξάμηνο αρχίζει συνήθως κατά την πρώτη εβδομάδα του Σεπτεμβρίου και λήγει πριν από τα Χριστούγεννα, ενώ το εαρινό εξάμηνο ξεκινάει στις αρχές Φεβρουαρίου και λήγει κατά τα τέλη Μαΐου. Υπάρχει ένα σύντομο πρόγραμμα προσανατολισμού, πριν από την έναρξη των εξαμήνων, ενώ μπορεί κάποιος να ουμιετάσχει και στο προαιρετικό πρόγραμμα δύο εβδομάδων για την εκμάθηση της γλώσσας, που προγείται του κανονικού προγράμματος. Είναι δυνατό να γίνουν διακανονισμοί ώστε να ουμιετάσχει κάποιος

ος στο διαγωνισμό Putnam στη Βουδαπέστη και/ή στο Graduate Record Examination στο Βελγικό ή τη Βιέννη, πόλεις που απέχουν και οι δύο περίπου τέσσερις ώρες με το τρένο από τη Βουδαπέστη.

Κατά τα τελευταία δέκα χρόνια, μεγάλος αριθμός φοιτητών (πολλοί από τους οποίους φοιτούν σε αμερικανικά πανεπιστήμια) εκμεταλλεύτηκαν την ευκαιρία που τους προσέφερε η μακρά και εξαιρετική ουγγρική παράδοση στην μαθηματική εκπαίδευση και στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων, χάρη σ' αυτό το μοναδικό πρόγραμμα. Πολλοί μάλιστα διατηρούν στενές επαφές τόσο μεταξύ των δύο και με το διδακτικό προσωπικό και τους οργανωτές του προγράμματος.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα Εξάμηνα Μαθηματικών της Βουδαπέστης, επικοινωνήστε με την εκπρόσωπο του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου της Βουδαπέστης, κυρία Χάφτα, Ομήρου 13, Αθήνα, τηλ: 3627709. Η προθεσμία εγγραφών λήγει τέσσερις μήνες πριν από την έναρξη κάθε Εξαμήνου.

Ένας οδηγός υποτροφιών

Θα ήταν χρήσιμο για τους μαθητές που σκέφτονται να ακολουθήσουν καριέρα στα μαθηματικά ή τις φυσικές επιστήμες στις ΗΠΑ, αλλά και για όσους βρίσκονται πέρι στο δρόμο προς αυτούς τους κλάδους, να ουμβουλευτούν τον οδηγό υποτροφιών και επιχορηγήσεων *The Prentice Hall Guide to Scholarships and Fellowships For Math and Science Students* των Mark Kantrowitz και Joann P. DiGennaro. Σύμφωνα με τον εκδότη, πρόκειται «για την πρώτη και μοναδική πηγή πληροφοριών όπου παρουσιάζονται οι περισσότερες από 250 υποτροφίες και επιχορηγήσεις που διατίθενται στους μαθητές οι οποίοι ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες σε λυκειακό, προ-

πτυχιακό και πτυχιακό επίπεδο». Επίσης, ο οδηγός παρέχει τις τελευταίες πληροφορίες για τους 80 διαγωνισμούς, τις δυνατότητες πρακτικής εξάσκησης, τις προσφορές για καλοκαιρινή εργασία και τις δυνατότητες για σπουδές στο εξωτερικό.

Περιέχονται ακόμη πληροφορίες για τα προγράμματα οικονομικής βοήθειας που καλύπτουν το φάσμα των σταδιοδρομίων οι οποίες ανοίγονται για τους μαθητές στους τομείς των φυσικών επιστημών, των μαθηματικών και της μηχανολογίας, από την ακουστική, τη βιοτεχνολογία και την επιστήμη των υπολογιστών ως τη μετεωρολογία, τη φυσική και τη ψυχολογία. Περιγράφονται προγράμματα τα οποία απευθύνονται σε γυναίκες και σε σπουδαστές που προέρχονται από μειονότητες, καθώς και προγράμματα γενικότερης φύσεως, που δεν περιορίζονται στον τομέα σπουδών του μαθητή.

Το βιβλίο παρέχει οδηγίες για διάφορα ζητήματα, λόγου χάρη για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να επιλέξει το προπτυχιακό σχολείο που ανταποκρίνεται στις ανάγκες του (συνυπολογίζοντας κάθε στοιχείο, από τον κύκλο των μαθημάτων και το διδακτικό προσωπικό ως το κοινωνικό περιβάλλον και τις εξωχολικές δραστηριότητες), για το πώς μπορεί να ανακαλύψει όλες τις δυνατές πηγές οικονομικής βοήθειας και για το πώς μπορεί να βελτιώσει τις πιθανότητες που υπάρχουν να γίνει δεκτός από το σχολείο της επιλογής του.

Το βιβλίο συμπληρώνεται με βιβλιογραφία, συνοδευόμενη από σχόλια σχετικά με πρόσθετες πηγές πληροφοριών που αφορούν την ακαδημαϊκή σταδιοδρομία, και οι οποίες πιθανώς ενδιαφέρουν τους σπουδαστές των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών. (325 σελίδες, χαρτόδετο, \$19,95).

—ISBN 0-13-045345-5).



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M11

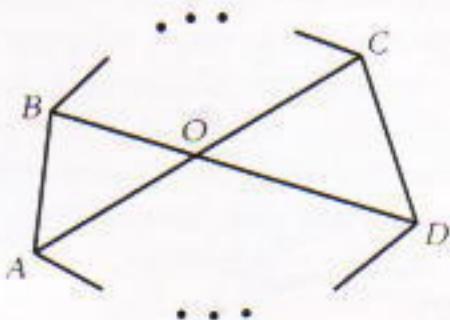
Εστω n το πλήθος των πλευρών του δεδομένου πολυγώνου (ψυσικά, $n \geq 4$). Τότε, το πλήθος των διαγώνιων του θα είναι $n(n - 3)/2$ (διότι από καθεμιά από τις n κορυφές ξεκινούν $n - 3$ διαγώνιοι, και με αυτόν τον τρόπο απαριθμούμε δύο φορές κάθε διαγώνιο). Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\frac{s}{n} < \frac{d}{n(n - 3)/2},$$

όπου s και d είναι τα αθροίσματα των μηκών όλων των πλευρών του πολυγώνου και όλων των διαγωνίων του, αντίστοιχα.

Θεωρούμε δύο μη διαδοχικές πλευρές AB και CD , και τις διαγωνίους AC και BD που συνδέουν τα άκρα τους και τέμνονται στο O (Σχήμα 1). Έχουμε ότι $AB < AO + OB$ και $CD < CO + OD$, επομένως $AB + CD < (AO + OC) + (BO + OD) = AC + BD$.

Αν γράφουμε όλες τις παρόμοιες ανισότητες για κάθε ζεύγος μη διαδοχικών πλευρών και τις προσθέσουμε, θα πάρουμε το $(n - 3)s$ στο αριστερό μέλος (διότι κάθε πλευρά εμφανίζεται σε $n - 3$ ζευγάρια) και το $2d$ στο δεξιό μέλος (διότι κάθε διαγώνιος εμφανίζεται σε δύο ανισό-



Σχήμα 1

τιτες — συνδέει δύο ζεύγη μη διαδοχικών πλευρών, όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 1). Επομένως, $(n - 3)s < 2d$, οχέον που είναι ισοδύναμη με αυτή που θέλαμε να αποδείξουμε.

M12

Η απάντηση είναι 2^{n-1} . Θεωρήστε μία από τις μεταθέσεις που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός που βρίσκεται στην πρώτη θέση (από τα αριστερά) είναι ο k . Αν $k > 1$, κινούμενοι από τα αριστερά προς τα δεξιά θα συναντήσουμε τους αριθμούς $k - 1, k - 2, \dots, 1$ σε αυτήν ακριβώς τη (φθίνουσα) διάταξην. Πραγματικά, ο αριθμός 1 πρέπει να έχει το 2 στα αριστερά του, ο αριθμός 2 πρέπει να έχει το 1 ή το 3 — επομένως, το 3 — στα αριστερά του, το 3 πρέπει να έχει το 2 ή το 4 — επομένως, το 4 — στα αριστερά του, κ.ο.κ. Ομοίως, για $k < n$, οι αριθμοί $k + 1, k + 2, \dots, n$ πρέπει να είναι διευθετημένοι κατά αύξουσα διάταξη, διότι το $n - 1$ πρέπει να βρίσκεται στα αριστερά του n , και επομένως το $n - 2$ στα αριστερά του $n - 1$, κ.ο.κ. Επομένως, καθεμιά από τις μεταθέσεις του προβλήματος καθορίζεται μονοοσήμαντα από το σύνολο των θέσεων που καταλαμβάνουν οι αριθμοί $1, 2, \dots, k - 1$ (μπορεί να μην υπάρχουν τέτοιες θέσεις αν $k = 1$ — με άλλα λόγια, στην ταυτοτική μετάθεση $1, 2, \dots, n$): πρέπει να τοποθετήσουμε αυτούς τους αριθμούς σε αυτές τις θέσεις σε φθίνουσα διάταξη και τους υπόλοιπους αριθμούς στις υπόλοιπες θέσεις σε αύξουσα διάταξη.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το πλήθος όλων αυτών των συνόλων είναι απλώς το πλήθος όλων των υποσύνολων του συνόλου όλων των $n - 1$

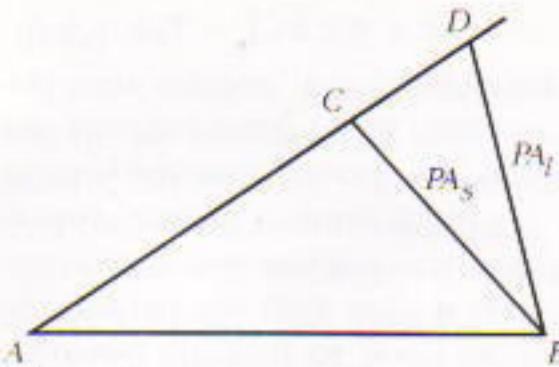
θέσεων εκτός της πρώτης, και ότι ισούται με 2^{n-1} .

M13

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί του $m + p$ για να αποδείξουμε μια περισσότερο γενική πρόταση όπου σε κάθε στήλη είναι υπογραμμισμένοι όχι λιγότεροι από τους k μεγαλύτερους αριθμούς και σε κάθε γραμμή όχι λιγότεροι από τους l μεγαλύτερους αριθμούς (έτοις είναι ευκολότερος ο επαγωγικός συλλογισμός).

Προφανώς, για $m = n = k = l = 1$ η πρόταση είναι αληθής: $kl = 1$, αριθμός (ο μοναδικός) που θα είναι υπογραμμισμένος δύο φορές. Ας αποδείξουμε τώρα ότι η πρόταση για έναν πίνακα $m \times n$ μπορεί να αναγθεί στην περίπτωση ενός πίνακα $(m - 1) \times n$ ή ενός πίνακα $m \times (n - 1)$.

Αν όλοι οι υπογραμμισμένοι αριθμοί σε έναν πίνακα $m \times n$ είναι υπογραμμισμένοι δύο φορές, τότε δεν είναι λιγότεροι από kl . Διαιφορετικά, έστω a ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς που είναι υπογραμμισμένοι μόνο μία φορά. Αυτός είναι είτε ένας από τους k μεγαλύτερους αριθμούς της στήλης του είτε ένας από τους l μεγαλύτερους αριθμούς της γραμμής του. Υποθέτουμε ότι έχει υπογραμμιστεί ως ένας από τους μεγαλύτερους αριθμούς της στήλης του. Τότε οι l μεγαλύτεροι αριθμοί της γραμμής του είναι μεγαλύτεροι από τον a , και επομένως έχουν υπογραμμιστεί δύο φορές. Διαγράφουμε αυτή τη γραμμή. Παίρνουμε έναν πίνακα $(m - 1) \times n$, στον οποίο τουλάχιστον οι l μεγαλύτεροι αριθμοί είναι υπογραμμισμένοι σε κάθε γραμμή και τουλάχιστον $k - 1$ αριθμοί σε κάθε στήλη. Από την επαγωγική υπόθεση ουμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον $(k - 1)l$ αριθμοί αυτού του μικρότερου

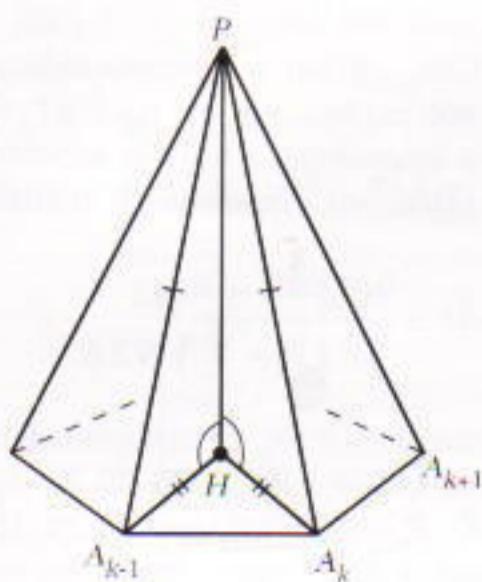


Σχήμα 2

πίνακα είναι υπογραμμισμένοι δύο φορές. Οι ίδιοι αριθμοί είναι υπογραμμισμένοι δύο φορές και στον μεγάλο πίνακα. Μαζί με τους τουλάχιστον l διπλά υπογραμμισμένους αριθμούς της γραμμής που διαγράφαμε, έχουμε τουλάχιστον $(k-1)l + l = kl$ αριθμούς, και π απόδειξη ολοκληρώθηκε.

M14

Ας αποδείξουμε κατ' αρχάς ότι $PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη από αυτές τις ακμές —έστω PA_s και PA_l αντίστοιχα. Σχεδιάζουμε τώρα μια γωνία BAC ίση με τις γωνίες PA_1A_2, \dots, PA_nA_1 και γράφουμε το τρίγωνο $AB = A_1A_2 = \dots = A_nA_1$ σε μια από τις πλευρές της, και τα τρίγωνα $AC = A_{s-1}P$ και $AD = A_{l-1}P$ στην άλλη πλευρά. (Στο Σχήμα 2 βλέπετε την περίπτωση που $AD > AC$. Ανάλογη είναι η περίπτωση που $AD < AC$. Φυσικά, όταν $s = 1$ ή $l = 1$ το A_{s-1} ή το A_{l-1} πρέπει να αντικατασταθεί από το A_n .) Τα τριγωνά ABC και ABD είναι ίσα με τις έδρες $A_{s-1}A_sP$ και $A_{l-1}A_lP$, αντίστοιχα, και επομένως $BC = PA_s$ και $BD = PA_l$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε, $BD - BC < DC = |AD - AC|$



Σχήμα 3

—δηλαδή, $|PA_l - PA_s| < |PA_{s-1} - PA_{s-1}| \leq PA_s - PA_l$, διότι PA_l είναι η μεγαλύτερη και PA_s είναι η μικρότερη από τις ακμές PA_k — και π εν λόγω αντίφασης αποδεικνύει ότι όλες αυτές οι ακμές έχουν το ίδιο μήκος. Τώρα φέρουμε το ύψος RH της πυραμίδας (Σχήμα 3). Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε, $RA_k^2 = PA_k^2 - RH^2$, και επομένως $RA_1 = RA_2 = \dots = RA_n$. Επομένως, οι κορυφές $A_1A_2\dots A_n$ βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο H και τον χωρίζουν σε ίσα τόξα (αντίστοιχα των ίσων χορδών A_kA_{k+1}). Αυτό οφείλεται ότι το $A_1A_2\dots A_n$ είναι κανονικό n -γωνο και ότι το ίχνος του ύψους H της πυραμίδας είναι το κέντρο του επομένως η απόδειξη μας ολοκληρώθηκε.

M15

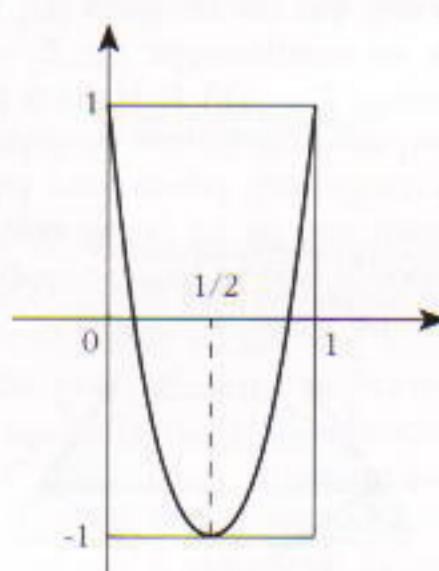
Η απάντηση είναι $a = 8$. Αν $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, τότε $f'(1) = 2A + B$. Τώρα

$$\begin{aligned} f(0) &= C, \\ f(1/2) &= A/4 + B/2 + C, \\ f(1) &= A + B + C, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} |f'(1)| &= |2A + B| \\ &= |3f(1) - 4f(1/2) + f(0)| \\ &\leq 3|f(1)| + 4|f(1/2)| + |f(0)| \\ &\leq 8. \end{aligned}$$

Επομένως $a \leq 8$. Από την άλλη πλευρά, οι προηγούμενες ανισότητες γίνονται ακριβείς ισότητες αν $f(1) = -f(1/2) = f(0) = 1$, δηλαδή για $f_0(x) = 8x^2 - 8x + 1$ (δείτε τη γραφική παράσταση του Σχήματος 4). Η συνάρτηση $f_0(x)$ ικανοποιεί την ανισότητα $|f_0(x)| \leq 1$ για $0 \leq x \leq 1$ (η γραφική



Σχήμα 4

της παράστασης είναι παραβολή με κορυφή στο $x = 1/2$, και επομένως ο αριθμός 8 που βρήκαμε στην εκτίμηση μας για το $|f'(1)|$ δεν μπορεί να μειωθεί, άρα $a = 8$.

Αυτή η λύση βασίστηκε στο γεγονός ότι ένα πολυώνυμο βαθμού n καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές του σε $n+1$ σημεία. Στην περίπτωσή μας, $n = 2$. Προσπαθήστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για τριτοβάθμια πολυώνυμα. Αξίζει να επισημάνουμε ότι στη γενική περίπτωση ενός πολυωνύμου n βαθρού n καλύτερη εκτίμηση γι' αυτό το πρόβλημα μας δίνεται από τα λεγόμενα πολυώνυμα Chebyshev, τα οποία σκοπεύουμε να οχολιάσουμε λεπτομερώς σ' ένα από τα επόμενα τεύχη του Quantum.

Φυσική

Φ11

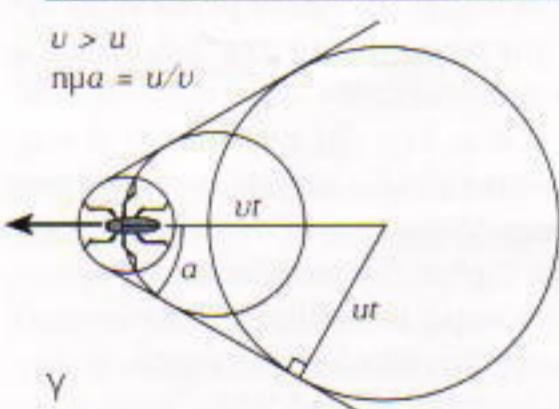
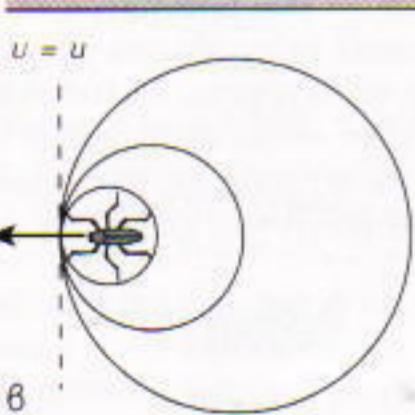
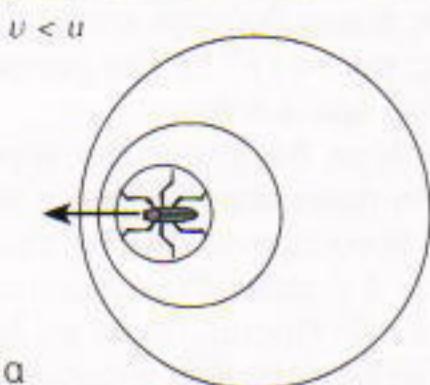
Είναι δυνατές τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις: (a) η ταχύτητα v του εντόμου σε σχέση με το νερό είναι μικρότερη από την ταχύτητα v των επιφανειακών κυμάτων —δηλαδή, $v < u$. Στη (B) περίπτωση $v = u$, και στη (γ) $v > u$. Και οι τρεις περιπτώσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5. Το Σχήμα 5γ μοιάζει με το κρουστικό κύμα που δημιουργείται από ένα υπερηχητικό αεροπλάνο, ή μας θυμίζει την ακτινοβολία Cherenkov, που εκπέμπεται όταν τα πλεκτρόνια κινούνται ταχύτερα απ' ό,τι το φως μέσα σ' ένα υλικό (μην τρομάξετε, τα πλεκτρόνια δεν μπορούν να κινηθούν ταχύτερα απ' ό,τι το φως στο κενό).

Φ12

Συμβολίζουμε τη δύναμη που ασκεί ο θόλος στην άκρη της ράβδου με N (το διάνυσμα της δύναμης κατευθύνεται προς το κέντρο του θόλου), και τη δύναμη τριβής με T . (Για να βρούμε τη σωστή κατεύθυνση αυτής της δύναμης, χρειάζεται να σκεφτούμε προς τα πάνω θα κινηθεί το άκρο της ράβδου αν πάψει να υπάρχει η τριβή.) Ας γράψουμε την εξίσωση ισορροπίας για τη ράβδο (Σχήμα 6):

$$2N \cdot \text{συντάξη} - 2T \cdot \text{ημά} + mg = 0.$$

Αν αρχικά η ράβδος είχε πεσεί πο δυνατά στη θέση της, τα N και T



Σχήμα 5

Θα ήταν αυξημένα, αλλά το mg θα παρέμενε το ίδιο. Αφού ενδιαφερόμαστε για την ελάχιστη δυνατή τιμή του συντελεστή τριβής, θα υποθέσουμε ότι ο ράβδος έχει πιεστεί πολύ δυνατά στη θέση της και επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε τη δύναμη mg . Τότε

$$N \cdot \text{συνα} = T \cdot \mu \rho a \leq \mu N \cdot \text{συνα},$$

$$\begin{aligned} \mu \geq \text{οφα} &= \frac{\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}}{\frac{l}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4R^2}{l^2} - 1}. \end{aligned}$$

Έχουμε βρει την απάντηση, αλλά

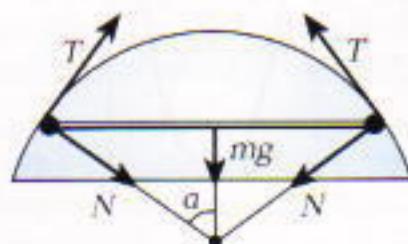
είναι απαραίτητα κάποια σχόλια. Εάν $l > 2R$, ο ράβδος δεν χωράει στο θόλο. Αν, από την άλλη, ο ράβδος είναι πολύ μικρός, τότε η αντίστοιχη τιμή του μ θα είναι υπερβολικά μεγάλη και δεν θα έχει νόημα. Τέλος, το καυτσούκ είναι ένα υλικό με πολύ περιπλοκες ιδιότητες. Η αλληλεπίδρασή του με μια στερεή επιφάνεια δεν περιγράφεται σωστά μέσω των νόημαν της ξηράς τριβής (αλλά αυτό είναι μια άλλη ιστορία).

Φ13

Η αγωγή της θερμότητας από το εσωτερικό τοίχωμα του θερμός (δηλαδή από το τοά) γίνεται μέσω των μορίων του αερίου που βρίσκεται ανάμεσα στο εσωτερικό και το εξωτερικό τοίχωμα. Γι' αυτό το λόγο αντλούμε τον αέρα ανάμεσα στα δύο τοιχώματα: για να εμποδίσουμε το αέριο που απομένει σε αυτό το χώρο να σχηματίσει ένα ουνέχες μέσο αγωγής θερμότητας —δηλαδή, για να κινούνται τα μόρια από το ένα τοίχωμα στο άλλο χωρίς να συγκρούονται μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι μετά τη σύγκρουσή του μ' ένα τοίχωμα, ένα μόριο έχει κατά μέσο όρο ενέργεια ανάλογη με τη θερμοκρασία του τοιχώματος. Επομένως, στο εξωτερικό τοίχωμα η μέση κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης ενός μορίου είναι $E_1 \sim 3/2 kT_\delta$, όπου T_δ είναι η θερμοκρασία δωματίου. Στο εσωτερικό τοίχωμα η αντίστοιχη τιμή είναι $E_2 \sim 3/2 kT_r$, όπου T_r είναι η θερμοκρασία του τσαγιού. Παρότι αυτή η θερμοκρασία αλλάζει με το χρόνο, το μέγεθος της μεταβολής της δεν είναι μεγάλο: $\Delta T = 363 \text{ K} - 343 \text{ K} = 20 \text{ K}$. Επομένως, για την εκτίμησή μας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_2 \sim 3/2 kT_s$, όπου $T_s = 353 \text{ K}$ είναι η μέση θερμοκρασία του ζεστού τοιχώματος.

Συνεπώς, κάθε μόριο μετά τη σύγκρουσή του με το ζεστό τοίχωμα «απορροφά» από το τοά ενέργεια που ισούται με



Σχήμα 6

$$\Delta E \sim 3/2 k(T_s - T_\delta).$$

Το πλήθος των μορίων που συγκρούονται με το ζεστό τοίχωμα στη μονάδα του χρόνου είναι ανάλογο με το $1/2 \rho u_\perp S$, όπου ρ είναι η συγκέντρωση των μορίων του αερίου και u_\perp είναι η μέση τιμή του μέτρου της κάθετης προς το τοίχωμα συνιστώσας της μοριακής ταχύτητας (το $1/2$ προκύπτει από το γεγονός ότι στατιστικά τα μισά μόρια με μέτρο ταχύτητας u_\perp θα συγκρουούνται με το τοίχωμα ενώ τα άλλα μισά, κινούμενα αντίθετα, δεν θα συγκρουούνται). Το πλήθος των μορίων που συγκρούονται με το τοίχωμα κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι

$$N \sim 1/2 \rho u_\perp S \Delta t.$$

Αυτά τα μόρια λαμβάνουν από το τοά ενέργεια

$$\Delta E_{\text{αλ}} = N \Delta E \sim 3/4 \rho u_\perp S k(T_s - T_\delta) \Delta t.$$

Αυτή η ενέργεια ισούται με τη μεταβολή ΔU στην εσωτερική ενέργεια του τσαγιού στο χρονικό διάστημα Δt —δηλαδή, $\Delta E = \Delta U$. Εφόσον τώρα

$$\Delta U = m_r c \Delta T,$$

όπου ΔT είναι η μεταβολή στη θερμοκρασία του τσαγιού, έχουμε

$$3/4 \rho u_\perp S k(T_s - T_\delta) \Delta t \sim m_r c \Delta T.$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$\Delta t \sim \frac{4m_r c \Delta T}{3\rho u_\perp S k (T_s - T_\delta)}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$u_\perp \sim \frac{\sqrt{U^2}}{\sqrt{3}} \sim \sqrt{RT/m_{\text{mol}}},$$

όπου m_{mol} είναι η γραμμομοριακή μάζα του αερίου, και ότι $P = kT_\delta$ (το οποίο προκύπτει από την καταστατική εξίσωση), λαμβάνουμε τελικά

$$\Delta t \sim \frac{4m_r c \Delta T \sqrt{m_{\text{mol}} \cdot T_\delta}}{3P (T_s - T_\delta) S \sqrt{R}}.$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα ($m_r = 1 \text{ kg}$, $\Delta T = 20 \text{ K}$, $T_\delta = 293 \text{ K}$, $P = 1 \text{ Nt/m}^2$, $m_{\text{mol}} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, κ.λπ.), προκύπτει

$$\Delta t \sim 3 \cdot 10^4 \text{ sec} \sim 8 \text{ h}.$$

Φ14

Σε ένα τυχαίο σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση R από το καλώδιο, η ταχύτητα του σωματιδίου έχει διεύθυνση που σχηματίζει τη μικρή γωνία α με τον άξονα x , και επομένως

$$a = \frac{u_y}{u_x},$$

όπου u_y είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας και $u_x = \sqrt{2E_{kin}/m}$ η οριζόντια συνιστώσα της.

Ας γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη συνιστώσα y (Σχήμα 7):

$$F_y dt = mdu_y,$$

όπου

$$F_y = eE \text{ συνψ} = \frac{\text{ελουνψ}}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μικρή χρονική περίοδο dt από τη σχέση $u_y = dx/dt$:

$$dt = \frac{dx}{u_y} = \frac{R d\psi}{u_x \text{ συνψ}}.$$

Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας αλλάζει κατά

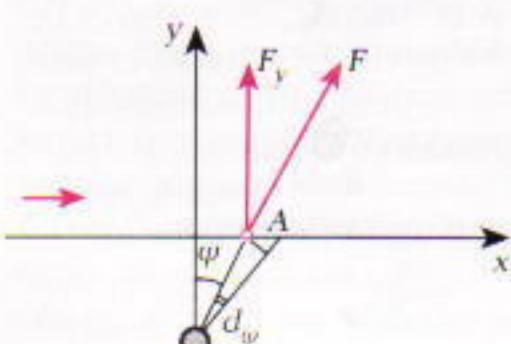
$$du_y = \frac{F_y}{m} dt = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 m u_x} d\psi.$$

Τη συνολική συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα y «συνθέτουν» οι μικρές αυξήσεις du_y :

$$u_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du_y = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 m u_x}.$$

Επομένως, η γωνία που αναζητούμε είναι

$$\alpha = \frac{u_x}{u_y} = \frac{e\lambda}{2\epsilon_0 m u_x^2} = \frac{e\lambda}{4\epsilon_0 E_{kin}}.$$



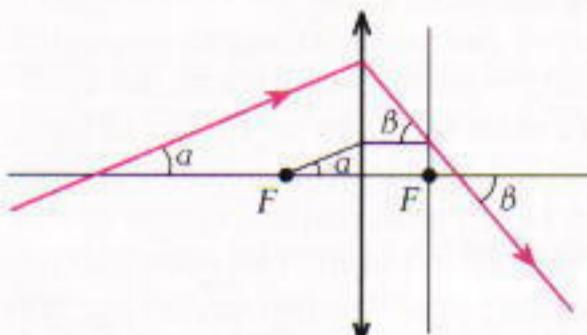
Σχήμα 7

Φ15

Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις.

(1) Ο φακός είναι συγκλίνων (Σχήμα 8). Αν σχεδιάσουμε τη διαδρομή μιας φωτεινής ακτίνας μέσα από το φακό, προκύπτει η εξής σχέση:

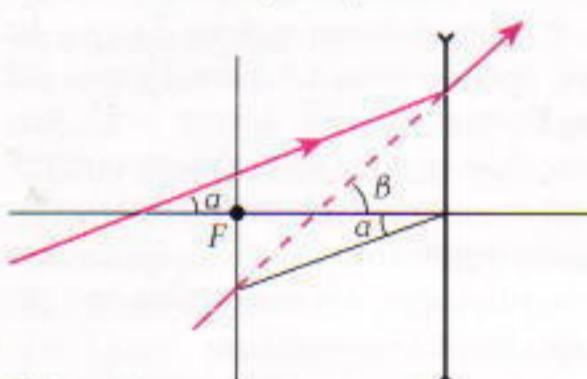
$$d \cdot \text{εφα} = f \cdot \text{εφα} + f \cdot \text{εφβ}.$$



Σχήμα 8

Από αυτήν συνεπάγεται ότι

$$f = \frac{d}{1 + \text{εφβ}/\text{εφα}} = 4 \text{ cm.}$$



Σχήμα 9

(2) Ο φακός είναι αποκλίνων. Από το Σχήμα 9 προκύπτει

$$f \cdot \text{εφβ} = f \cdot \text{εφα} + d \cdot \text{εφα},$$

από όπου έχουμε

$$f = \frac{d}{\text{εφβ}/\text{εφα} - 1} = 12 \text{ cm}$$

—με άλλα λόγια η ακτίνα διέρχεται από την κύρια εστία του φακού.

Σπαζοκεφαλίες

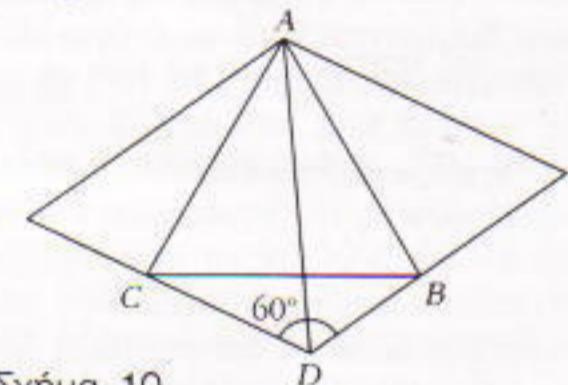
Σ11

Ας υποθέσουμε ότι η μπάντα σχηματίζει αρχικά ένα τετράγωνο $n \times n$, και επομένως το πλήθος των μουσικών είναι n^2 . Από τη διατύπωση του προβλήματος καταλαβαίνουμε ότι το n^2 πρέπει να διαιρείται με το $n+5$ (επειδή είναι δυνατό να σχηματιστούν $n+5$ γραμμές). Εφόσον $n^2 = (n+5)(n-5) + 25$, συνεπάγεται ότι το 25 διαιρείται με το $(n+5)$. Ο

μοναδικός διαιρέτης του 25 που είναι μεγαλύτερος από το 5 είναι το ίδιο το 25, και επομένως $n+5 = 25$, $n = 20$, και η απάντηση είναι $n^2 = 400$. (V. Dubrovsky)

Σ12

Από τις ιδιότητες του ρόμβου είναι προφανές ότι $\angle ADC = \angle BDA = 60^\circ$ (Σχήμα 10). Ας υποθέσουμε ότι η γωνία ACB είναι 60° . Τότε, το τετράπλευρο $ACDB$ είναι εγγράφιμο σε κύκλο (αφού $\angle ACB = \angle ADB$) και επομένως η γωνία CAB είναι παραπληρωματική της γωνίας CDB , άρα 60° επίσης. Κατά συνέπεια, το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο. Η απόδειξη είναι παρόμοια εάν υποθέσουμε ότι η γωνία ABC είναι 60° . Τέλος, αν η γωνία των 60° είναι η CAB , τότε είναι παραπληρωματική της γωνίας CDB , και άρα το τετράπλευρο $ACDB$ είναι και πάλι εγγράφιμο. Επομένως, $\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$, και το τρίγωνο ABC είναι και πάλι ισόπλευρο.



Σχήμα 10

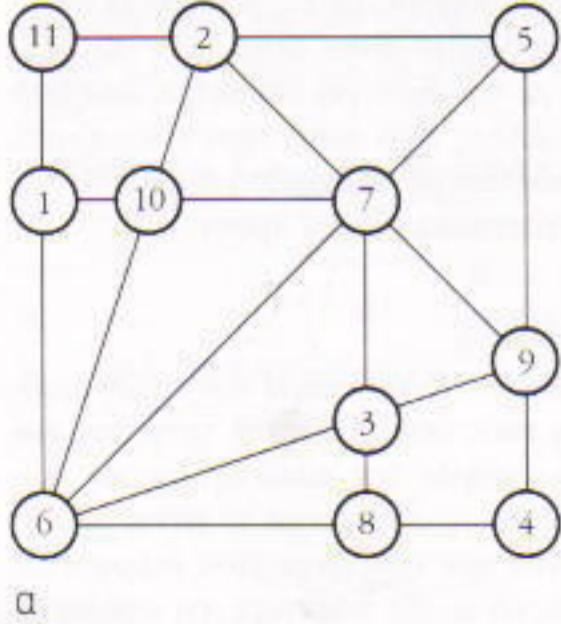
Σ13

Ανοίξτε έναν από τους διακόπτες, περιμένετε λίγο, κλείστε τον, και αφού ανοίξετε τον δεύτερο διακόπτη μπείτε στο δωμάτιο με τις λάμπες. Η αναμένη λάμπα είναι αυτή που συνδέεται με τον δεύτερο διακόπτη, ενώ από τις άλλες δύο αυτή που είναι ζεστή συνδέεται με τον πρώτο διακόπτη και η τελευταία με τον τρίτο.

Σ14

Εστω s το άθροισμα των τριών αριθμών ενός οποιουδήποτε τμήματος και a ο αριθμός της κάτω αριστερής γωνίας. Αν προσθέσουμε τα πέντε άθροισμα των τμημάτων που διέρχονται από το a , θα πάρουμε τη σχέση $(1 + 2 + \dots + 11) + 4a = 66 + 4a = 5s$. Τώρα θεωρήστε τα τρία οριζόντια τμή-

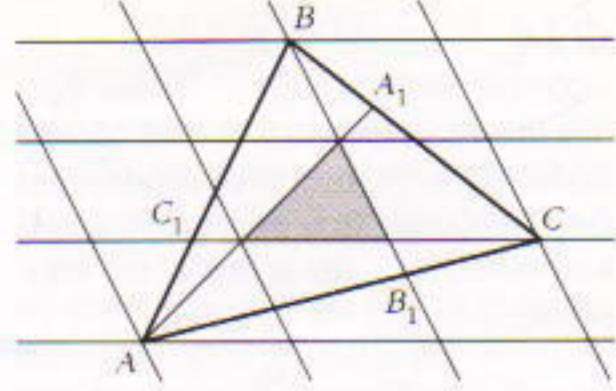
ματα και το τμήμα που διέρχεται από τους δύο αριθμούς που δεν ανήκουν στα τρία οριζόντια τμήματα. Προσθέτοντας τους αριθμούς σε αυτά τα τέσσερα τμήματα παίρνουμε $4s = 66 + a$. Από τις δύο εξιώσεις βρίσκουμε $a = 6$ και $s = 18$. Ένα από τα τμήματα που διέρχεται από το $a = 6$ περιέχει τους αριθμούς 1 και 11. Ένα από τα άλλα τμήματα που μπορεί να διέρχονται από το 1 θα περιέχει τους αριθμούς 8 και 9 ή τους 7 και 10, ενώ τα τμήματα που διέρχονται από το 11 μπορεί να περιέχουν τα 2 και 5 ή τα 3 και 4. Επομένως, ένα τμήμα που διέρχεται από το 1 δεν μπορεί να τέμνεται μ' ένα τμήμα που διέρχεται από το 11. Άρα, δυνατές θέσεις για το 1 και το 11 είναι μόνον οι κύκλοι της αριστερής ή της κάτω πλευράς του τετραγώνου. Γράφοντας το 11 στην πάνω αριστερή γωνία και κάνοντας στη συνέχεια δοκιμές μπορούμε να βρούμε τις δύο λύσεις του Σχήματος 11. Αν ανταλλάξουμε ταυτόχρονα τα ζευγάρια των αριθμών (εκτός από το 6) σε όλα τα τμήματα που διέρχονται από το 6 (για παράδειγμα, στο Σχήμα 11a, το 1 με το 11, το 10 με το 2, το 7 με το 5, κ.ο.κ.), θα πάρουμε δύο ακόμη λύσεις. (Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $s = 18$ και $a = 6$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή η πράξη μετασχηματίζει πάντοτε μία λύση σε κάποια άλλη λύση.) Και τελικά, μπορούμε να πάρουμε τις συμμετρικές αυτών των τεσσάρων λύσεων ως προς το διαγώνιο τμήμα, καταλήγοντας σε 8 συνολικά λύσεις. (V. Dubrovsky)



Σχήμα 11

Σ15

Από τη διατύπωση του προβλήματος καταλαβαίνουμε ότι οι δύο περίττοι αριθμοί είναι διαφορετικοί — ειδάλλως, το γινόμενό τους θα ήταν ίσο με το τετράγωνο του πριαθρούσματός τους. Επομένως, το ελάχιστο δυνατό γινόμενο είναι $11 \cdot 13 = 143$. Το επόμενο είναι το $11 \cdot 15 = 165$. Αφού δεν υπάρχει καμιά πυραμίδα ψηλότερη από τα 165 m, οι αριθμοί είναι το 11 και το 13, και το ύψος της πυραμίδας είναι μεγαλύτερο από τα 143 m αλλά μικρότερο από τα $[(11 + 13)/2]^2 = 144$ m. Υπάρχουν δύο πυραμίδες στην Αίγυπτο ψηλότερες από τα 143 m: η πυραμίδα του Χέοπα, με ύψος 146,6 m, και του Χεφρήνος, με ύψος 143,5 m. Επομένως, η πυραμίδα κατασκευάστηκε για τον Χεφρήνα.



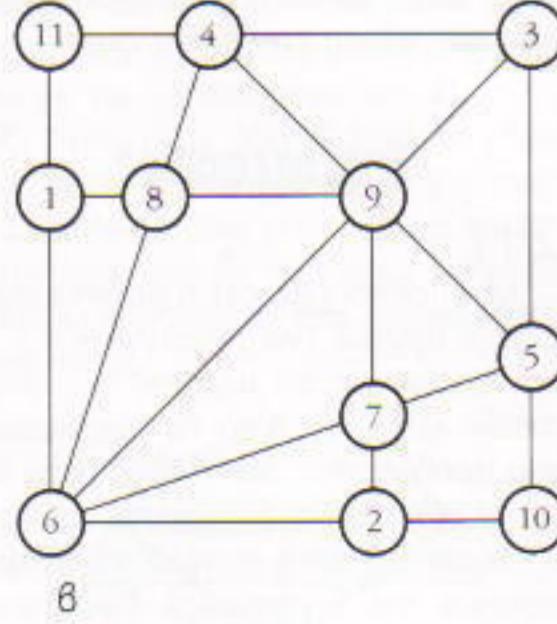
Σχήμα 12

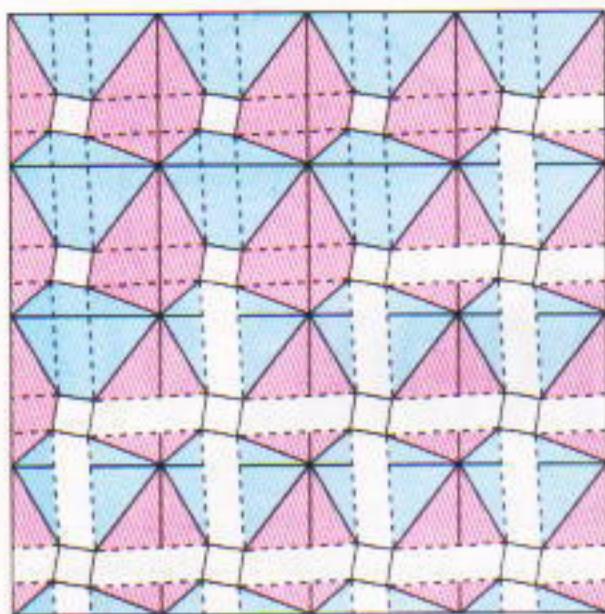
ομένου) τριγώνου ισούται με το μισό αυτής της μονάδας. Επομένως, η απάντηση είναι $1/2 : 3^{1/2} = 1/7$.

Η ύπαρξη του παραλληλόγραμμου πλαισίου στην προηγούμενη λύση μπορεί να προκύψει, για παράδειγμα, από το γεγονός ότι τα τμήματα AA_1 , BB_1 και CC_1 διαιρούν το ένα το άλλο σε τμήματα που βρίσκονται σε αναλογία $3 : 3 : 1$. Αιφνίδια πάντη απόδειξη για τον αναγνώστη.

3. Ας πλακοστρώσουμε το επίπεδο με αντίγραφα του μεγάλου τετραγώνου μαζί με το μικρό τετράγωνο μέσα του (Σχήμα 13). Με τον τρόπο αυτόν δημιουργούνται μπλε και κόκκινα εξάγωνα (τα βλέπουμε στο πάνω μέρος του σχήματος), και πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουν ίσα εμβαδά. Συνδέστε τα μικρά τετράγωνα με τον τρόπο που βλέπετε. Θα προκύψει ένα «παχύ» πλέγμα από μικρά τετράγωνα και από παραλληλόγραμμα που τα συνδέουν (δείτε το κατώτερο τμήμα του σχήματος). Είναι φανερό ότι αυτό το πλέγμα συμπίπτει με τον εαυτό του όταν περιστραφεί κατά 90° γύρω από το κέντρο ενός από τα μικρά τετράγωνα. Επομένως, τα παραλληλόγραμμα είναι όλα ίσα μεταξύ τους και χωρίζουν το επίπεδο σε τετράγωνα. Καθένα από αυτά τα τετράγωνα αποτελείται από δύο μπλε και δύο ροζ τρίγωνα με κοινή κορυφή, και, όπως αναφέραμε στο άρθρο, τα δύο μπλε τρίγωνα έχουν το ίδιο συνολικό εμβαδόν με τα δύο ροζ τρίγωνα. Επιστρέφοντας τώρα στα εξάγωνα βλέπουμε ότι τα μπλε αποτελούνται από δύο μπλε τρίγωνα και ένα παραλληλόγραμμο, ενώ τα ροζ αποτελούνται από δύο ροζ τρίγωνα και ένα παραλληλόγραμμο. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι τα εξάγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

4. Εστω M και N τα μέσα των πλευ-



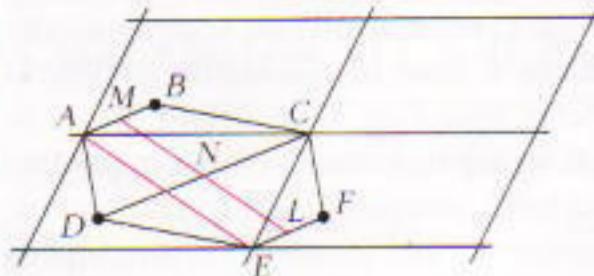


Σχήμα 13

ρών AB και CD του τετραπλεύρου $ABCD$. Θεωρείστε το $ABCD$ ως πλακίδιο μιας τετράπλευρης πλακόστρωσης σαν αυτές που εξετάσαμε στο άρθρο. Έστω $CDEF$ ένα γειτονικό πλακίδιο (συμμετρικό του $ABCD$ ως προς το N) και έστω L το μέσο της πλευράς EF (Σχήμα 14). Αφού τα M και L είναι ουμετρικά ως προς το N , τα τρία αυτά σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και επομένως $ML = MN + NL = 2MN$. Από την άλλη πλευρά, $ML = AE$. Τώρα, η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ADE και από τη σχέση $DE = BC$.

5. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι μικρότερο από το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, ενώ ισούται με αυτό μόνο όταν οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Αυτό μπορούμε να το δούμε, για παράδειγμα, από τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται από το παραλληλόγραμμο και τις διαγωνίους του. Μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχομένης γωνίας, και ότι αυτό το ημίτονο είναι το πολύ ίσο με 1 (όταν οι διαγώνιοι είναι κάθετες).

Ας θεωρήσουμε την πλακόστρωση που προκύπτει από το δεδομένο τετράπλευρο $ABCD$, και την παραλληλόγραμμη πλακόστρωση που συνδέεται με αυτήν. Το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του $ABCD$ και είναι το



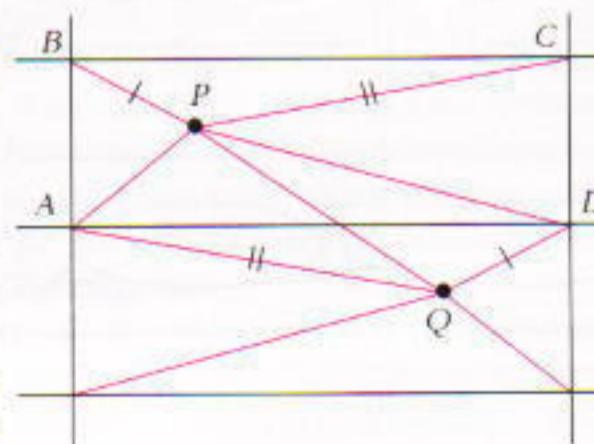
Σχήμα 14

πολύ ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 14, για μία από τις διαγωνίους ισχύει $AE \leq AD + DE = AD + BC$. Ομοίως, η άλλη διαγώνιος είναι το πολύ ίσο με το $AB + CD$. Άρα, το εμβαδόν του $ABCD$ δεν υπερβαίνει το $1/4(AD + BC)(AB + CD)$.

Για να ισχύει η ισότητα, πρέπει $AD + BC = AE$, οπότε $AD \parallel BC$ και $AB \parallel CD$. Επιπλέον, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου πρέπει να είναι κάθετες. Αυτό ομαίνει ότι το $ABCD$ είναι ορθογώνιο.

6. Στο Σχήμα 15 το εμβαδόν του $ABCD$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του $APDQ$ (διότι το τρίγωνο ADQ είναι ίσο με το τρίγωνο CBP). Τώρα, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι (δείτε τη λύση του προβλήματος 5) το εμβαδόν του τριγώνου είναι το πολύ ίσο με το ημιγινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του. Επομένως, $\text{Εμβαδόν}(APDQ) = \text{Εμβαδόν}(APQ) + \text{Εμβαδόν}(DPQ) \leq AP \cdot AQ/2 + DP \cdot DQ/2 = 1/2 (PA \cdot PC + PD \cdot PB)$, άρα $\text{Εμβαδόν}(ABCD) \leq PA \cdot PC + PD \cdot PB$.

7. Οπως βλέπετε στο Σχήμα 5 του άρθρου, το εξάγωνο μπορεί να περιληφθεί σε μια πλακόστρωση έτσι ώστε οι κορυφές του τριγώνου που εξετάζουμε να είναι κόμβοι του αντίστοιχου πλέγματος. Τότε, κάθε εξάγωνο



Σχήμα 15

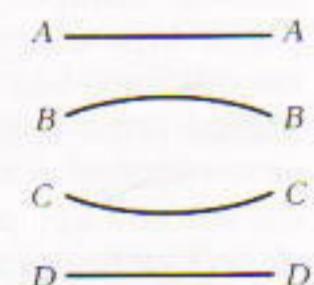
καλύπτει τρεις κόμβους, ενώ κάθε κόμβος ανήκει σε τρία εξάγωνα. Επομένως, το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $3 \cdot 1/3 = 1$ «μονάδα πλέγματος», και το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $1/2$.

Ιστορία μιας πόλης

(Δείτε τη στήλη «Γεγονότα» στο προηγούμενο τεύχος.)

1. Τα κανονικά δίκτυα είναι τα $3\bar{B}$, $3\bar{C}$, $3\bar{O}$, $3\bar{P}$, $3\bar{K}$, $3\bar{L}$, $3\bar{M}$, $3\bar{N}$, $3\bar{E}$, $3\bar{O}$ και $3\bar{P}$.

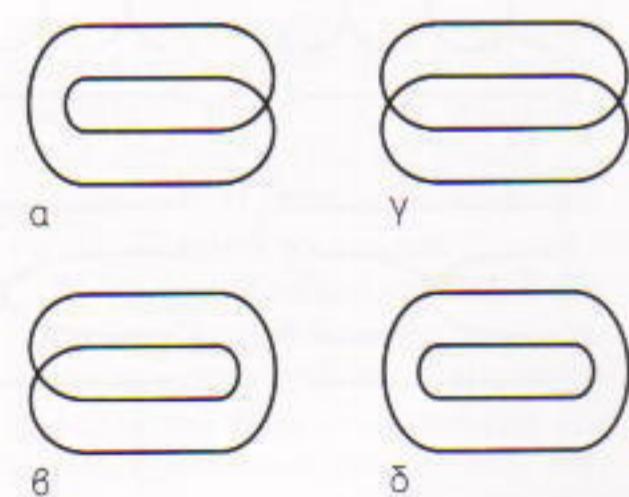
2. Θεωρήστε ένα τμήμα του δικτύου που δεν περιέχει καμία διασταύρωση, όπως στο Σχήμα 16. Υπάρχουν τέσσερις κλάδοι που τους ονομάζουμε A , B , C και D . Καθένας από τους κλάδους A και B θα συνδέεται και οτις δύο του πλευρές με έναν από τους C και D . Επομένως, υπάρχουν το πολύ δύο συνιστώσες.



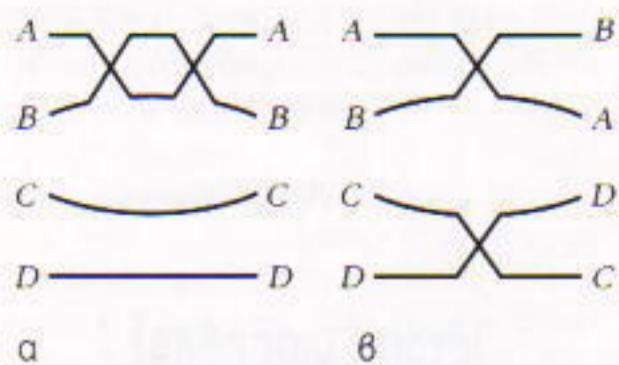
Σχήμα 16

Av και τα δίκτυα μπορεί να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα, η απάντηση στην Ερώτηση 2 μας δείχνει ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις βασικοί σχηματισμοί, αυτοί του Σχήματος 17. Οι δύο από αυτούς μας οδηγούν σε κανονικά δίκτυα, ενώ οι άλλοι δύο σε μη κανονικά.

3. Λόγω ουμετρίας αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση της προθήκης σημείων σύνδεσης. Στο Σχήμα 18a βλέπουμε το αποτέλεσμα της προθήκης και των δύο σημείων στην ίδια πλευρά του κύκλου, ενώ στο Σχήμα 18b τα σημεία έχουν προστε-



Σχήμα 17



Σχήμα 18

θεί σε αντίθετες πλευρές. Συγκρίνοντας με το Σχήμα 16 βλέπουμε ότι στην πρώτη περίπτωση η κανονικότητα δεν επηρεάζεται. Συγκρίνοντας με το Σχήμα 17 βλέπουμε ότι ισχύει το ίδιο και στη δεύτερη περίπτωση.

4. Υποθέστε πως υπάρχει ένα σημείο σύνδεσης στη μία πλευρά ενός κύκλου. Μπορούμε να το μεταφέρουμε στην άλλη πλευρά ως εξής: προσθέτουμε δύο σημεία στην άλλη πλευρά (στην Ερώτηση 3 αποδείξαμε ότι έχουμε αυτή τη δυνατότητα) και κατόπιν αφαιρούμε ένα από αυτά μαζί με το αρχικό.

5. Τα κανονικά δίκτυα είναι τα (γ), (δ), (ε), (θ), (ι) και (λ).

6. Στο Σχήμα 19 βλέπετε τα αποτέλεσμα των τριών πράξεων. Είναι φανερό ότι η κανονικότητα δεν επηρεάζεται.

7. Παρατηρήστε κατ' αρχάς ότι η απομάκρυνση των αρχικών ή των τελικών 0 δεν επηρεάζει τη διαιρετότητα με το 3 του εναλλασσόμενου αθροίσματος — και το ίδιο ισχύει και για τις τρεις πράξεις της Ερώτησης 6. Μπορούμε να εξαλείψουμε όλα τα 0 από μια ακολουθία με την εξής μέθοδο: Πρώτα, αφαιρούμε τα εξωτε-

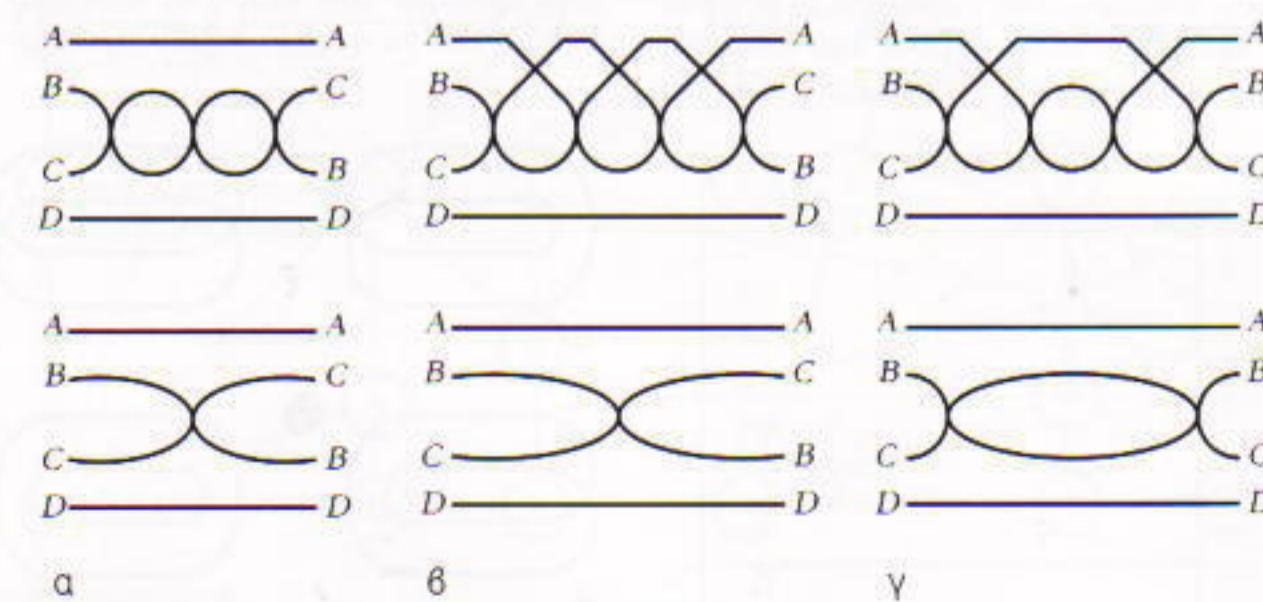
ρικά 0 και κατόπιν τα εσωτερικά 00. Κάθε 0 που απομένει θα περιβάλλεται από δύο 1, τα οποία μπορούμε να αφαιρέσουμε. (Αυτό συμβαίνει επειδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 101 με το 0.) Επαναλαμβάνοντας, αν χρειάζεται, τη διαδικασία, μπορούμε είτε να φέρουμε το 0 στην άκρη είτε να το φέρουμε δίπλα σ' ένα εσωτερικό 0. Κατ στις δύο περιπτώσεις, το 0 μπορεί να αφαιρεθεί. Όταν στην ακολουθία παραμείνουν μόνο τα 1, μπορούμε να απαλλαγούμε από τα 111, και επομένως η τελική ακολουθία είναι είτε κενή είτε αποτελείται μόνο από ένα ή δύο 1. Στην πρώτη περίπτωση, το δίκτυο είναι μη κανονικό, και το εναλλασσόμενο άθροισμα διαιρείται με το 3. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, τα δίκτυα είναι κανονικά και το εναλλασσόμενο άθροισμά τους (που είναι 1 ή 2) δεν διαιρείται με το 3.

Πρόβλημα εξάσκησης. (a) Έχουμε $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$.

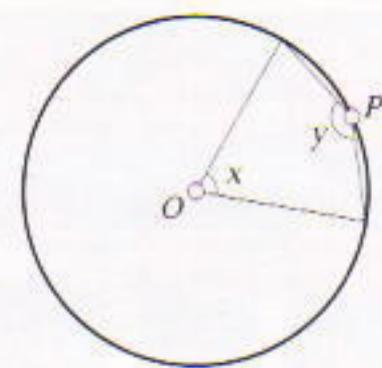
Αφού $a \equiv b \pmod{p}$, $a - b \equiv 0 \pmod{p}$, και $a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1} \equiv pa^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα.

(B) (1) Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός, που ο αναγνώστης μπορεί να το αποδείξει, ότι, όταν x είναι επίκεντρη γωνία (δείτε το Σχήμα 20), μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να βρίσκεται το σημείο P στον κύκλο O είναι η $x + 2y = 2\pi$. Στο σχήμα που συνοδεύει το αρχικό πρόβλημα,



Σχήμα 19

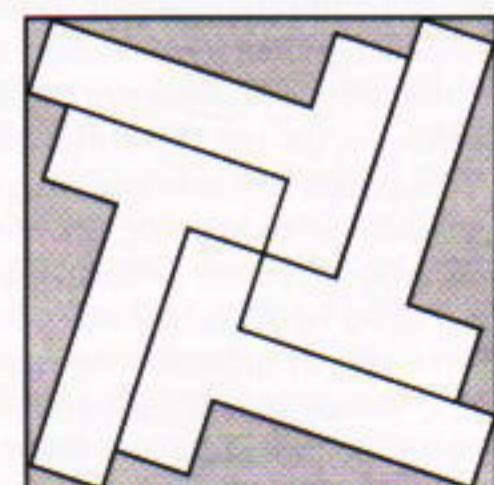


Σχήμα 20

$\text{to}\xi AB = \text{to}\xi DK$ (αφού $AB \parallel BC$, και $\text{to}\xi AK = \text{to}\xi AN$ (αφού $\angle B = \angle ADC$). Επομένως, $\text{to}\xi MN = \text{to}\xi NK$ (αφού η AN είναι διάμετρος). Αυτό οφείλεται ότι $NM = NK$, και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο C ανήκει στον κύκλο που διέρχεται από τα M και K και έχει κέντρο N . Έστω $\text{to}\xi AB = \text{to}\xi DK = a$, $\text{to}\xi AK = \text{to}\xi AN = b$, και $\text{to}\xi MN = \text{to}\xi NK = c$. Τότε, $\angle MNK = a + b$, $2\angle MCK = a + b + 2c$, και $\angle MNK + 2\angle MCK = 2a + 2b + 2c = 2\pi$. Το αποτέλεσμα προκύπτει τώρα από την πρώτη πρόταση της απόδειξης μας. (2) Τα τρίγωνα ABC και KLC είναι όμοια, όπως και τα ADC και MLC . Επομένως, $LC/LK = CB/AB = AD/CD = LM/LC$, και επομένως $LC = \sqrt{ab}$.

Παιχνιδότοπος

Η απάντηση στη σπαζοκεφαλιά του Tim Rowett: στην ακολουθία 77, 49, 36, 18, κάθε αριθμός, εκτός από τον πρώτο, είναι το γινόμενο των ψηφίων του προηγουμένου. Ο αριθμός που λέπει είναι ο 8.



Σχήμα 21

Για τη λύση του προβλήματος του Peter Hajek δείτε το Σχήμα 21.

Το ετήσιο πανηγύρι σπαζοκεφαλιών

Όλοι έρχονται μ' ένα δώρο και φεύγουν με δεκάδες

Anatoly Kalinin

Στις 20 Αυγούστου του 1994 στην πόλη του Σανάτλ, στην Ουάσινγκτον, θα φιλοξενήσει ένα από πολλές απόφεις ασυνήθιστο γεγονός. Οι διασπρότεροι «κατασκευαστές σπαζοκεφαλιών» απ' όλο τον κόσμο θα συγκεντρωθούν στο 14ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών. Για να πάρετε μια ιδέα σχετικά με το τι συμβαίνει σε αυτές τις συναντήσεις θα σας μιλήσω για την προηγούμενη —το 13ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών, που έγινε πέρυσι το καλοκαίρι στην Ολλανδία.

Πριν από ένα χρόνο, στις 20 Αυγούστου 1993, οι αίθουσες ενός φυμισμένου εστιατορίου έξω από το Άμστερνταμ είχαν γεμίσει κόσμο από πολύ νωρίς το πρωί. Περισσότεροι από εκατό άνθρωποι από τις ΗΠΑ, την Ολλανδία, την Ιταλία, τη Γαλλία, την Τσεχία, την Ιρλανδία, τη Μαλαισία, την Πορτογαλία, τη Ρωσία, την Ουκρανία και τη Νέα Ζηλανδία συγκεντρώθηκαν εκεί για το ετήσιο «συνέδριό» τους. Η Διεθνής Ένωση Θαυμαστών των Μηχανικών Σπαζοκεφαλιών ιδρύθηκε πριν από πολλά χρόνια, αλλά έγινε πραγματικά δημοφιλής και βελτίωσε την οργάνωσή της στις αρχές της δεκαετίας του 1980, την εποχή που ο κύβος του Rubik συνάρπασε εκατομμύρια ανθρώπους κάθε πλικίας σε ολόκληρο τον κόσμο.

Σήμερα, πάντως, η διασπρότερη προσωπικότητα στον κόσμο των σπαζοκεφαλιών δεν είναι πια ο Ernő

Rubik. Όπως και στην αρχαία δοξασία κατά την οποία ο κόσμος στηρίζοταν σε τρία γιγάντια ψάρια, έτοι και ο σύγχρονος κόσμος των έξι πνων παιχνιδιών στηρίζεται στους τρεις διασπρότερους ειδικούς του: στον Jerry Slocum από τις ΗΠΑ, στον Edward Hordern από την Αγγλία και στον Nob Yoshigahara από την Ιαπωνία. Οι τρεις τους έχουν τις μεγαλύτερες ουλλογές με σπαζοκεφαλιές (η καθεμιά περιλαμβάνει δεκάδες χιλιάδες κομμάτια), έχουν εκδώσει πολλά σχετικά με το θέμα βιβλία, και φυσικά έχουν εφεύρει δικές τους πρωτότυπες σπαζοκεφαλιές.

Ας επιστρέψουμε όμως στο Άμστερνταμ. Σύμφωνα με το έθιμο, κάθε προσκεκλημένος προσφέρει ως δώρο στο Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών ένα αντίγραφο μιας πρωτότυπης σπαζοκεφαλιάς (τις περισσότερες φορές είναι δική του επινόηση) σε καθέναν από τους υπόλοιπους συνέδρους. Το αποτέλεσμα όλων αυτών των ανταλλαγών είναι βαλίτοες γεμάτες καινούργιες σπαζοκεφαλιές που παίρνουν το δρόμο για τις καινούργιες τους πατρίδες. Και για έναν φανατικό του είδους, οι καινούργιες σπαζοκεφαλιές είναι πολυτιμότερες ακόμη και από τα διάσημα διαμάντια του Άμστερνταμ.

Το συνέδριο συνεχίστηκε σε διάφορα μέρη στο Άμστερνταμ και στα πρόσωτειά του για δύο πρέρες —πρέρες γεμάτες ανταλλαγές σπαζοκεφαλιών, προοπήθειες (συχνά μάταιες)

να ανακαλυφθεί αυτοστιγμέι το μυστικό μιας νέας σπαζοκεφαλιάς, συζητήσεις για νέες ιδέες, και αναδρομές στη χιλιόχρονη ιστορία των σπαζοκεφαλιών.

Το παιχνίδι που ανακρύχθηκε ως το καλύτερο απ' όσα εμφανίστηκαν στο πανηγύρι ήταν επινόηση ενός από τους τρεις σύγχρονους γίγαντες —του Edward Hordern. Είναι ένα χάλκινο πρίσμα με έξι έδρες που το διαπερνά μια στρογγυλή λεπτή ράβδος. Πρέπει να τραβήξετε τη ράβδο έξω από το πρίσμα. Οι επιφάνειες του πρίσματος και της ράβδου είναι απόλυτα λείες, χωρίς καμία πρεξοχή ή κινούμενα τμήματα. Το πρόβλημα —όπως είναι φυσικό— μοιάζει εντελώς απροσπέλαστο και άλυτο. Ένα μήνα μετά τη συγκέντρωση, όλοι οι σύνεδροι έλαβαν μια επιστολή που αποκάλυπτε το μυστικό: για να αποσυναρμολογήσεις το αντικείμενο πρέπει να το... φιλήσεις! Αποκαλύφθηκε ότι υπήρχε μια μικρή τρύπα στην επιφάνεια του πρίσματος —τόσο μικρή ώστε ήταν σχεδόν αδύνατο να την προσέξεις. Τοποθετείς τα χείλη σου πάνω από την τρύπα και φυσάς αέρα μέσα της. Η ράβδος γλυστράει μόνη της έξω από το πρίσμα.

Το δεύτερο βραβείο κέρδισε ο άλλος αστέρας του κόσμου των παιχνιδιών, ο Jerry Slocum. Η σπαζοκεφαλιά του ήταν εντυπωσιακή και παράδοξη. Αποτελούνταν μόνο από τέσσερα όμοια κομμάτια που θύμιζαν σχήματα των παζλ συναρμολόγησης.

Τα τέσσερα κομμάτια θηλύκωναν μεταξύ τους και ο σκοπός ήταν να τα απαγκιστρώσετε. Φαινόταν ότι χρειάζονται μαγικές ικανότητες: μπορούσατε πολύ εύκολα να αποσυνδέσετε δύο από τα κομμάτια, αλλά ήταν αδύνατο να κάνετε το ίδιο με τα τέσσερα!

Και τώρα, με την ευκαιρία, θέλω να σας παρουσιάσω μερικές σπαζοκεφαλιές από το 13ο Διεθνές Πανηγύρι, που μπορείτε να τις λύσετε με το μυαλό ή που είναι σχετικά εύκολο να τις κατασκευάσετε.

Αν υπάρχει και πιο μικρότερη πιθανότητα να βρεθείτε στο Σπάτλ αυτό τον Αύγουστο, επωφεληθείτε και ελάτε στο 14ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών. Δεν θα το μετανιώσετε! Για λεπτομέρειες, απευθυνθείτε στον Gary Foshee, 16006 266th Ave. S.E., Issaquah WA 98027, USA, τηλέφωνο 001 206 392 2907. ☐

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

QUANTUM

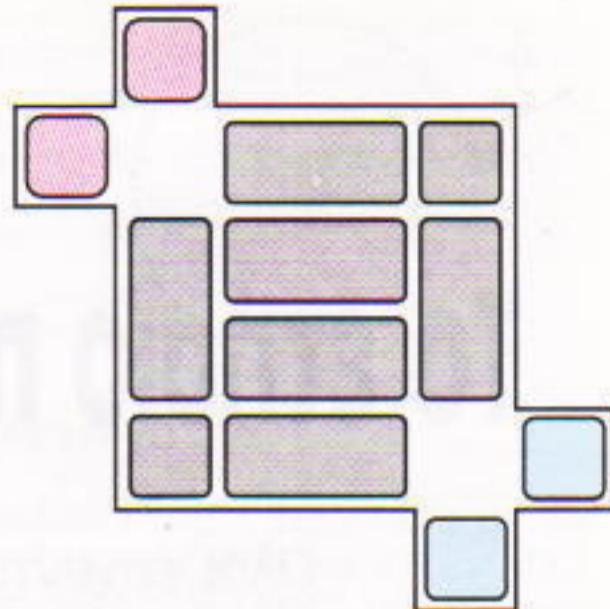
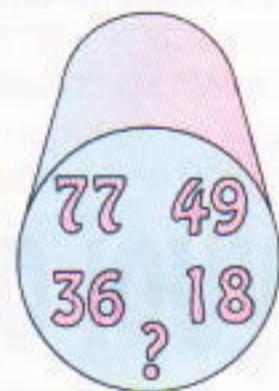
Ανακαλύπτοντας την επιστήμη

• «...Γεμάτο εξαιρετικά θέματα: υπέροχα άρθρα Μαθηματικών και Φυσικής για σπουδαστές λυκείων και πανεπιστημίων...» *Nature*

• «...Πρώτης τάξεως περιοδικό... Μ' αυτό αποκτά πρόσωπο η ποιότητα, η φαντασία και η γνώση... Το συνιστούμε ανεπιφύλακτα...» *Library Journal*

• «Θα πρέπει να υπάρχει στη βιβλιοθήκη κάθε σχολείου και πανεπιστημίου.» *Richard Askey*, Καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν

Διαβάστε το *Quantum*. Γίνετε και εσείς συντελεστής στην *Quan*-τική εξίσωση

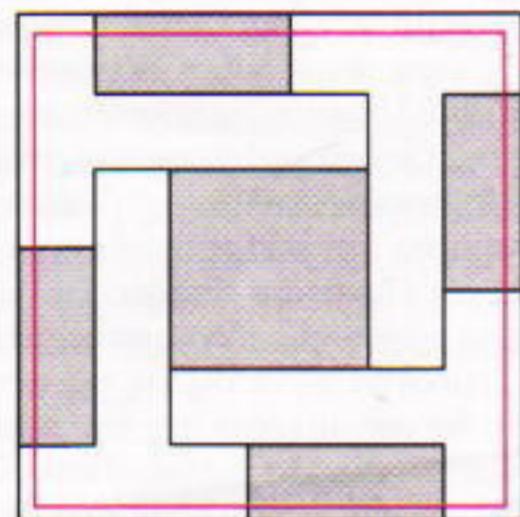


Σχήμα 1

Ο Tim Rowett είναι Άγγλος, σχεδιαστής παιχνιδιών και σπαζοκεφαλιών. Προσέφερε σε κάθε καλεσμένο ένα ζαχαρωτό με διάμετρο 2,5 εκ. και μήκος 20 εκ. Στη γέμιση του ζαχαρωτού υπάρχουν εννέα ράβδοι, καθεμία εκ των οποίων έχει το σχήμα ενός αριθμού, και οι οποίες επίσης τρώγονται. Έτοιμο, όταν δαγκώνετε ένα κομμάτι θλέπετε συνέχεια αυτούς τους μυστηριώδεις αριθμούς. Με αυτόν τον τρόπο η διαδικασία επίλυσης της σπαζοκεφαλιάς συνδυάζεται με την κατανάλωσή της. Για να κερδίσετε, λοιπόν, το εν λόγω «δίαθλο» δεν πρέπει μόνο να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς και να ανακαλύψετε αυτόν που λείπει, αλλά επιπλέον και να φάτε το ζαχαρωτό σοσ πιο γρήγορα μπορείτε.

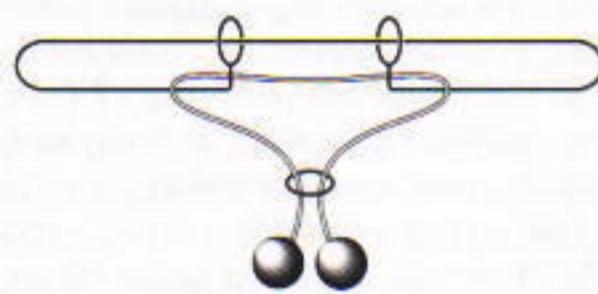
Σχήμα 3

Το δώρο του Herman Witteveen (Ολλανδία). Ο οκοπός είναι να ανταλλάξετε τα δύο κόκκινα τετράγωνα με τα δύο μπλε (μόνο με μετατοπίσεις).



Σχήμα 4

Το δώρο του Peter Hajek (Μεγάλη Βρετανία). Τοποθετήστε τα τέσσερα T μέσα στο κόκκινο τετράγωνο. Και μία επιπλέον ερώτηση για τους αναγνώστες του Quantum: αφού βρείτε τη λύση στο πρόβλημα, προσπαθήστε να ανακαλύψετε το ελάχιστο δυνατό μέγεθος του κόκκινου τετραγώνου, με δεδομένο το μέγεθος του μεγαλύτερου, έτοιμο ώστε να εξακολουθεί να είναι δυνατή η λύση. (Μπορούμε να μεταβάλλουμε τις διαστάσεις των γραμμάτων.)



Σχήμα 2

Η σπαζοκεφαλιά του Howard R. Swift (Τολίντο, Οχάιο). Ο οκοπός είναι να αποσυνδέσει το δαχτυλίδι.

Πριν αποφασίσεις πού θα πας να αγοράσεις βιβλία μαθηματικών, πρέπει να ρωτήσεις...

Αν δέλεις να πληροφορηθείς σωστά και υπεύθυνα για όλες τις μαθηματικές εκδόσεις, πρέπει να ρωτήσεις...

ΒΙΒΛΙΟΠΟΛΕΙΟ ΧΟρφιάτης ΕΚΔΟΣΕΙΣ
Ιπποκράτους 6, 106 79 - Αθήνα. Τηλ.: 3628492



Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομίσουμε. Τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εράς. Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 - Αθήνα. Τηλ.: 3643272, 3645098 Fax: 3641864

- «Ένα θαυμάσιο βιβλίο... Εξηγεί όλες τις όφεις της εξέλιξης με διαύγεια, και απαντά σε κάθε επιχείρηση των οπιοθιδροφικών οπαδών του δημητρυγούρου.»

Isaac Asimov

- «Μια εκπληκτικά διαυγής παρουσίαση του δαρβινισμού... Το καλύτερο βιβλίο του Dawkins.»

F. Ayala, Καθηγητής Γενετικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας

- «Το περισσότερο ενδιαφέρον βιβλίο για την εξέλιξη από την εποχή του Δαρβίνου.»

John Gribbin στο Good Book Guide

- «Το θέρα του ο Dawkins το χειρίζεται με τον ευαγγελικό ζύλο ενός κληρικού και με το ριαλό ενός μεγάλου επιστήμονα.»

The Times

- «Καταρρίπτει τα επιχειρήματα της θεϊκής δημητρυγίας χωρίς να μειώνει την αισθητή του μυστηρίου και της πολυπλοκότητας του κόσμου μας...»

A.G. Cairns-Smith στο Independent

- «Το μυστικό για να γράφει κανείς καλά επιστημονικά βιβλία είναι να έχει κατανοήσει ο ίδιος τις ιδέες... Μακάρι να μπορούσα να γράφω κι εγώ σαν τον Dawkins.»

John Maynard Smith στο New Scientist

- «Μια διαυγής και πλήρης επιχειρημάτων παρουσίαση της νεοδαρβινικής θεωρίας της εξέλιξης...»

The Times Education Supplement

Richard Dawkins

Ο ΤΥΦΛΟΣ ΩΡΟΛΟΓΟΠΟΙΟΣ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ:
Κώστας Κριμπάς

Σελ.: 514, Μεγ.: 14x21 εκ., Εικ.: Α/Μ, 6.500 δρχ.

«Η εξέλιξη διαμέσου της φυσικής επιλογής — η μη συνειδητή, αυτόρατη, τυφλή αλλά ουσιαστικά μη τυχαία διαδικασία που ανακαλύφθηκε από τον Δαρβίνο — είναι η μοναδική απάντηση στο μεγαλύτερο απ' όλα τα ερωτήματα: γιατί υπάρχουμε;»

Richard Dawkins — Καθηγητής Ζωολογίας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

Το πιο πρόσφατο βιβλίο του Dawkins. Γράφτηκε έντεκα χρόνια μετά το Εγγιωτικό γονίδιο, και έχει τιμηθεί με το Βραβείο Faraday της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου (1990). Έχει γυριστεί σε τηλεοπτικό φίλμ από το BBC, και κέρδισε το Βραβείο καλύτερης επιστημονικής ταινίας (1987).

Έχει μεταφραστεί σε είκοσι πέντε γλώσσες, και είναι παγκόσμιο μπεστ-σέλερ.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ